S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 1–21 (2020) УДК 519.175
DOI 10.33048/semi.2020.17.xxx MSC 05C30

О ПЯТИ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

В.И. РОДИОНОВ

Abstract. In the author's previous works published in this journal, a number of formulas are obtained related to the theme of enumeration of partial orders (finite topologies). A formula is proved that reduces the calculation of the number $T_0(n)$ of all partial orders defined on an n-set to the calculation of the numbers $W(p_1,\ldots,p_k)$ of partial orders of a special form. To calculate the number $T_0(n)$, a partially convolute formula is obtained. Three serial families of equations of the relationship between the individual numbers $W(p_1,\ldots,p_k)$, having a recurrence character, are obtained. Using these equations, we calculated (without using a computer) the numbers $T_0(n)$ for all $n<9$. In this paper, five new (non-serial) recurrence relations are obtained that relate the separate numbers $W(p_1,\ldots,p_k)$. To calculate the number $T_0(9)$, these relations are still not enough (the number of required numbers $W(p_1,\ldots,p_k)$ is 128, and the rank of the system matrix is 127; just one equation is missing generating the desired rank; in previous studies, the rank was 123). Nevertheless, the obtained formulas demonstrate the diversity and potential of the research, and we admit the presence of some general regularity that generates new formulas.

Keywords: graph enumeration, poset, finite topology.

1. Введение

Работа продолжает исследование чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$, определенных в [1] и фигурирующих в публикациях [2, 3, 4].

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве $X \doteq \{1,\ldots,n\}$, $n\in\mathbb{N}$. Существует взаимно-однозначное

Rodionov, V.I., On five recursion relations in the problem of enumeration of posets.

Поступила 17 ноября 2020 г., опубликована 31 декабря 2020 г.

соответствие между множеством $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{V}_0^0(X)$ всех помеченных транзитивных орграфов, определенных на X; кроме того, существует взаимнооднозначное соответствие между $\mathcal{V}_0(X)$ и множеством $\mathcal{T}_0(X)$ всех помеченных T_0-топологий, определенных на X. Пусть $T_0(n) \doteq \operatorname{card}\mathcal{T}_0(X)$. Очевидно, $T_0(n) = \operatorname{card}\mathcal{V}_0(X) = \operatorname{card}\mathcal{V}_0^0(X)$. В работе [1] доказана формула

$$T_0(n) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1!\ldots p_k!} W(p_1,\ldots,p_k), \tag{1}$$

сводящая подсчет числа $T_0(n)$ всех частичных порядков (помеченных T_0-топологий), определенных на n-множестве, к вычислению чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$ частичных порядков специального вида. Суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k=n$.

Согласно [2] для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство

$$T_0(n) = n\,T_0(n-1) + \sum_{(p_1,\ldots,p_k)} (-1)^{n-1-k} \frac{n!}{(p_1+1)!\,p_2!\ldots p_k!}\, k\, p_1 W(p_1,\ldots,p_k), \tag{2}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1,\ldots,p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1+\ldots+p_k=n-1$. Понятно, что количество слагаемых в формуле (2) в два раза меньше, чем в формуле (1). Определение чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$ см. в § 3.

2. Уравнения связи между отдельными числами $W(p_1,\ldots,p_k)$

В работах [1, 2, 3] получены три семейства уравнений связи между отдельными числами $W(p_1,\ldots,p_k)$, имеющие серийный характер. Так, если D_k — группа диэдра, порожденная подстановками $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k{-}1 & k \\ 2 & 3 & \ldots & k & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k{-}1 & k \\ k & k{-}1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$, то согласно [1] справедливы равенства

$$W(p_{\pi(1)},\ldots,p_{\pi(k)}) = W(p_1,\ldots,p_k), \qquad \pi \in D_k. \tag{3}$$

В работах [2] и [3] соответственно доказаны рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} &\sum_{q_1+\ldots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\ldots q_r!} W(p+1,q_1,\ldots,q_r) \\ &\quad = \sum_{q_1+\ldots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\ldots q_r!} (r+1)\, W(p,q_1,\ldots,q_r), \\ &\qquad\qquad p \geqslant 0, \qquad m \geqslant 1, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{q_1+\ldots+q_r=m+1} (-1)^{m+1-r} \frac{m!}{(q_1-1)!\,q_2!\ldots q_r!} W(p,q,q_1,\ldots,q_r) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^{(p-k)q} \sum_{l=0}^{q} \binom{q}{l} \sum_{q_1+\ldots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1!\ldots q_r!} W(k,l,q_1,\ldots,q_r), \\ &\qquad\qquad p \geqslant 0, \qquad q \geqslant 0, \qquad m \geqslant 1. \end{aligned} \tag{5}$$

В формулах (4) – (5) полагаем по определению

$$W(0,q_1,\ldots,q_r) \doteq W(q_1,\ldots,q_r), \qquad W(p,0,q_1,\ldots,q_r) \doteq W(p,q_1,\ldots,q_r).$$

Серийность формул (3) – (5) следует понимать следующим образом. Зафиксируем натуральное $n \geqslant 2$. В формуле (3) варьируем упорядоченные наборы

$(p_1, \ldots, p_k)$ натуральных чисел такие, что $p_1+\ldots+p_k = n$, и варьируем подстановки $\pi \in D_k$. В формулах (4) варьируем пары (p, m), а в формулах (5) тройки (p, q, m) таким образом, что $p + m = n - 1$ и $p + q + m = n - 1$ соответственно.

В [2, 3] представлены все числа $W(p_1, \ldots, p_k)$ такие, что $p_1 + \ldots + p_k \leqslant 7$. Их общее количество — 127. Они получены последовательно по $i = 2, \ldots, 7$: на каждом шаге решается система (3) – (5) линейных уравнений относительно 2^{i-1} величин $W(p_1, \ldots, p_k)$, $p_1+\ldots+p_k = i$. При $i = 8$ количество неизвестных чисел $W(p_1, \ldots, p_k)$ равно 128. В [3] показано, что в этом случае матрица системы (3) – (5) имеет ранг 123 и, следовательно, общее решение системы допускает пятимерную параметризацию, причем для части переменных $W(p_1, \ldots, p_k)$ получены числовые значения. Таким образом, соотношения (3) – (5) и формула (2) позволяют вычислить числа $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 8$ (без применения ЭВМ, только за счет решения системы (3) – (5)), а для вычисления числа $T_0(9)$ данных соотношений не достаточно (не хватает всего пяти уравнений).

В настоящей работе в дополнение к формулам (3) – (5) получены пять новых соотношений рекуррентного характера (см. формулы (30), (31), (33), (34), (37)), связывающие между собой отдельные значения $W(p_1, \ldots, p_k)$. В отличие от формул (3) – (5) новые формулы не обладают свойством серийности (при фиксированном n каждая из формул применима ровно один раз).

К сожалению, полученных уравнений все еще не достаточно для вычисления числа $T_0(9)$: при $n = 9$ количество неизвестных чисел $W(p_1, \ldots, p_k)$, фигурирующих в формуле (2), равно 128, а ранг матрицы системы теперь равен 127; не хватает всего одного уравнения, порождающего требуемый ранг. Несмотря на столь невысокий, казалось бы, коэффициент полезного действия новых формул, их появление демонстрирует потенциальные возможности проводимых исследований, — все-таки формулы породили четыре новые уравнения, линейно независимые от предыдущих 123-х уравнений, полученных в [1, 2, 3] (заметим еще, что пять новых уравнений между собой линейно независимы). Мы допускаем наличие некоторой общей закономерности такой, что при переходе $T_0(n-1) \to T_0(n)$ на регулярной основе генерируется достаточное количество уравнений, связывающих между собой те или иные величины $W(p_1, \ldots, p_k)$ при $p_1 + \ldots + p_k \leqslant n$.

Заметим еще, что в работе [2] приведены явные формулы для вычисления чисел $W(p)$, $W(p, q)$, $W(p, 1, q)$, $W(p, 2, q)$, $W(p, 1, 1, q)$ и рекуррентная формула для вычисления чисел $W(p, 1, q, 1)$. Формулы дополняют совокупность соотношений относительно величин $W(p_1, \ldots, p_k)$, однако на этапе вычислений чисел $T_0(n)$ при $n \leqslant 9$ они не улучшают ранг матрицы системы.

Следует также отметить, что благодаря компьютерным вычислениям [5] в настоящее время известны значения $T_0(n)$ для всех $n \leqslant 18$, что позволяет, в какой-то мере, контролировать наши вычисления.

3. Определения и вспомогательные утверждения

Пусть $B \doteq \{0, 1\}$ — булево множество, X — произвольное множество. Функции $X^2 \to B$ называем *характеристическими*. Всякое подмножество $\sigma \subseteq X^2$, называемое *бинарным отношением* (или просто *отношением*) на множестве X, порождает характеристическую функцию

$$\chi_\sigma \colon X^2 \to B, \qquad \chi_\sigma(x, y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если} \quad (x, y) \in \sigma, \\ 0, & \text{если} \quad (x, y) \notin \sigma. \end{cases}$$

Далее функцию $\chi_\sigma(\cdot,\cdot)$ обозначаем через $\sigma(\cdot,\cdot)$. С другой стороны, всякая функция $\chi: X^2 \to B$ порождает бинарное отношение $\sigma_\chi \subseteq X^2$ такое, что $(x,y) \in \sigma_\chi$, если $\chi(x,y) = 1$. Отображение $\sigma \to \sigma(\cdot,\cdot)$ является биекцией между множеством бинарных отношений и множеством характеристических функций. В силу этого обстоятельства мы называем подмножества $\sigma \subseteq X^2$ как отношениями, так и функциями (иногда орграфами). В случае $\operatorname{card} X < \infty$ характеристическую функцию можно интерпретировать как бинарную матрицу (матрицу, состоящую из 0 и 1). В работе применяется функциональное представление, позволяющее получать содержательные результаты в наиболее общей форме (см., например, родственные работы [6, 7, 8, 4], посвященные исследованию подграфов графа бинарных отношений).

Через $\mathcal{V}_0(X)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве X. В терминах характеристических функций справедливо утверждение: *включение* $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$\sigma(x,x) = 1 \ \text{для всех } x \in X,$$
$$\sigma(x,y)\,\sigma(y,z) \leqslant \sigma(x,z) \ \text{для всех } x,y,z \in X, \tag{6}$$
$$\sigma(x,y)\,\sigma(y,x) = \delta_{xy} \ \text{для всех } x,y \in X \ (\text{где } \delta_{xy} - \text{символ Кронекера}).$$

Далее полагаем $\operatorname{card} X < \infty$. Для любого частичного порядка $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ определено опорное множество

$$S(\sigma) \doteq \{\, y \in X\colon \sigma(x,y) = \delta_{xy} \ \text{ для всех } \ x \in X \,\} \neq \varnothing, \tag{7}$$

а если $\varnothing \neq Y \subseteq X$, то сужение $\sigma|_{Y^2}$ принадлежит $\mathcal{V}_0(Y)$ (есть частичный порядок на множестве Y). Неравенство $S(\sigma) \neq \varnothing$ доказано в [6] (предложение 2).

Пусть $(p_1,\ldots,p_k) \in \mathbb{N}^k$, $n \doteq p_1 + \ldots + p_k$, $X \doteq \{1,\ldots,n\}$. Набор $(p_1,\ldots,p_k)$ называем *разбиением* числа n. Разбиению $(p_1,\ldots,p_k)$ соответствует представление отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в блочном виде

$$\left|\begin{array}{cccc} \sigma^{11} & \sigma^{12} & \ldots & \sigma^{1k} \\ \sigma^{21} & \sigma^{22} & \ldots & \sigma^{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma^{k1} & \sigma^{k2} & \ldots & \sigma^{kk} \end{array}\right|, \tag{8}$$

в котором на пересечении i-ой горизонтальной и j-ой вертикальной полос стоит блок σ^{ij} с p_i строками и p_j столбцами. Запись отношения $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$ в виде (8) будем называть блочным представлением *типа* $(p_1,\ldots,p_k)$.

Через $\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (8) типа $(p_1,\ldots,p_k)$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i = 1,\ldots,k$, — единичные матрицы,

и пусть $W(p_1,\ldots,p_k) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k)$.

Числа $W(p_1,\ldots,p_k)$ фигурируют в формулах (1)–(5) и являются основным объектом исследований настоящей работы (см. также [1, 2, 3, 4]).

Замечание 1. Распространим определение чисел $W(p_1,\ldots,p_k)$ на произвольные упорядоченные наборы $(p_1,\ldots,p_k)$ целых неотрицательных аргументов. Полагаем по определению $W(0) \doteq 1$. Если $p_i = 0$ для некоторого i, то полагаем

$$W(p_1,\ldots,p_k) \doteq W(p_1,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_k).$$

Пусть, далее, $k \in \mathbb{N}$, $(p_1, \ldots, p_{k+1}) \in \mathbb{N}^{k+1}$, $p \doteq p_1 + \ldots + p_k$, $m \doteq p_{k+1}$,

$$X \doteq \{1, \ldots, p+m\}, \quad M \doteq \{p+1, \ldots, p+m\}.$$

Через $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k; m)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (8) типа $(p_1, \ldots, p_{k+1})$

1) все блоки σ^{ij}, $1 \leqslant j < i \leqslant k+1$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i = 1, \ldots, k$, — единичные матрицы;

3) диагональный блок $\sigma^{k+1,k+1}$ — частичный порядок (принадлежит $\mathcal{V}_0(M)$), и пусть $W(p_1, \ldots, p_k; m) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k; m)$.

Предложение 1 (см. [3], предложение 2)**.** *Для целых неотрицательных чисел* $p_1, \ldots, p_k$ *и натурального* m *справедливы равенства*

$$W(p_1, \ldots, p_k; m) = \sum_{q=1}^{m} (-1)^{q-1} \binom{m}{q} W(p_1, \ldots, p_k, q; m-q),$$

$$W(p_1, \ldots, p_k; m) = \sum_{q_1+\ldots+q_r=m} (-1)^{m-r} \frac{m!}{q_1! \ldots q_r!} W(p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_r), \tag{9}$$

где суммирование во второй фомуле ведется по всем упорядоченным наборам $(q_1, \ldots, q_r)$ *натуральных чисел таких, что* $q_1 + \ldots + q_r = m$.

4. Союзные числа $V(p_1, \ldots, p_k; m)$

Пусть $(p_1, \ldots, p_k, m) \in \mathbb{N}^{k+1}$. Через $\mathcal{V}(p_1, \ldots, p_k; m)$ обозначим совокупность всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k; m)$, что в блочном представлении (8) типа $(p_1, \ldots, p_{k+1})$ (где $p_{k+1} = m$) наддиагональный блок $\sigma^{k,k+1}$ — *невырожденный* (то есть в каждом столбце блока имеется хотя бы одна единица; в приводимом ниже блочном представлении этот блок обозначен символом $*$):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|l} \hline e_{p_1} & & & & & p_1 \\ \cline{1-2} 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \cline{1-3} \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \hline 0 & \ddots & 0 & e_{p_k} & * & p_k \\ \hline \multicolumn{3}{|c|}{0} & 0 & & m = p_{k+1} \\ \hline \end{array} \quad . \tag{10}$$

Распространим определение чисел $V(p_1, \ldots, p_k; m) \doteq \operatorname{card} \mathcal{V}(p_1, \ldots, p_k; m)$ на все наборы $(p_1, \ldots, p_k, m)$ целых неотрицательных чисел. Полагаем

$$V(p_1, \ldots, p_k, 0; m) \doteq \delta_{m0} W(p_1, \ldots, p_k), \qquad V(p_1, \ldots, p_k; 0) \doteq W(p_1, \ldots, p_k),$$

а если $p_i = 0$ для некоторого $i < k$, то полагаем

$$V(p_1, \ldots, p_k; m) \doteq V(p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_k; m).$$

Предложение 2 (см. [3], теорема 1)**.** *Для целых неотрицательных чисел* $p_1, \ldots, p_k$, q, m *справедливо равенство*

$$V(p_1, \ldots, p_k, q; m) = \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \binom{m}{r} W(p_1, \ldots, p_k, q+r; m-r). \tag{11}$$

5. Союзные числа $W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)$

Пусть $k,r\in\mathbb{N}$; $(p_1,\ldots,p_{k+r})\in\mathbb{N}^{k+r}$; $p\doteq p_1+\ldots+p_k$; $m_i\doteq p_{k+i}$ для всех $i=1,\ldots,r$; $n_i\doteq p+m_1+\ldots+m_i$ для всех $i=1,\ldots,r$;

$$X\doteq\{\,1,\ldots,n_r\,\};\qquad M_i\doteq\{\,1-m_i+n_i,\ldots,n_i\,\},\quad i=1,\ldots,r. \tag{12}$$

Через $\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)$ обозначим совокупность всех $\sigma\in\mathcal{V}_0(X)$ таких, что в блочном представлении (8) типа $(p_1,\ldots,p_{k+r})$

1) все блоки σ^{ij}, $1\leqslant j<i\leqslant k+r$, состоят из нулей;

2) все диагональные блоки σ^{ii}, $i=1,\ldots,k$, — единичные матрицы;

3) все диагональные блоки $\sigma^{k+i,k+i}$, $i=1,\ldots,r$, — частичные порядки (принадлежат $\mathcal{V}_0(M_i)$),

и пусть $W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)\doteq\operatorname{card}\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)$.

Для элементов множеств $\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k)$ и $\mathcal{W}(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)$ справедливы блочные представления (символ 0 означает, что все элементы в блоке равны нулю; диагональные блоки e_{p_i} — это единичные матрицы порядка p_i, $i=1,\ldots,k$):

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
e_{p_1} & & & \\
\hline
0 & \ddots & & \\
\hline
\ddots & \ddots & \ddots & \\
\hline
0 & \ddots & 0 & e_{p_k} \\
\hline
\multicolumn{1}{c}{p_1} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{\cdots} & \multicolumn{1}{c}{p_k}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\cline{2-9}
p_1 & e_{p_1} & & & & & & & \\
\cline{2-9}
\vdots & 0 & \ddots & & & & & & \\
\cline{2-9}
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\
\cline{2-9}
p_k & 0 & \ddots & 0 & e_{p_k} & & & & \\
\cline{2-9}
m_1=p_{k+1} & & & & & & & & \\
\cline{6-9}
\vdots & & & 0 & & 0 & & & \\
\cline{6-9}
\vdots & & & & & \ddots & \ddots & & \\
\cline{6-9}
m_r=p_{k+r} & & & & & 0 & \ddots & 0 & \\
\cline{2-9}
\end{array} \tag{13}$$

Замечание 2. Распространим определение чисел $W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)$ на произвольные упорядоченные наборы $(p_1,\ldots,p_k,m_1,\ldots,m_r)$ целых неотрицательных аргументов. Если $p_i=0$ для некоторого i, то полагаем

$$W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)\doteq W(p_1,\ldots,p_{i-1},p_{i+1},\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r),$$

а если $m_i=0$ для некоторого i, то полагаем

$$W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)\doteq W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_{i-1},m_{i+1},\ldots,m_r). \tag{14}$$

Замечание 3. Понятно, что числовые множества $\{\,W(p_1,\ldots,p_k;m)\,\}$ — это представители семейства множеств $\{\,W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)\,\}$ при $r=1$.

Лемма 1. *Для натурального m_1 и целых неотрицательных чисел $p_1,\ldots,p_k$, $m_2,\ldots,m_r$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r)& \\ &=\sum_{q=1}^{m_1}(-1)^{q-1}\binom{m_1}{q}W(p_1,\ldots,p_k,q;m_1-q,m_2,\ldots,m_r).\end{aligned} \tag{15}$$

Доказательство. Упорядоченный набор $(p_1,\dots,p_k)$ обозначим через $\overline{p}$, а упорядоченный набор $(m_2,\dots,m_r)$ — через $\overline{m}$. Согласно (12) имеет место равенство $M_1 = \{\, p+1,\dots,p+m_1 \,\} \neq \varnothing$, а в силу (7) для всех $\sigma \in \mathcal{W}(\overline{p};m_1,\overline{m})$ справедливо $S(\sigma|_{M_1^2}) \neq \varnothing$. Следовательно, для любого непустого подмножества $\alpha \subseteq M_1$ определено множество

$$\mathcal{W}_\alpha(\overline{p};m_1,\overline{m}) \doteq \{\, \sigma \in \mathcal{W}(\overline{p};m_1,\overline{m})\colon\ \alpha \subseteq S(\sigma|_{M_1^2}) \,\}.$$

Очевидно, включение $\varnothing \neq \alpha \subseteq \beta \subseteq M_1$ влечет включение

$$\mathcal{W}_\beta(\overline{p};m_1,\overline{m}) \subseteq \mathcal{W}_\alpha(\overline{p};m_1,\overline{m}),$$

поэтому в силу принципа включения-исключения имеет место равенство

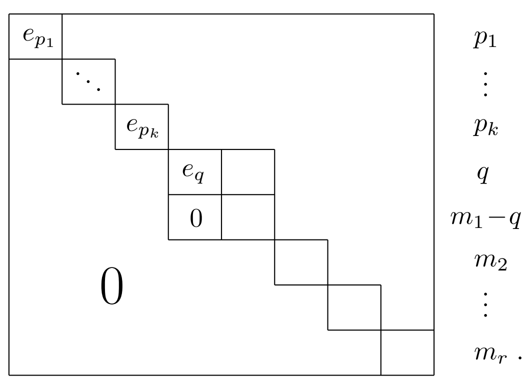
$$\operatorname{card}\mathcal{W}(\overline{p};m_1,\overline{m}) = \sum_{\varnothing\neq\alpha\subseteq M_1} (-1)^{|\alpha|-1}\operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(\overline{p};m_1,\overline{m}),$$

в котором суммирование ведется по всем непустым подмножествам α из M_1, а $|\,\alpha\,|$ обозначает число элементов в α. Очевидно, если непустые $\alpha,\beta \subseteq M_1$ таковы, что $|\,\alpha\,| = |\,\beta\,|$, то

$$\operatorname{card}\mathcal{W}_\alpha(\overline{p};m_1,\overline{m}) = \operatorname{card}\mathcal{W}_\beta(\overline{p};m_1,\overline{m}) = \operatorname{card}\mathcal{W}_\gamma(\overline{p};m_1,\overline{m}),$$

где $\gamma \doteq \{\, p+1,\dots,p+q \,\} \subseteq M_1$, $q \doteq |\,\alpha\,| = |\,\beta\,| \in [1,m_1]$. В соответствии с (7) для элементов множества $\mathcal{W}_\gamma(\overline{p};m_1,\overline{m})$ справедливо представление

(16)



Следовательно, $\mathcal{W}_\gamma(\overline{p};m_1,\overline{m}) = \mathcal{W}(\overline{p},q;m_1-q,\overline{m})$, поэтому

$$\operatorname{card}\mathcal{W}(\overline{p};m_1,\overline{m}) = \sum_{q=1}^{m_1}(-1)^{q-1}\binom{m_1}{q}\operatorname{card}\mathcal{W}(\overline{p},q;m_1-q,\overline{m}). \qquad \square$$

Через Q_m, $m \in \mathbb{N}$, обозначим совокупность всех разбиений числа m (упорядоченных наборов $(q_1,\dots,q_s)$ натуральных чисел таких, что $q_1+\ldots+q_s = m$).

Лемма 2. *Для натурального m_1 и целых неотрицательных чисел $p_1,\dots,p_k$, $m_2,\dots,m_r$ справедливо равенство*

$$(17)\quad W(p_1,\dots,p_k;m_1,\dots,m_r) = \sum_{(q_1,\dots,q_s)\in Q_{m_1}} (-1)^{m_1-s}\,\frac{m_1!}{q_1!\dots q_s!}\,W(p_1,\dots,p_k,q_1,\dots,q_s;m_2,\dots,m_r).$$

Доказательство. (Проводится индукцией по m_1.) При $m_1 = 1$ формула (17) превращается в равенство

$$W(p_1,\ldots,p_k;1,m_2,\ldots,m_r) = W(p_1,\ldots,p_k,1;m_2,\ldots,m_r),$$

справедливое в силу определений этих чисел. Равенство составляет базу индукции. Упорядоченный набор $(p_1,\ldots,p_k)$ далее обозначаем через $\overline{p}$, а упорядоченный набор $(m_2,\ldots,m_r)$ — через $\overline{m}$. Пусть $m_1 > 1$, и предположим, что равенство (17) верно для всех $\ell < m_1$ и всех $\overline{p}$ и $\overline{m}$ (в (17) вместо m_1 следует писать символ ℓ). Покажем, что оно верно также для $\ell = m_1$ и всех $\overline{p}$ и $\overline{m}$.

Применив индукционное предположение к слагаемым, стоящим в правой части равенства (15), получаем, что

$$(18)\quad W(\overline{p};m_1,\overline{m}) - (-1)^{m_1-1}W(\overline{p},m_1;0,\overline{m}) = \sum_{q=1}^{m_1-1}(-1)^{q-1}\binom{m_1}{q}W(\overline{p},q;m_1-q,\overline{m})$$
$$= \sum_{q=1}^{m_1-1}(-1)^{q-1}\binom{m_1}{q}\sum_{q_1+\ldots+q_s=m_1-q}(-1)^{m_1-q-s}\,\frac{(m_1-q)!}{q_1!\ldots q_s!}\,W(\overline{p},q,q_1,\ldots,q_s;\overline{m}).$$

Далее воспользуемся соглашениями (14). Переходя в (18) от двойного суммирования к суммированию по всем переменным одновременно, получаем равенство

$$W(\overline{p};m_1,\overline{m}) - (-1)^{m_1-1}W(\overline{p},m_1;\overline{m}) = \sum_{\substack{q+q_1+\ldots+q_s=m_1\\ q<m_1}}(-1)^{m_1-1-s}\,\frac{m_1!}{q!\,q_1!\ldots q_s!}\,W(\overline{p},q,q_1,\ldots,q_s;\overline{m}).$$

Сделав замену переменных $q_1' = q$, $q_i' = q_{i-1}$, $i = 2,\ldots,s' = s+1$, получаем

$$W(\overline{p};m_1,\overline{m}) - (-1)^{m_1-1}W(\overline{p},m_1;\overline{m}) = \sum_{\substack{q_1+\ldots+q_s=m_1\\ q_1<m_1}}(-1)^{m_1-s}\,\frac{m_1!}{q_1!\ldots q_s!}\,W(\overline{p},q_1,\ldots,q_s;\overline{m}),$$

$$W(\overline{p};m_1,\overline{m}) = \sum_{(q_1,\ldots,q_s)\in Q_{m_1}}(-1)^{m_1-s}\,\frac{m_1!}{q_1!\ldots q_s!}\,W(\overline{p},q_1,\ldots,q_s;\overline{m})$$

(штрихи у новых переменных не пишем), что и доказывает утверждение. □

Лемма 3. *Для целых неотрицательных* $p_1,\ldots,p_k$ *и натуральных* $m_1,\ldots,m_r$ *справедливо равенство*

$$(19)\quad W(p_1,\ldots,p_k;m_1,\ldots,m_r) = \sum_{\substack{(q_1^i,\ldots,q_{s_i}^i)\in Q_{m_i}\\ i=1,\ldots,r}}\left[\prod_{j=1}^{r}(-1)^{m_j-s_j}\,\frac{m_j!}{q_1^j!\ldots q_{s_j}^j!}\right]$$
$$\times\, W(p_1,\ldots,p_k,q_1^1,\ldots,q_{s_1}^1,q_1^2,\ldots,q_{s_2}^2,\ldots,q_1^r,\ldots,q_{s_r}^r).$$

Для доказательства утверждения достаточно осуществить r итераций с формулой (17), а на заключительном этапе воспользоваться соглашением (14).

6. Союзные числа $W^{(r)}(s;m)$

Зафиксируем целые числа $r \geqslant 1$, $s \geqslant 0$ и определим матрицы $\varepsilon_r = \big(\varepsilon(x,y)\big)$,

$$\varepsilon(x,y) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant y, \\ 0, & \text{если } x > y, \end{cases} \qquad x,y \in R \doteq \{1,\ldots,r\}, \qquad a_{rs} = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 \\ 0 & e_s \end{pmatrix}$$

строения $r \times r$ и $(r+s)\times(r+s)$ соответственно. (При $s \neq 0$ блок e_s — единичная матрица, блоки 0 состоят из нулей.) Полагаем по определению $a_{r0} = \varepsilon_r$. Понятно, что ε_r и a_{rs} — частичные порядки. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, и пусть $p_1 \doteq r+s$, $p_2 \doteq m$, $X \doteq \{1,\ldots,p_1+p_2\}$. Через $\mathcal{W}^{(r)}(s;m)$ обозначим совокупность всех отношений $\sigma \in \mathcal{V}_0(X)$, у которых в блочном представлении (8) типа (p_1,p_2) имеет место равенство $\sigma^{11} = a_{rs}$, блок σ^{21} целиком состоит из нулей, блок σ^{22} — частичный порядок. Другими словами, для всех элементов σ из множества $\mathcal{W}^{(r)}(s;m)$ справедливо блочное представление

$$(20) \qquad \varepsilon_r = \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ & & 1 & \ldots & 1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{matrix}}\,, \qquad \sigma = \begin{array}{|c|c|c|l} \hline \varepsilon_r & 0 & * & \; r \\ \hline 0 & e_s & & \; s \\ \hline 0 & 0 & & \; m\,. \\ \hline \end{array}$$

(При $s = 0$ средние горизонтальная и вертикальная полосы отсутствуют.) В блоке $*$ может располагаться любая комбинация из столбцов следующего вида:

$$(21) \qquad \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \cdots \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\,.$$

Наличие других столбцов противоречило бы транзитивности отношения σ. Действительно, если бы в блоке $*$ в некотором столбце $y \in X$ располагался подобный столбец, то нашлись бы $x,z \in R$ такие, что $x < z$, $\sigma(x,y) = 0$ и $\sigma(z,y) = 1$. Так как $\sigma(x,z) = 1$ (в блоке ε_r), то в силу (6) получаем противоречие: $1 = \sigma(x,z)\,\sigma(z,y) \leqslant \sigma(x,y) = 0$.

Определим числа $W^{(r)}(s;m) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}^{(r)}(s;m)$ и $W^{(r)}(s;0) \doteq 1$. В силу представления (20) легко заметить, что

$$(22) \qquad W^{(1)}(s;m) = W(s+1;m).$$

Теорема 1. *Для целых чисел $r \geqslant 1$, $s \geqslant 0$ и $m \geqslant 1$ справедливо равенство*

$$(23) \qquad W^{(r)}(s;m) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-1)^{m-k} \frac{m!}{p_1!\ldots p_k!} \binom{k+r}{r} W(s,p_1,\ldots,p_k),$$

где суммирование ведется по всем разбиениям $(p_1,\ldots,p_k)$ числа m.

Доказательство. Наряду с $R = \{1,\ldots,r\}$ и $X = \{1,\ldots,r+s+m\}$ определим множества (отрезки) $M \doteq \{r+s+1,\ldots,r+s+m\}$ и $S \doteq X \backslash (R \cup M)$. Справедливо равенство $S = \{r+1,\ldots,r+s\}$ (при $s = 0$ имеем $S = \varnothing$). Пусть, далее,

$$A \doteq \big\{ \alpha = (\alpha_0,\alpha_1\ldots,\alpha_r)\colon\ \alpha_j \in \mathbb{Z},\ \alpha_j \geqslant 0,\ \alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_r = m \big\}$$

— множество мультииндексов. Для всех $\alpha \in A$ и $j \in R^+ \doteq \{0\} \cup R$ полагаем

$$(24) \qquad \omega_j \doteq r+s+\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_j, \qquad h_j \doteq \{1-\alpha_j+\omega_j,\ldots,\omega_j\} \subseteq M.$$

Обозначим столбцы (высоты r) из совокупности (21) через $v_0, v_1, \dots, v_r$ соответственно. В комментариях к (21) мы отметили, что в блоке $*$ (ширины m) представления (20) может располагаться любая комбинация этих столбцов.

Зафиксируем $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1 \dots, \alpha_r) \in A$. Через $\mathcal{W}_\alpha^{(r)}(s;m)$ обозначим совокупность всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{W}^{(r)}(s;m)$, у которых в блоке $*$ имеется ровно α_j вхождений столбца v_j (для всех $j \in R^+$). Очевидно,

$$W^{(r)}(s;m) = \sum_{\alpha \in A} \operatorname{card} \mathcal{W}_\alpha^{(r)}(s;m).$$

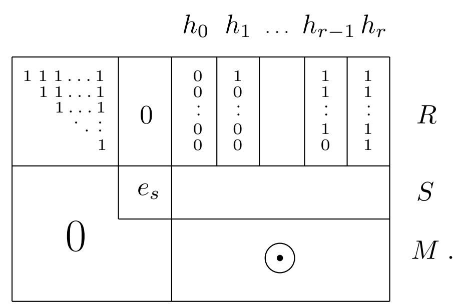
Пусть, далее, $\alpha \in A$. Через $\overline{\mathcal{W}}_\alpha^{(r)}(s;m)$ обозначим совокупность всех тех отношений $\sigma \in \mathcal{W}^{(r)}(s;m)$, у которых в блоке $*$ столбцы v_j, $j \in R^+$, расположены специальным образом: сначала (слева направо) идут векторы v_0 в количестве α_0 штук, затем — векторы v_1 в количестве α_1 штук и т.д. В силу общей комбинаторной теории справедливы равенства

$$\operatorname{card} \mathcal{W}_\alpha^{(r)}(s;m) = \frac{m!}{\alpha_0!\alpha_1!\dots\alpha_r!} \operatorname{card} \overline{\mathcal{W}}_\alpha^{(r)}(s;m),$$

$$W^{(r)}(s;m) = \sum_{\alpha \in A} \frac{m!}{\alpha_0!\alpha_1!\dots\alpha_r!} \operatorname{card} \overline{\mathcal{W}}_\alpha^{(r)}(s;m). \tag{25}$$

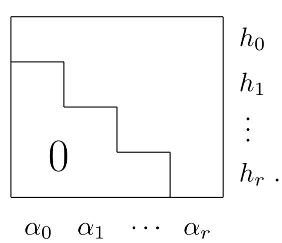
Все отношения $\sigma \in \overline{\mathcal{W}}_\alpha^{(r)}(s;m)$ обладают следующим общим свойством: при каждом $j \in R^+$ в подблоке $R \times h_j$ (см. (24)) блока $R \times M$ (блока $*$) расположены столбцы v_j. Следовательно, представление (20) для σ получает вид

(26) $\sigma =$



Зафиксируем индексы $i, j \in R^+$ такие, что $i > j$, и пару $(x, y) \in h_i \times h_j$. Столбцы блока $R \times h_i$ стоят правее столбцов блока $R \times h_j$, следовательно, $\sigma(i, x) = 1$, а $\sigma(i, y) = 0$. В силу (6) справедливо $\sigma(x, y) = \sigma(i, x)\,\sigma(x, y) \leqslant \sigma(i, y) = 0$. Таким образом, $\sigma(x, y) = 0$ для всех $(x, y) \in h_i \times h_j$, где $i > j$. Другими словами, у отношения $\sigma \in \overline{\mathcal{W}}_\alpha^{(r)}(s;m)$ все блоки $h_i \times h_j$, $i > j$, состоят целиком из нулей. Следовательно, блок $\odot$ в (26) получает вид

(27)



(В силу (24) справедливо $|\,h_j| = \alpha_j$, $j \in R^+$. При $\alpha_j = 0$ имеем $h_j = \varnothing$, то есть сответствующие горизонтальная и вертикальная полосы отсутствуют.)

Через B обозначим множество, состоящее из всех упорядоченных наборов $(b_1, \dots, b_\ell)$ натуральных чисел таких, что $b_1 + \ldots + b_\ell = m$, $\ell \leqslant 1 + r$. Определим отображение $\varphi : A \to B$, сопоставляющее мультииндексу $\alpha \in A$ набор $\varphi(\alpha) \in B$, состоящий из всех его ненулевых элементов, расположенных в том же порядке, что и в мультииндексе. Другими словами, $\varphi(\alpha)$ получается из α в результате удаления нулей (количество ненулевых элементов в α обозначим через $\ell(\alpha)$).

Мультииндексы $\alpha, \alpha' \in A$ называем эквивалентными, если $\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha')$. Понятно, что $\ell(\alpha) = \ell(\alpha')$ и $\operatorname{card} \overline{\mathcal{W}}^{(r)}_{\alpha}(s;m) = \operatorname{card} \overline{\mathcal{W}}^{(r)}_{\alpha'}(s;m)$, а если $[\,\alpha\,]$ — класс эквивалентности, порожденный мультииндексом α, то $\operatorname{card}\,[\,\alpha\,] = \binom{1+r}{\ell(\alpha)}$.

Легко понять, что для любого $b = (b_1, \dots, b_\ell) \in B$ существует единственный класс $[\,\alpha\,]$ такой, что $\varphi(\alpha') = b$ для всех $\alpha' \in [\,\alpha\,]$. Следовательно, в силу (25)

$$W^{(r)}(s;m) = \sum_{(b_1,\dots,b_\ell)\in B} \frac{m!}{b_1! \ldots b_\ell!} \binom{1+r}{\ell} w(s; b_1, \dots, b_\ell),$$

где через $w(s; b_1, \dots, b_\ell)$ обозначено общее значение $\operatorname{card} \overline{\mathcal{W}}^{(r)}_{\alpha'}(s;m)$, $\alpha' \in [\,\alpha\,]$.

Сравнивая представление (26) (в которое встроен блок (27)) с представлением (16), замечаем, что $w(s; b_1, \dots, b_\ell) = W(s; b_1, \dots, b_\ell)$. Так как $\binom{1+r}{\ell} = 0$ при $\ell > 1 + r$, то формула допускает представления

$$\begin{aligned}(28)\quad W^{(r)}(s;m) &= \sum_{b_1+\ldots+b_\ell=m} \frac{m!}{b_1! \ldots b_\ell!} \binom{1+r}{\ell} W(s; b_1 \dots, b_\ell)\\ &= \sum_{\ell=1}^{1+r} \binom{1+r}{\ell} \sum_{b_1+\ldots+b_\ell=m} \frac{m!}{b_1! \ldots b_\ell!} W(s; b_1 \dots, b_\ell).\end{aligned}$$

В силу (19) имеет место равенство

$$W(s; b_1, \dots, b_\ell)$$
$$= \sum_{\substack{q_1^1+\ldots+q_{t_1}^1 = b_1\\ \cdots\\ q_1^\ell+\ldots+q_{t_\ell}^\ell = b_\ell}} \left[\, \prod_{j=1}^{\ell} (-1)^{b_j - t_j} \frac{b_j!}{q_1^j! \ldots q_{t_j}^j!} \,\right] W(s, q_1^1, \dots, q_{t_1}^1, \dots, q_1^\ell, \dots, q_{t_\ell}^\ell).$$

Следовательно, формула (28) принимает вид

$$(29)\qquad W^{(r)}(s;m) = \sum_{\ell=1}^{1+r} \binom{1+r}{\ell} \sum_{q_1^1+\ldots+q_{t_1}^1 = b_1,\ \ldots\ ,\ q_1^\ell+\ldots+q_{t_\ell}^\ell = b_\ell:\ \ b_1+\ldots+b_\ell=m} F,$$

где $F \doteq (-1)^{m-t_1-\ldots-t_\ell} \dfrac{m!}{q_1^1! \ldots q_{t_1}^1! \ldots q_1^\ell! \ldots q_{t_\ell}^\ell!} W(s, q_1^1, \dots, q_{t_1}^1, \dots, q_1^\ell, \dots, q_{t_\ell}^\ell)$.

Обозначим внутреннюю сумму в (29) через Σ_ℓ. Множество индексов суммирования в Σ_ℓ представляет собой конкатенацию из ℓ подразбиений $(q_1^i, \dots, q_{t_i}^i)$, $i = 1, \dots, \ell$, разбиения $(b_1, \dots, b_\ell)$. (Справедливы равенства $b_1 + \ldots + b_\ell = m$ и $q_1^i + \ldots + q_{t_i}^i = b_i$.) Представим эту сумму по-иному. Зафиксируем произвольное разбиение $(p_1, \dots, p_k)$ числа m. Существует ровно $\binom{k-1}{\ell-1}$ способов представления данного разбиения в виде конкатенации из ℓ подразбиений, следовательно,

$$\Sigma_\ell = \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} \binom{k-1}{\ell-1} (-1)^{m-k} \frac{m!}{p_1!\ldots p_k!} W(s,p_1,\ldots,p_k),$$

$$W^{(r)}(s;m) = \sum_{\ell=1}^{1+r} \binom{1+r}{\ell} \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} \binom{k-1}{\ell-1} (-1)^{m-k} \frac{m!}{p_1!\ldots p_k!} W(s,p_1,\ldots,p_k)$$
$$= \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-1)^{m-k} \frac{m!}{p_1!\ldots p_k!} \Bigl[\, \sum_{\ell=1}^{1+r} \binom{1+r}{\ell}\binom{k-1}{\ell-1} \Bigr] W(s,p_1,\ldots,p_k).$$

В силу формулы свертки Вандермонда (см., например, [9, с. 17]) справедливо

$$\sum_{\ell=1}^{1+r}\binom{1+r}{\ell}\binom{k-1}{\ell-1} = \sum_{\ell=0}^{r}\binom{1+r}{1+\ell}\binom{k-1}{\ell} = \sum_{\ell=0}^{r}\binom{1+r}{r-\ell}\binom{k-1}{\ell} = \binom{k+r}{r},$$

что и доказывает формулу (23). □

7. Пять уравнений связи между числами $W(p_1,\ldots,p_k)$

Утверждения, фигурирующие в параграфе, мы формулируем в терминах союзных чисел. В этих терминах можно переписать и ранее доказанные формулы (4) и (5). Например, формула (4) в силу (9) и (23) допускает представление: $W(p+1;m) = W^{(1)}(p;m)$ (ср. с (22)), а формула (5) имеет вид

$$V(p,q,1;m) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^{\,(p-k)q} \sum_{l=0}^{q} \binom{q}{l} W(k,l;m).$$

Теорема 2. *Для натурального m имеет место равенство*

$$W(1,1;m) - W(2;m) = W^{(2)}(0;m). \tag{30}$$

Доказательство. Для отношений $\sigma \in \mathcal{W}^{(2)}(0;m)$, $\tau \in \mathcal{W}(2;m)$, $\varrho \in \mathcal{W}(1,1;m)$ (см. представления (20) и (13)) справедливо

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|}\hline \begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix} & \\ \hline 0 & \\ \hline\end{array}\,, \quad \tau = \begin{array}{|c|c|}\hline \begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix} & \\ \hline 0 & \\ \hline\end{array}\,, \quad \varrho = \begin{array}{|c|c|}\hline \begin{smallmatrix}1&\\0&1\end{smallmatrix} & \\ \hline 0 & \\ \hline\end{array}\,,$$

поэтому $\mathcal{W}^{(2)}(0;m) \cup \mathcal{W}(2;m) = \mathcal{W}(1,1;m)$, что и требовалось. □

Замечание 4. Согласно (9) и (23) формула (30) допускает представление:

$$\sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-1)^{m-k} \frac{m!}{p_1!\ldots p_k!} \bigl[\, W(1,1,p_1,\ldots,p_k) - W(2,p_1,\ldots,p_k)\,\bigr]$$
$$= \sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-1)^{m-k} \frac{m!}{p_1!\ldots p_k!} \binom{k+2}{2} W(p_1,\ldots,p_k),$$

где суммирования ведутся по всем разбиениям $(p_1,\ldots,p_k)$ числа m.

Теорема 3. *Для натурального m имеет место равенство*

$$\Psi(1,1;m) - W^{(1)}(2;m) = W^{(2)}(1;m), \tag{31}$$

где $\Psi(1,1;m) \doteq \displaystyle\sum_{p_1+\ldots+p_k=m} (-1)^{m-k} \frac{m!}{p_1!\ldots p_k!} (k+1)\, W(1,1,p_1,\ldots,p_k)$, *суммирование ведется по всем разбиениям* $(p_1,\ldots,p_k)$ *числа* m.

Доказательство. Числа $W^{(1)}(1,1;1)$, $W^{(1)}(2;1)$, $W^{(2)}(1;1)$ равны $14, 8, 6$ соответственно (см. формулы (31), (23) и порождающие их числа, представленные в [2]). Далее полагаем, что $m > 1$. Для отношений $\sigma \in \mathcal{W}^{(2)}(1;m)$ справедливо представление

$$\sigma = \begin{array}{|cc|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \hline & & 1 & \\ \cline{3-4} & 0 & & \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} R = \{\,1,2\,\} \\ S = \{\,3\,\} \\ M = \{\,4,\dots,3+m\,\} \end{array}$$

(см. (20)). Для любого $\alpha \subseteq M$ через $\mathcal{W}^{(2)}_{\alpha}(1;m)$ обозначим совокупность всех тех $\sigma \in \mathcal{W}^{(2)}(1;m)$, у которых $\sigma(3,j) = 0$ при $j \in \alpha$ и $\sigma(3,j) = 1$ при $j \in M\backslash\alpha$. Очевидно, если $\alpha, \beta \subseteq M$ таковы, что $|\,\alpha\,| = |\,\beta\,|$, то

$$\operatorname{card}\mathcal{W}^{(2)}_{\alpha}(1;m) = \operatorname{card}\mathcal{W}^{(2)}_{\beta}(1;m) = \operatorname{card}\mathcal{W}^{(2)}_{\gamma}(1;m),$$

где $\gamma \doteq \{\,4,\dots,3+q\,\} \subseteq M$, $q \doteq |\,\alpha\,| = |\,\beta\,| \in [\,0,m]$. Произвольное отношение σ из $\mathcal{W}^{(2)}_{\gamma}(1;m)$ таково, что $\sigma(3,j) = 0$ при $j \in \gamma$ и $\sigma(3,i) = 1$ при $i \in M\backslash\gamma$. Следовательно, в силу (6) для всех $(i,j) \in (M\backslash\gamma) \times \gamma$ имеет место цепочка

$$\sigma(i,j) = \sigma(3,i)\,\sigma(i,j) \leqslant \sigma(3,j) = 0,$$

поэтому $\sigma(i,j) = 0$ для всех $(i,j) \in (M\backslash\gamma) \times \gamma$. Таким образом, для элементов множества $\mathcal{W}^{(2)}_{\gamma}(1;m)$ справедливо представление

$$\sigma = \begin{array}{|cc|c|cc|cc|} \hline 1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ \hline & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cline{3-7} & & & & & & \\ \cline{4-5} & 0 & & & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \gamma \\ M\backslash\gamma\,, \end{array}$$

поэтому процедура удаления третьей строки и третьего столбца из отношения σ является биективным отображением из множества $\mathcal{W}^{(2)}_{\gamma}(1;m)$ на разность $\mathcal{W}(1,1;|\,\gamma\,|, m-|\,\gamma\,|) \setminus \mathcal{W}(2;|\,\gamma\,|, m-|\,\gamma\,|)$. Следовательно, справедливы равенства

$$(32)\quad W^{(2)}(1;m) = \sum_{q=0}^{m} \binom{m}{q} \operatorname{card}\bigl[\,\mathcal{W}(1,1;q,m-q) \setminus \mathcal{W}(2;q,m-q)\,\bigr]$$

$$= 2\,\bigl[\,W(1,1;m) - W(2;m)\,\bigr] + \sum_{q=1}^{m-1} \binom{m}{q} \bigl[\,W(1,1;q,m-q) - W(2;q,m-q)\,\bigr].$$

(Во втором равенстве воспользовались соглашением (14).)

Далее полагаем, что $\xi = (1,1)$ или $\xi = (2)$. В силу (19) имеет место равенство

$$W(\xi;q,m-q) = \sum_{\substack{q_1+\ldots+q_t = q \\ q'_1+\ldots+q'_s = m-q}} (-1)^{q-t}\,\frac{q!}{q_1!\ldots q_t!}\,(-1)^{m-q-s}\,\frac{(m-q)!}{q'_1!\ldots q'_s!}\,W,$$

где $W \doteq W(\xi, q_1,\dots,q_t, q'_1,\dots,q'_s)$. Следовательно,

$$\sum_{q=1}^{m-1} \binom{m}{q} W(\xi;q,m-q) = \sum_{q_1+\ldots+q_t=q,\ \ q'_1+\ldots+q'_s=m-q:\ \ q=1,\ldots,m-1} F,$$

где $F \doteq (-1)^{m-t-s}\,\dfrac{m!}{q_1!\ldots q_t! q'_1!\ldots q'_s!}\,W$. Множество индексов суммирования в правой части равенства представляет собой конкатенацию из двух подразбиений $(q_1,\ldots,q_t)$ и $(q'_1,\ldots,q'_s)$ разбиения $(q,m-q)$. (Справедливы равенства $q_1+\ldots+q_t = q$ и $q'_1+\ldots+q'_s = m-q$.) Представим эту сумму по-иному. Зафиксируем произвольное разбиение $(p_1,\ldots,p_k)$ числа m. Существует ровно $k-1$ способ представления данного разбиения в виде конкатенации из двух подразбиений, следовательно,

$$\sum_{q=1}^{m-1}\binom{m}{q} W(\xi;q,m-q) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=m}(k-1)(-1)^{m-k}\,\frac{m!}{p_1!\ldots p_k!}\,W(\xi,p_1,\ldots,p_k).$$

Таким образом, заменив сумму в правой части (32), получаем, что

$$W^{(2)}(1;m) = 2\,\big[\,W(1,1;m)-W(2;m)\,\big]$$
$$+\sum_{p_1+\ldots+p_k=m}(k-1)(-1)^{m-k}\,\frac{m!}{p_1!\ldots p_k!}\,\big[\,W(1,1,p_1,\ldots,p_k)-W(2,p_1,\ldots,p_k)\,\big].$$

Осталось исключить числа $W(1,1;m)$ и $W(2;m)$, применив формулу (9):

$$W^{(2)}(1;m)$$
$$=\sum_{p_1+\ldots+p_k=m}(k+1)(-1)^{m-k}\,\frac{m!}{p_1!\ldots p_k!}\,\big[\,W(1,1,p_1,\ldots,p_k)-W(2,p_1,\ldots,p_k)\,\big]$$
$$=\Psi(1,1;m)-W^{(1)}(2;m).\qquad\square$$

Замечание 5. Согласно (9) и (23) формула (31) допускает представление:

$$\sum_{p_1+\ldots+p_k=m}(-1)^{m-k}\,\frac{m!}{p_1!\ldots p_k!}\binom{k+1}{1}\big[\,W(1,1,p_1,\ldots,p_k)-W(2,p_1,\ldots,p_k)\,\big]$$
$$=\sum_{p_1+\ldots+p_k=m}(-1)^{m-k}\,\frac{m!}{p_1!\ldots p_k!}\binom{k+2}{2}W(1,p_1,\ldots,p_k),$$

где суммирования ведутся по всем разбиениям $(p_1,\ldots,p_k)$ числа m.

Теорема 4. *Для натурального m имеет место равенство*

$$(33)\quad W(1,1,1;m)-W(1,2;m)-W(2,1;m)+W(3;m)$$
$$=W^{(3)}(0;m)-W^{(2)}(1;m).$$

Доказательство. Имеет место цепочка равенств (смысл множеств понятен):

$$\mathcal{W}(1,1,1)=\left\{\begin{smallmatrix}1&&\\0&1&\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}=\left\{\begin{smallmatrix}1&0&\\0&1&\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{smallmatrix}1&1&\\0&1&\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}=\left\{\begin{smallmatrix}1&0&\\0&1&\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{smallmatrix}1&1&\\0&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{smallmatrix}1&1&\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}.$$

В предпоследнем множестве воспользуемся свойством транзитивности, а последнее представим в виде разности множеств:

$$\left\{\begin{smallmatrix}1&&\\0&1&\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}=\left\{\begin{smallmatrix}1&0&\\0&1&\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{smallmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{smallmatrix}1&&\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}\setminus\left\{\begin{smallmatrix}1&0&\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}.$$

В правом верхнем углу последнего множества стоит либо 0, либо 1, поэтому

$$W(1,1,1;m)=W(2,1;m)+W^{(3)}(0;m)+W(1,2;m)-W(3;m)-W^{(2)}(1;m)$$

(см. представления (13) и (20)). $\square$

Замечание 6. Согласно (9) и (23) формула (33) допускает представление:

$$\begin{aligned}\sum_{p_1+\ldots+p_k=m}&(-1)^{m-k}\,\frac{m!}{p_1!\ldots p_k!}\times\big[\,W(1,1,1,p_1,\ldots,p_k)\\&\quad-W(1,2,p_1,\ldots,p_k)-W(2,1,p_1,\ldots,p_k)+W(3,p_1,\ldots,p_k)\,\big]\\&=\sum_{p_1+\ldots+p_k=m}(-1)^{m-k}\,\frac{m!}{p_1!\ldots p_k!}\binom{k+3}{3}W(p_1,\ldots,p_k)\\&\quad-\sum_{p_1+\ldots+p_k=m}(-1)^{m-k}\,\frac{m!}{p_1!\ldots p_k!}\binom{k+2}{2}W(1,p_1,\ldots,p_k),\end{aligned}$$

где суммирования ведутся по всем разбиениям $(p_1,\ldots,p_k)$ числа m.

Теорема 5. *Для натурального m имеет место равенство*

$$\begin{aligned}(34)\quad V(1,1,2,1;m)-V(2,2,1;m)&=V(1,2,1;m)+3V(3,1;m)+2V(2,1;m)\\&+W(1,1,2;m)-W(2,2;m)+2W(1,1,1;m)-2W(2,1;m)\\&+3W(1,1;m)-3W(2;m)+2W^{(2)}(1;m).\end{aligned}$$

Доказательство. Для отношений σ из разности $\Delta\doteq\mathcal{V}(1,1,2,1;m)\setminus\mathcal{V}(2,2,1;m)$ имеет место представление (см. (10)):

$$(35)\qquad \sigma=\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 1&1&&&&\\ 0&1&&&&\\ \hline &&1&0&&\\ &&0&1&&\\ \hline &&&&1&1\ldots1\\ \hline &0&&&& \end{array}\right]\qquad \begin{aligned}R&=\{\,1,2\,\}\\ S&=\{\,3,4\,\}\\ T&=\{\,5\,\}\\ M&=\{\,6,\ldots,5+m\,\}\,.\end{aligned}$$

Множество Δ разбивается на 2 класса: в класс Δ_ℓ, $\ell=0,1$, включаем все те $\sigma\in\Delta$, у которых $\sigma(1,5)=\ell$. Для любого $\sigma\in\Delta_0$ справедливо $\sigma(1,2)=1$ и $\sigma(1,5)=0$, а в силу (6) имеем $\sigma(2,5)=\sigma(1,2)\,\sigma(2,5)\leqslant\sigma(1,5)=0$, поэтому $\sigma(2,5)=0$. Следовательно, в блоке $R\times T$ оба элемента равны нулю.

Множество Δ_0 разбивается на 4 класса в зависимости от того, какой из четырех столбцов $\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\big|\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\big|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\big|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ расположен в блоке $S\times T$. Обозначим эти классы через Δ_0^0, Δ_0^1, Δ_0^2, Δ_0^3 соответственно. Понятно, что $\operatorname{card}\Delta_0^1=\operatorname{card}\Delta_0^2$. Для отношений $\sigma\in\Delta_0^0$, $\tau\in\Delta_0^1$, $\varrho\in\Delta_0^3$ справедливы представления:

$$\sigma=\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 1&1&&&0&\\ 0&1&&&0&\\ \hline &&1&0&0&\\ &&0&1&0&\\ \hline &&&&1&1\ldots1\\ \hline &0&&&& \end{array}\right],\quad \tau=\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 1&1&&0&0&\\ 0&1&&0&0&\\ \hline &&1&0&0&\\ &&0&1&1&1\ldots1\\ \hline &&&&1&1\ldots1\\ \hline &0&&&& \end{array}\right],\quad \varrho=\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 1&1&0&0&0&\\ 0&1&0&0&0&\\ \hline &&1&0&1&1\ldots1\\ &&0&1&1&1\ldots1\\ \hline &&&&1&1\ldots1\\ \hline &0&&&& \end{array}\right].$$

Дадим необходимые пояснения для представлений τ и ϱ. Так как $\tau(4,5)=1$ и $\tau(5,j)=1$ для всех $j\in M$, то в силу (6) имеем $1=\tau(4,5)\,\tau(5,j)\leqslant\tau(4,j)$, поэтому $\tau(4,j)=1$ для всех $j\in M$. Аналогично $\varrho(3,j)=1$ и $\varrho(4,j)=1$ для всех $j\in M$. Так как $\tau(4,5)=1$ и $\tau(i,5)=0$ для $i\in R$, то в силу (6) имеем $\tau(i,4)=\tau(i,4)\,\tau(4,5)\leqslant\tau(i,5)=0$, поэтому $\tau(i,4)=0$ для $i\in R$. Аналогично $\varrho(i,j)=0$ для всех $(i,j)\in R\times S$.

Легко заметить, что процедура удаления пятой строки и пятого столбца из отношения σ является биективным отображением из множества Δ_0^0 на множество $\mathcal{W}(1,1,2;m)\setminus\mathcal{W}(2,2;m)$. Процедура удаления строк и столбцов с номерами 4 и 5 из отношения τ является биективным отображением из множества Δ_0^1 на множество $\mathcal{W}(1,1,1;m)\setminus\mathcal{W}(2,1;m)$. Наконец, процедура удаления строк и столбцов с номерами 3–5 из отношения ϱ является биективным отображением из множества Δ_0^3 на множество $\mathcal{W}(1,1;m)\setminus\mathcal{W}(2;m)$. Следовательно,

$$\begin{gathered}
\operatorname{card}\Delta_0^0 = W(1,1,2;m) - W(2,2;m),\\
\operatorname{card}\Delta_0^1 = \operatorname{card}\Delta_0^2 = W(1,1,1;m) - W(2,1;m),\\
\operatorname{card}\Delta_0^3 = W(1,1;m) - W(2;m).
\end{gathered} \tag{36}$$

Для любого $\sigma\in\Delta_1$ справедливо $\sigma(1,5)=1$ и $\sigma(5,j)=1$, $j\in M$, поэтому в силу транзитивности σ имеем $\sigma(1,j)=1$ для всех $j\in M$.

Множество Δ_1 разбивается на 4 класса в зависимости от того, какая из четырех строк $0\,0$, $0\,1$, $1\,0$, $1\,1$ расположена в первой строке блока $R\times S$. Обозначим эти классы через Δ_1^0, Δ_1^1, Δ_1^2, Δ_1^3 соответственно. Очевидно, $\operatorname{card}\Delta_1^1=\operatorname{card}\Delta_1^2$. Для отношений $\sigma\in\Delta_1^0$, $\tau\in\Delta_1^2$, $\varrho\in\Delta_1^3$ справедливы представления:

$$\sigma=\begin{array}{|cc|cc|c|c|}\hline
1&1&0&0&1&1\ldots1\\
0&1&0&0&&\\ \hline
&&1&0&&\\
&&0&1&&\\ \cline{3-6}
&&&&1&1\ldots1\\ \cline{5-6}
\multicolumn{5}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}\,,\quad
\tau=\begin{array}{|cc|cc|c|c|}\hline
1&1&1&0&1&1\ldots1\\
0&1&&0&&\\ \hline
&&1&0&&\\
&&0&1&&\\ \cline{3-6}
&&&&1&1\ldots1\\ \cline{5-6}
\multicolumn{5}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}\,,\quad
\varrho=\begin{array}{|cc|cc|c|c|}\hline
1&1&1&1&1&1\ldots1\\
0&1&&&&\\ \hline
&&1&0&&\\
&&0&1&&\\ \cline{3-6}
&&&&1&1\ldots1\\ \cline{5-6}
\multicolumn{5}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}\,.$$

Дадим необходимые пояснения для представлений σ и τ. Так как $\sigma(1,2)=1$ и $\sigma(1,j)=0$, $j=3,4$, то в силу (6) имеем $\sigma(2,j)=\sigma(1,2)\,\sigma(2,j)\leqslant\sigma(1,j)=0$, поэтому $\sigma(2,j)=0$, $j=3,4$. Так как $\tau(1,2)=1$ и $\tau(1,4)=0$, то в силу (6) имеем $\tau(2,4)=\tau(1,2)\,\tau(2,4)\leqslant\tau(1,4)=0$, поэтому $\tau(2,4)=0$.

Процедуры удаления первой строки и первого столбца из отношений σ, τ и ϱ порождают три биекции. В первом случае множеству Δ_1^0 соответствует множество $\mathcal{V}(3,1;m)$ (поэтому $\operatorname{card}\Delta_1^0=V(3,1;m)$), в третьем случае множеству Δ_1^3 соответствует множество $\mathcal{V}(1,2,1;m)$ (поэтому $\operatorname{card}\Delta_1^3=V(1,2,1;m)$), а множество Δ_1^2 равномощно множеству D отношений вида

$$\begin{array}{|ccc|c|c|}\hline
1&&0&&\\
0&1&0&&\\
0&0&1&&\\ \hline
&&&1&1\ldots1\\ \cline{4-5}
\multicolumn{4}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|ccc|c|c|}\hline
1&0&0&&\\
0&1&0&&\\
0&0&1&&\\ \hline
&&&1&1\ldots1\\ \cline{4-5}
\multicolumn{4}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}
\cup
\begin{array}{|ccc|c|c|}\hline
1&1&0&&\\
0&1&0&&\\
0&0&1&&\\ \hline
&&&1&1\ldots1\\ \cline{4-5}
\multicolumn{4}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}\,.$$

Применим компактную запись $D=L\cup K$. Понятно, что $L=\mathcal{V}(3,1;m)$, поэтому $\operatorname{card}L=V(3,1;m)$. Имеет место дизъюнктное объединение $K=K_0\cup K_1$:

$$\begin{array}{|ccc|c|c|}\hline
1&1&0&&\\
0&1&0&&\\
0&0&1&&\\ \hline
&&&1&1\ldots1\\ \cline{4-5}
\multicolumn{4}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{|ccc|c|c|}\hline
1&1&0&0&\\
0&1&0&0&\\
0&0&1&&\\ \hline
&&&1&1\ldots1\\ \cline{4-5}
\multicolumn{4}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}
\cup
\begin{array}{|ccc|c|c|}\hline
1&1&0&1&1\ldots1\\
0&1&0&&\\
0&0&1&&\\ \hline
&&&1&1\ldots1\\ \cline{4-5}
\multicolumn{4}{|c|}{0}&\\ \hline
\end{array}\,.$$

(Совокупность K разбита на 2 класса: в одном классе $\tau(1,4)=0$, в другом $\tau(1,4)=1$.) Дадим необходимые пояснения для представлений элементов этих классов. Для любого $\tau\in K_0$ справедливо $\tau(1,2)=1$ и $\tau(1,4)=0$, поэтому из транзитивности τ следует $\tau(2,4)=0$. Для любого $\tau\in K_1$ справедливо $\tau(1,4)=1$ и $\tau(4,j)=1$, $j\in M$, поэтому из транзитивности τ следует $\tau(1,j)=1$ для всех $j\in M$. Легко заметить, что множество K_1 равномощно множеству $\mathcal{V}(2,1;m)$, поэтому $\operatorname{card} K_1=V(2,1;m)$. Семейство K_0 разбивается на 2 класса $K_0=K_0^0\cup K_0^1$ (в одном классе $\tau(3,4)=0$, в другом $\tau(3,4)=1$):

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1&1&0&0& \\ 0&1&0&0& \\ 0&0&1& & \\ \hline &&&1&1\ldots1 \\ &0&&& \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1&1&0&0& \\ 0&1&0&0& \\ 0&0&1&0& \\ \hline &&&1&1\ldots1 \\ &0&&& \end{array}\right] \cup \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1&1&0&0& \\ 0&1&0&0& \\ 0&0&1&1&1\ldots1 \\ \hline &&&1&1\ldots1 \\ &0&&& \end{array}\right].$$

(Так как $\tau(3,4)=1$ и $\tau(4,j)=1$, $j\in M$, для любого $\tau\in K_0^1$, то в силу транзитивности τ следует, что $\tau(3,j)=1$ для всех $j\in M$.) Множества K_0^0 и $\mathcal{W}^{(2)}(1;m)$ равномощны (биекция устанавливается путем удаления строки и столбца с номером 4). Множества K_0^1 и $\mathcal{W}(1,1;m)\backslash\mathcal{W}(2;m)$ равномощны (биекция устанавливается путем удаления строк и столбцов с номерами 3 и 4). Следовательно, $\operatorname{card} K_0=W^{(2)}(1;m)+W(1,1;m)-W(2;m)$, поэтому

$$\operatorname{card}\Delta_1^1=\operatorname{card}\Delta_1^2=V(3,1;m)+W^{(2)}(1;m)+W(1,1;m)-W(2;m)+V(2,1;m).$$

(Напомним: $\operatorname{card}\Delta_1^2=\operatorname{card} D$, $D=L\cup K$, $K=K_0\cup K_1$, $K_0=K_0^0\cup K_0^1$.) Ссылка на полученные выше равенства $\operatorname{card}\Delta_1^0=V(3,1;m)$ и $\operatorname{card}\Delta_1^3=V(1,2,1;m)$, на формулы (36) и равенства

$$V(1,1,2,1;m)-V(2,2,1;m)=\operatorname{card}\Delta=\sum_{\ell=0,1,\ k=0,1,2,3}\operatorname{card}\Delta_\ell^k$$

завершает доказательство теоремы. □

Замечание 7. Формула (34) может быть преобразована к виду, в котором фигурируют только числа $W(p_1,\ldots,p_k)$. Для этого необходимо сначала исключить числа $V(p_1,\ldots,p_k;m)$ в соответствии с формулой (11), а затем исключить числа $W(p_1,\ldots,p_k;n)$ в соответствии с формулой (9). Для исключения чисел $W^{(2)}(1;m)$ применяем формулу (23). Замечание относится и к формуле (37).

Теорема 6. *Для натурального m имеет место равенство*

$$\begin{aligned}(37)\quad V(1,1,1,1,1;m)-V(2,1,1,1;m)&=V(1,1,1,1;m)+V(2,1,1;m)\\ &+2V(3,1;m)+2V(2,1;m)+W(1,1,1,1;m)-W(2,1,1;m)\\ +3W(1,1,1;m)-3W(2,1;m)&+4W(1,1;m)-4W(2;m)+2W^{(2)}(1;m).\end{aligned}$$

Доказательство. Для всех σ из разности $\Omega\doteq\mathcal{V}(1,1,1,1,1;m)\setminus\mathcal{V}(2,1,1,1;m)$ имеет место представление (см. (10)):

$$\sigma=\left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 1&1&&&& \\ 0&1&&&& \\ \hline &&1&&& \\ &&0&1&& \\ \hline &&&&1&1\ldots1 \\ &0&&&& \end{array}\right]\qquad \begin{aligned}&R=\{1,2\}\\ &S=\{3,4\}\\ &T=\{5\}\\ &M=\{6,\ldots,5+m\}.\end{aligned}$$

Семейство Ω разбивается на 2 класса $\Omega = \Delta \cup \Gamma$ (в одном классе $\tau(3,4)=0$, в другом $\tau(3,4)=1$):

$$
\left[\begin{array}{cc|cc|c|c}
1&1&&&&\\
0&1&&&&\\ \hline
&&1&&&\\
&&0&1&&\\ \hline
&&&&1&1\ldots1\\ \hline
&0&&&&\\
&&&&&
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{cc|cc|c|c}
1&1&&&&\\
0&1&&&&\\ \hline
&&1&0&&\\
&&0&1&&\\ \hline
&&&&1&1\ldots1\\ \hline
&0&&&&\\
&&&&&
\end{array}\right]
\cup
\left[\begin{array}{cc|cc|c|c}
1&1&&&&\\
0&1&&&&\\ \hline
&&1&1&&\\
&&0&1&&\\ \hline
&&&&1&1\ldots1\\ \hline
&0&&&&\\
&&&&&
\end{array}\right]. \tag{38}
$$

Множество Γ разбивается на 2 класса: в класс Γ_ℓ, $\ell = 0,1$, включаем все те $\sigma \in \Gamma$, у которых $\sigma(1,5) = \ell$. Для любого $\sigma \in \Gamma_0$ справедливо $\sigma(1,2) = 1$ и $\sigma(1,5) = 0$, а в силу (6) имеем $\sigma(2,5) = \sigma(1,2)\,\sigma(2,5) \leqslant \sigma(1,5) = 0$, поэтому $\sigma(2,5) = 0$. Следовательно, в блоке $R \times T$ оба элемента равны нулю.

Множество Γ_0 разбивается на 3 класса в зависимости от того, какой из трех столбцов $\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$ расположен в блоке $S \times T$. (Наличие столбца $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ нарушило бы транзитивность отношения.) Обозначим классы через Γ_0^0, Γ_0^1, Γ_0^2 соответственно. Для отношений $\sigma \in \Gamma_0^0$, $\tau \in \Gamma_0^1$, $\varrho \in \Gamma_0^2$ справедливы представления:

$$
\sigma = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c}
1&1&&&0&\\
0&1&&&0&\\ \hline
&&1&1&0&\\
&&0&1&0&\\ \hline
&&&&1&1\ldots1\\ \hline
&0&&&&\\
&&&&&
\end{array}\right],
\quad
\tau = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c}
1&1&0&&0&\\
0&1&0&&0&\\ \hline
&&1&1&1&1\ldots1\\
&&0&1&0&\\ \hline
&&&&1&1\ldots1\\ \hline
&0&&&&\\
&&&&&
\end{array}\right],
\quad
\varrho = \left[\begin{array}{cc|cc|c|c}
1&1&0&0&0&\\
0&1&0&0&0&\\ \hline
&&1&1&1&1\ldots1\\
&&0&1&1&1\ldots1\\ \hline
&&&&1&1\ldots1\\ \hline
&0&&&&\\
&&&&&
\end{array}\right].
$$

Дадим необходимые пояснения для представлений τ и ϱ. Так как $\tau(3,5) = 1$ и $\tau(5,j) = 1$ для всех $j \in M$, то в силу (6) имеем $1 = \tau(3,5)\,\tau(5,j) \leqslant \tau(3,j)$, поэтому $\tau(3,j) = 1$ для всех $j \in M$. Аналогично $\varrho(3,j) = 1$ и $\varrho(4,j) = 1$ для всех $j \in M$. Так как $\tau(3,5) = 1$ и $\tau(i,5) = 0$ для $i \in R$, то в силу (6) имеем $\tau(i,3) = \tau(i,3)\,\tau(3,5) \leqslant \tau(i,5) = 0$, поэтому $\tau(i,3) = 0$ для $i \in R$. Аналогично $\varrho(i,j) = 0$ для всех $(i,j) \in R \times S$.

Процедура удаления строк и столбцов с номерами 3 и 5 из отношения τ является биекцией из множества Γ_0^1 на множество $\mathcal{W}(1,1,1;m) \setminus \mathcal{W}(2,1;m)$, а процедура удаления строк и столбцов с номерами 3–5 из отношения ϱ является биекцией из множества Γ_0^2 на множество $\mathcal{W}(1,1;m) \setminus \mathcal{W}(2;m)$. Множества Γ_0^0 и

$$\big[\,\mathcal{W}(1,1,1,1;m) \setminus \mathcal{W}(2,1,1;m)\,\big] \setminus \big[\,\mathcal{W}(1,1,2;m) \setminus \mathcal{W}(2,2;m)\,\big]$$

равномощны (достаточно из отношения σ удалить пятую строку и пятый столбец). Следовательно,

$$
\begin{gathered}
\operatorname{card}\Gamma_0^0 = W(1,1,1,1;m) - W(2,1,1;m) - W(1,1,2;m) + W(2,2;m),\\
\operatorname{card}\Gamma_0^1 = W(1,1,1;m) - W(2,1;m),\\
\operatorname{card}\Gamma_0^2 = W(1,1;m) - W(2;m).
\end{gathered} \tag{39}
$$

Для любого $\sigma \in \Gamma_1$ справедливо $\sigma(1,5) = 1$ и $\sigma(5,j) = 1$, $j \in M$, поэтому в силу транзитивности σ имеем $\sigma(1,j) = 1$ для всех $j \in M$.

Множество Γ_1 разбивается на 3 класса Γ_1^0, Γ_1^1, Γ_1^2 в зависимости от того, какая из трех строк $0\,0$, $0\,1$, $1\,1$ расположена в первой строке блока $R \times S$. (Наличие строки $1\,0$ нарушило бы транзитивность отношения.) Для отношений $\sigma \in \Gamma_1^0$, $\tau \in \Gamma_1^1$, $\varrho \in \Gamma_1^2$ справедливы представления:

$$\sigma = \begin{array}{|cc|cc|c|c|}\hline 1&1&0&0&1&1\dots1\\ 0&1&0&0&&\\ \hline &&1&1&&\\ &&0&1&&\\ \cline{3-6} &&&&1&1\dots1\\ &0&&&&\\ \cline{6-6} &&&&&\\ \hline\end{array}\,, \quad \tau = \begin{array}{|cc|cc|c|c|}\hline 1&1&0&1&1&1\dots1\\ 0&1&0&&&\\ \hline &&1&1&&\\ &&0&1&&\\ \cline{3-6} &&&&1&1\dots1\\ &0&&&&\\ \cline{6-6} &&&&&\\ \hline\end{array}\,, \quad \varrho = \begin{array}{|cc|cc|c|c|}\hline 1&1&1&1&1&1\dots1\\ 0&1&&&&\\ \hline &&1&1&&\\ &&0&1&&\\ \cline{3-6} &&&&1&1\dots1\\ &0&&&&\\ \cline{6-6} &&&&&\\ \hline\end{array}\,.$$

Дадим необходимые пояснения для представлений σ и τ. Так как $\sigma(1,2)=1$ и $\sigma(1,j)=0$, $j=3,4$, то в силу (6) имеем $\sigma(2,j)=\sigma(1,2)\,\sigma(2,j)\leqslant\sigma(1,j)=0$, поэтому $\sigma(2,j)=0$, $j=3,4$. Так как $\tau(1,2)=1$ и $\tau(1,3)=0$, то в силу (6) имеем $\tau(2,3)=\tau(1,2)\,\tau(2,3)\leqslant\tau(1,3)=0$, поэтому $\tau(2,3)=0$.

Далее считаем, что в отношениях $\sigma\in\Gamma_1^0$, $\tau\in\Gamma_1^1$, $\varrho\in\Gamma_1^2$ первая строка и первый столбец отсутствуют (полагаем $\sigma\in\overline{\Gamma}_1^0$, $\tau\in\overline{\Gamma}_1^1$, $\varrho\in\overline{\Gamma}_1^2$). Понятно, что

$$\operatorname{card}\Gamma_1^2=\operatorname{card}\overline{\Gamma}_1^2=V(1,1,1,1;m)-V(1,2,1;m). \tag{40}$$

Имеет место равенство (смысл множеств понятен):

$$\left\{\begin{smallmatrix}1&0&\\0&1&\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}=\left\{\begin{smallmatrix}1&0&\\0&1&1\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}\cup\left\{\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right\}.$$

Следовательно, $\mathcal{V}(2,1,1;m)=\overline{\Gamma}_1^1\cup\overline{\Gamma}_1^0\cup\mathcal{V}(3,1;m)$, поэтому

$$\operatorname{card}\Gamma_1^0+\operatorname{card}\Gamma_1^1=V(2,1,1;m)-V(3,1;m). \tag{41}$$

Очевидно, $\Delta=\mathcal{V}(1,1,2,1;m)\setminus\mathcal{V}(2,2,1;m)$ (ср. (38) и (35)), следовательно, числа $\operatorname{card}\Delta$ и правая часть формулы (34) совпадают. Ссылка на формулы (39), (40), (41) и равенства

$$V(1,1,1,1,1;m)-V(2,1,1,1;m)=\operatorname{card}\Omega=\operatorname{card}\Delta+\sum_{\ell=0,1,\ k=0,1,2}\operatorname{card}\Gamma_\ell^k$$

завершает доказательство теоремы □

8. Значения $W(p_1,\dots,p_k)$ при $p_1+\ldots+p_k\leqslant 8$

В [2, 3] представлены все числа $W(p_1,\dots,p_k)$ такие, что $p_1+\ldots+p_k\leqslant 7$. Их общее количество — 127. Они получены последовательно по $i=2,\dots,7$: на каждом шаге решается система (3)–(5) линейных уравнений относительно 2^{i-1} величин $W(p_1,\dots,p_k)$, $p_1+\ldots+p_k=i$. При $i=8$ количество неизвестных чисел $W(p_1,\dots,p_k)$ равно 128. В [3] показано, что в этом случае матрица системы (3)–(5) имеет ранг 123. Проект настоящей работы предполагал, что пять новых формул (30), (31), (33), (34), (37) увеличат ранг до 128. К сожалению, по итогам работы ранг не дотянул до этой отметки, он равен 127.

Разобъем совокупность всех нетривиальных разбиений $(p_1,\dots,p_k)$ (то есть таких, что $k>1$) на классы $[\,p_1,\dots,p_k\,]$: вместе с разбиением $(p_1,\dots,p_k)$ включаем в данный класс все разбиения $(p_{\pi(1)},\dots,p_{\pi(k)})$, $\pi\in D_k$, где D_k — группа диэдра, порожденная подстановками $\left(\begin{smallmatrix}1&2&\dots&k{-}1&k\\2&3&\dots&k&1\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}1&2&\dots&k{-}1&k\\k&k{-}1&\dots&2&1\end{smallmatrix}\right)$. Тривиальному разбиению (p_1) ставим в соответствие класс $[\,p_1\,]$. В силу формулы (3) все числа $W(q_1,\dots,q_k)$ такие, что $(q_1,\dots,q_k)\in[\,p_1,\dots,p_k\,]$, равны между собой; это общее значение обозначим через $W[\,p_1,\dots,p_k\,]$.

При $n=8$ имеется 29 классов (содержащих 128 разбиений). Относим их к двум семействам. Для переменных первого семейства в [3] получены числовые значения. Другими словами, известны 13 чисел; перечислим их:

$$A \doteq W[\,8\,], \qquad B \doteq W[\,7,1\,], \qquad C \doteq W[\,6,2\,], \qquad D \doteq W[\,6,1,1\,],$$
$$E \doteq W[\,5,3\,], \qquad F \doteq W[\,5,2,1\,], \qquad G \doteq W[\,5,1,1,1\,],$$
$$\Gamma \doteq W[\,4,4\,], \qquad H \doteq W[\,4,3,1\,], \qquad K \doteq W[\,4,2,2\,],$$
$$L \doteq W[\,4,2,1,1\,], \qquad M \doteq W[\,4,1,2,1\,], \qquad N \doteq W[\,4,1,1,1,1\,].$$

Для 16-ти переменных второго семейства:

$$\Delta \doteq W[\,3,3,2\,], \qquad \Phi \doteq W[\,3,3,1,1\,], \qquad P \doteq W[\,3,2,2,1\,], \qquad \Pi \doteq W[\,3,2,1,2\,],$$
$$Q \doteq W[\,3,2,1,1,1\,], \qquad \Psi \doteq W[\,3,1,3,1\,], \qquad R \doteq W[\,3,1,2,1,1\,],$$
$$S \doteq W[\,3,1,1,1,1,1\,], \qquad \Omega \doteq W[\,2,2,2,2\,], \qquad U \doteq W[\,2,2,2,1,1\,],$$
$$V \doteq W[\,2,2,1,2,1\,], \qquad X \doteq W[\,2,2,1,1,1,1\,], \qquad Y \doteq W[\,2,1,2,1,1,1\,],$$
$$Z \doteq W[\,2,1,1,2,1,1\,], \qquad T \doteq W[\,2,1,1,1,1,1,1\,], \qquad \Sigma \doteq W[\,1,1,1,1,1,1,1,1\,]$$

в [3] получены параметрические формулы (через 5 параметров), а именно,

$$\Delta = \alpha, \qquad \Phi = \alpha + 105753, \tag{42}$$
$$3P = 4\alpha + 512948, \qquad 3\Pi = 4\alpha + 509570, \qquad 2Q = 3\alpha + 616693,$$
$$\Psi = \gamma, \qquad 6R = 5\alpha + 4\gamma + 1431627, \qquad 6S = 7\alpha + 3\gamma + 2742779,$$
$$X = \lambda, \qquad Y = \mu, \qquad Z = \nu,$$
$$9\Omega = -40\alpha + 8\gamma + 36\lambda - 18\mu - 9826996,$$
$$9U = -8\alpha + 4\gamma + 18\lambda - 9\mu - 2466203, \qquad 9V = -4\gamma + 9\mu - 1626329,$$
$$36T = -\alpha - 4\gamma + 27\mu + 18\nu + 6540755,$$
$$36\Sigma = -12\alpha - 16\gamma - 18\lambda + 45\mu + 36\nu + 12586216.$$

Детальное наполнение каждого из 29-ти классов представлено в [3]. Например,

$$[\,3,2,2,1\,] = \{\,(3,2,2,1),(3,1,2,2),(2,3,1,2),(2,2,3,1),$$
$$(2,2,1,3),(2,1,3,2),(1,3,2,2),(1,2,2,3)\,\}.$$

Полагая $m=6$ в формулах (30) и (31), $m=5$ в формуле (33), $m=3$ в формулах (34) и (37), получаем (линейно независимые) уравнения:

$$720\Sigma - 2520T + 540Z + 1080Y + 1260X - 540V - 630U + 90\Omega$$
$$+ 480S - 360R - 480Q + 120\Pi + 240P + 20\Phi - 20\Delta$$
$$- 90N + 30M + 90L - 30K + 12G - 12F - D + C = 13307061,$$

$$2520\Sigma - 7920T + 1530Z + 3060Y + 3510X - 1350V - 1530U + 180\Omega$$
$$+ 1200S - 840R - 1080Q + 240\Pi + 480P + 30\Phi - 30\Delta$$
$$- 180N + 60M + 165L - 45K + 18G - 18F - D + C = 119031066,$$

$$120\Sigma - 480T + 120Z + 270Y + 180X - 120V - 60U$$
$$+ 180S - 200R - 180Q + 50\Pi + 80P + 20\Psi + 40\Phi - 20\Delta$$
$$- 10N + 10M + 10L - 10H + G - 2F + E = -2098832,$$

$$6T - 3Z - 3Y - 12X + 3V + 12U - 3\Omega + R + 3Q - 4P - L + K = 75754,$$

$$6\Sigma - 18T + 6Z + 3Y + 6X - 3U + 4S - 3R - Q - N + L = 106926.$$

(Вывод уравнений требует определенных усилий рутинного характера.)

Подставив в уравнения правые части формул (42) и известные числа из первого семейства, выводим уравнения связи между параметрами:

$$\alpha = 353347, \qquad 2\alpha + 12\gamma + 9\lambda - 9\mu - 9\nu = -8035696,$$
$$2\alpha - \gamma = 245458, \qquad 15\alpha + 8\gamma - 9\mu = -5266699,$$
$$11\alpha - 12\gamma - 18\lambda + 18\nu = -1607155.$$

Общее решение этой системы допускает однопараметрическое представление:

$$\alpha = 353347, \qquad \gamma = 461236,$$
$$\lambda = \omega + 1355127, \qquad \mu = 1584088, \qquad \nu = \omega + 1357397,$$

а формулы (42) принимают заключительный (в рамках работы) вид:

$$\Delta = 353347, \qquad \Phi = 459100, \qquad \Psi = 461236, \qquad P = 642112,$$
$$\Pi = 640986, \qquad Q = 838367, \qquad R = 840551, \qquad S = 1099986,$$
$$V = 1198391, \qquad Y = 1584088,$$
$$\Omega = 4\omega, \qquad U = 2\omega + 743051, \qquad X = \omega + 1355127,$$
$$Z = \omega + 1357397, \qquad 2T = \omega + 3974777, \qquad 2\Sigma = \omega + 5373569.$$

9. Заключение

Компьютерные вычисления (см. комментарии к формулам (37) в [3]) приводят к равенству $\omega = 227375$, что позволяет вычислить по формуле (2) число $T_0(9) = 44511042511$. Отметим наличие иных формул, содержащих числа $W(p_1, \dots, p_k)$ (например, формулы (4)–(7) в [3]; к сожалению, они не улучшают ранг матрицы системы при $n = 8$). Мы допускаем наличие новых, потенциально более эффективных, уравнений связи между величинами $W(p_1, \dots, p_k)$.

Ссылки на современные публикации в рамках тематики см. в [3].

References

[1] V.I. Rodionov, *On enumeration of posets defined on finite set*, Siberian electr. Math. Reports, **13** (2016), 318–330. MR3506895, Zbl 1341.05127

[2] V.I. Rodionov, *On recurrence relation in the problem of enumeration of finite posets*, Siberian electr. Math. Reports, **14** (2017), 98–111. MR3610858, Zbl 1357.05061

[3] V.I. Rodionov, *On recursion relations in the problem of enumeration of posets*, Siberian electr. Math. Reports, **17** (2020), 190–207. Zbl 07180867

[4] Kh.Sh. Al' Dzhabri, V.I. Rodionov, *On support sets of acyclic and transitive digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **27**:2 (2017), 153–161. MR3678096, Zbl 1390.05080

[5] G. Brinkmann, B.D. McKay, *Posets on up to 16 points*, Order, **19**:2 (2002), 147–179. MR 2134160, Zbl 1006.06003

[6] Kh.Sh. Al' Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of partial orders*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **4** (2013), 3–12. Zbl 1299.05169

[7] Kh.Sh. Al' Dzhabri, *The graph of reflexive-transitive relations and the graph of finite topologies*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **25**:1 (2015), 3–11. Zbl 1332.05072

[8] Kh.Sh. Al' Dzhabri, V.I. Rodionov, *The graph of acyclic digraphs*, Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki, **25**:4 (2015), 441–452. Zbl 1364.05038

[9] J. Riordan, *Combinatorial identities*, Nauka, Moscow, 1982. MR695009, Zbl 0517.05006

Vitalii Ivanovich Rodionov
Udmurt State University,
ul. Universitetskaya, 1,
426034, Izhevsk, Russia
E-mail address: rodionov@uni.udm.ru