S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, стр. 1–11 (2021) УДК 517.55

DOI 10.33048/semi.2021.18.xxx MSC 32A25, 32A50, 97I50, 97I60, 97I80

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ЗИГЕЛЯ

Матякубов З.К., Рахмонов У.С.

Abstract. In this article, the Carleman formula for the Siegel region was found.

Key words: Carleman's formula, Shilov boundary, Cauchy kernel, matrix unit disc, Siegel domain.

1. Введение

Интегральные представления голоморфных функций играют важную роль в классической теории функций одного комплексного переменного и в многомерном комплексном анализе. Они решают классическую задачу восстановления в точках области D голоморфной функции, достаточно хорошо себя ведущей при подходе к границе ∂D, по ее значениям на ∂D или на $S-$граница Шилова. Наряду с этой классической задачей можно и естественно рассматривать следующую: восстановить голоморфную функцию в D по ее значениям на некотором множестве $M \subset \partial D$, не содержащем S. Конечно, M должно быть множеством единственности для рассматриваемого класса голоморфных функций.

Первый результат в направление решение такой задачи получил Т. Карлеман в 1926 г. для области $D \subset \mathbb{C}$ одного специального вида. Его идею введения «гасящей» функции в интегральную формулу Коши развили Г. М. Голузин и В. И. Крылов в 1933 г. применительно к односвязным плоским областям. Их метод предусматривал построение некоторой вспомогательной голоморфной

Матякубов З.К., Рахмонов У.С., Формула Карлемана в матричных областях Зигеля.

Работа выполнена при финансовой поддержке министерства инновационного развития Республики Узбекистана, по гранту ОТ-Ф4-(37+29)- Функциональные свойства A- аналитических функций и их применения и некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях.

Received October, 31, 2020, published Aprel,_ , 2021.

функции, зависящей от множества M, что было возможно для односвязных областей $D \subset \mathbb{C}$, но, вообще говоря, уже невозможно для многосвязных областей в $\mathbb{C}$ или для областей в $\mathbb{C}^n,\ n > 1$.

В 1935 году Э. Картан доказал, что существуют только шесть возможных типов неприводимых, однородных, ограниченных, симметрических областей. Из них $\Re_I, \Re_{II}, \Re_{III}$ и $\Re_{IV}$ называются классическими областями (см. [1]):

$$\Re_I = \left\{ Z \in \mathbb{C}\left[m \times k\right] : I^{(m)} - Z\overline{Z}' > 0 \right\},$$

$$\Re_{II} = \left\{ Z \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : I^{(m)} - Z\overline{Z} > 0, \quad \forall Z' = Z \right\},$$

$$\Re_{III} = \left\{ Z \in \mathbb{C}\left[m \times m\right] : I^{(m)} + Z\overline{Z} > 0, \quad \forall Z' = -Z \right\},$$

$$\Re_{IV} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \left|zz'\right|^2 + 1 - 2\overline{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1 \right\}.$$

Размерность этих областей равны $mk, m(m+1)/2, m(m-1)/2, n$, соответственно.

Все эти области биголоморфно неэквивалентны, поэтому комплексный анализ для них строятся поразному.

Для симметрических областей формулы Карлемана получены в работе [2]. Доказательства из [2] не переносятся на области Зигеля, поскольку в области Зигеля нет точки, через которую можно провести достаточно мощное семейство комплексных прямых, пересекающих остов D по кривой (в симметрических областях такой точкой является точка 0). Поэтому в работе [3] восстановлено значение голоморфной функции не в области, а на остове D.

В настоящее время изучение интегральных представлений голоморфных функций и их приложений в матричных шарах, ассоциированных с указанными выше классическими областями, стало одним из актуальных вопросов. В работе [4] описаны голоморфные автоморфизмы для матричного шара первого типа. Интегральные формулы для матричного шара второго типа были получены Г. Худайбергановым и З. Матякубовым [5], [6], а третьего типа были изучены Г. Худайбергановым, У. Рахмоновым и были найдены интегральные формулы [7], [8].

В работе [9] вычисляются объемы матричного шара третьего типа и обобщенного шара Ли. Полные объемы этих областей необходимы для нахождения ядер интегральных формул для этих областей (ядра Бергмана, Коши-Сеге, Пуассона и др.(см. нап. [6], [10])). В работе [11] были определены голоморфные и плюригармонические функции для классических областей первого типа Картана, а также изучены операторы Лапласа и Хуа Ло-Кена. Более того, между этими операторами была установлена взаимосвязь.

В данной работе найдена формула Карлемана для области Зигеля.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим пространство m^2 комплексных переменных, обозначаемое через $\mathbb{C}^{m^2}$. В некоторых вопросах точки Z этого пространства удобно представлять в виде квадратных $[m \times m]$ - матриц, т.е. в виде $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^m$. При таком представлении точек пространство $\mathbb{C}^{m^2}$ будем обозначать $\mathbb{C}[m \times m]$.

Верхняя полуплоскость не является ограниченной областью, но формулы Карлемана для нее играют важную роль в дальнейшем изложении. В данной статье мы рассматриваем формулы Карлемана в матричных областях Зигеля.

Пусть $\Re_{II}-$классическая область второго типа по классификации Э.Картана, определяется как множество

$$\Re_{II} = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : \ I - Z\overline{Z} > 0 \right\},$$

где $Z-$симметрические матрицы порядка m, ($I-$единичная $[m\times m]-$матрица). Граница $\Re_{II}$ состоит из множества

$$\partial\Re_{II} = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : \ \det(I - Z\overline{Z}) = 0, \quad I - Z\overline{Z} \geq 0 \right\},$$

т.е. из множества матриц Z, для которых матрица $I - Z\overline{Z}$ является неотрицательно определенной, но не положительно определенной эрмитовой матрицей (ее собственные значения неотрицательны и хотя бы одно из них равно нулю). На границе лежит множество

$$S_{II} = \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : \ Z\overline{Z} = I \right\},$$

которое называется остовом $\Re_{II}$ (заметим, что S_{II} является границей Шилова для $\Re_{II}$ (см. [12, стр. 95])). Ясно, что S_{II} есть множество всех унитарных $[m \times m]-$матриц (множество унитарных матриц порядка m обозначается как обычно $U(m)$). Следует отметить, что множество матриц

$$\left\{ Z : \det(I - Z\overline{Z}) = 0 \right\}$$

содержит ограниченную компоненту, выделяемую условием $I - Z\overline{Z} \geq 0$, и неограниченную, для которой $I - Z\overline{Z} \leq 0$. Эти компоненты пересекаются по остову S_{II}.

Пусть множество $M \subset S_{II}$ и $\mu(M) > 0$, где $\mu-$нормированная мера Лебега на S_{II}.

Параметризуем S_{II} следующим образом: $U = e^{i\phi}u$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $u \in SU(m)$, где $SU(m)-$ группа специальных унитарных матриц, т. е. $\det u = 1$. Поскольку $\det U = e^{im\phi} \det u = e^{im\phi}$, то множество $\{U : U = \lambda u, \ |\lambda| = 1\}$, $u \in SU(m)$ пересекает множество элементов группы $SU(m)$ ровно в m точках, соответствующих корням из единицы $e^{im\phi} = 1$.

Лемма 1 (см. [12]**).** *Мера Хаара $d\mu$ многообразия S_{II} может быть записана в виде $d\mu = h(u)d\varphi d\mu_0(u)$, где $d\mu_0-$ нормированная мера Лебега на $SU(m)$, а h — гладкая положительная функция на $SU(m)$.*

Введём обозначение

$$M_{0,u} = \left\{ U : U \in M, U = \lambda u, \ \lambda = e^{i\varphi}, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}, u \in SU(m),$$

$$M_0^{'} = \{u : \ u \in SU(m)\,, m_1 M_{0,u} > 0\}\,.$$

где m_1-мера Лебега. По теореме Фубини $\mu_0(M_0^{'}) > 0$. Обозначим

$$\psi_0(U) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_{0,u}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta} \ , \quad \varphi_0 = \exp \psi_0 \ .$$

Класс Харди $H^1(\Re_{II})$ состоит из всех функций f, голоморфных в области $\Re_{II}$ для которых

$$\|f\|_{H^1} = \sup_{0<r<1} \int\limits_{S_{II}} |f\,(rZ)|\, d\mu < \infty,$$

здесь $rZ = (rz_{11}, rz_{12}, ..., rz_{nn})$.

Лемма 2 (см. [12]). Пусть $f \in H^1(\Re_{II})$. Тогда справедлива следующая формула

$$f(0) = \frac{m}{\int\limits_{M_0'} d\mu_1} \lim_{j\to\infty} \int\limits_M f(U) \left[\frac{\varphi_0(U)}{\varphi_0(0)}\right]^j d\mu_U.$$

Пусть далее $\varphi_A(Z)$—автоморфизм области $\Re_{II}$, переводящий точку A в 0 (см. [1]). Обозначим

$$\mu_A(K) = \mu_1({\varphi_A}^{-1})(K)),$$

$$M_{A,\omega} = \{U : U \in M,\, U = {\varphi_A}^{-1}\left(\lambda {\varphi_A}^{-1}(\omega)\right)\},\ |\lambda| = 1,\ \ \omega \in S_A = \varphi_A(SU(m)),$$

$$M_A^{'} = \{\omega :\, \omega \in S_A\,,\, m_1 M_{A,\omega} > 0\},$$

$$\psi_A(U) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{M_{A,\omega}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda}\frac{d\eta}{\eta}\ ,\quad \varphi_A = \exp \psi_A,$$

(ψ_A зависит от U, поскольку λ и ω - функции U).

Теорема 1 (см. [2]). *Пусть $f \in H^1(\Re_{II})$. Тогда для любой точки $A \in \Re_{II}$ справедлива формула Карлемана*

$$f(A) = \frac{m}{\int\limits_{M_A'} d\mu_A} \lim_{j\to\infty} \int\limits_M f(U) \left[\frac{\varphi_A(U)}{\varphi_A(A)}\right]^j H(A, \overline{U}) d\mu_U,$$

где $H(A, \overline{U})$−ядро Коши для классической области второго типа.

3. Основные результаты

Матричной верхней полуплоскостью называется область (область Зигеля)

$$D_{II} = \{W \in \mathbb{C}[m\times m] :\ \operatorname{Im} W > 0\}$$

где $W = \|w_{jk}\|$, $(j,k = 1, ..., m)$-симметрическая матрица порядка m, элементами которой служат комплексные числа из $\mathbb{C}$, где $\operatorname{Im} W$ определено как

$$\operatorname{Im} W = \frac{1}{2i}(W - \overline{W}).$$

Очевидно, что матрица $\operatorname{Im} W$ эрмитова: ее элементы $h_{jk} = \frac{1}{2i}(w_{jk} - \overline{w}_{jk})$ удовлетворяют условиям $\overline{h}_{jk} = h_{kj}$, и в частности, $h_{jj} = \operatorname{Im} w_{jj}$ вещественны. Неравенство $H > 0$ для эрмитовой матрицы H означает, что она положительно определена, т.е. все ее собственные значения положительны.

На ∂D_{II} имеет множество

$$\Gamma_{II} = \{W \in \mathbb{C}[m\times m] :\ \operatorname{Im} W = 0\}\,,$$

которое называется остовом области D_{II}. Оно состоит из всех эрмитовых матриц порядка m.

Аналогично лемме 10.1 и теоремы 10.3 из [14] доказывается следующая

Лемма 3. *Преобразование $W = \Phi(Z)$ (преобразование Кэли), где*

$$W = \Phi(Z) = i(I+Z)(I-Z)^{-1}, \tag{1}$$

является биголоморфным отображением области $\Re_{II}$ на D_{II}, при этом S_{II} переходит в Γ_{II}.

Доказательство. Сначала докажем, что для $Z \in \Re_{II}$ матрица $I - Z$ невырождена. Прежде всего заметим, что из условия $I - Z\overline{Z} > 0$ вытекает $Z \neq 0$.

Пусть $w - m$ мерный вектор-столбец и

$$(I-Z)w=0.$$

Тогда $w = Zw$, откуда $w^* = w^*\overline{Z}$. Далее,

$$w^*w = w^*\overline{Z}Zw \text{ и } w^*(I-\overline{Z}Z)w=0.$$

Так как условия

$$I - Z\overline{Z} > 0 \text{ и } I - \overline{Z}Z > 0$$

эквивалентны (см. [1]), то левая часть последнего равенства при $w \neq 0$ положительно определена. Следовательно, $w = 0$. Это означает невырожденность матрицы $I - Z$, т.е. существование $(I-Z)^{-1}$ и голоморфность отображения Φ в области $\Re_{II}$.

Далее, из (1) найдем:

$$\operatorname{Im} W = \frac{1}{2i}(W - W^*) = \frac{1}{2i}\left[i(I+Z)(I-Z)^{-1} + i(I-\overline{Z})^{-1}(I+\overline{Z})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(I-\overline{Z})^{-1}\left[(I-\overline{Z})(I+Z) + (I+\overline{Z})(I-Z)\right](I-Z)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2}(I-\overline{Z})^{-1}\left[I + Z - \overline{Z} - \overline{Z}Z + I - Z + \overline{Z} - \overline{Z}Z\right](I-Z)^{-1} =$$

$$= (I-\overline{Z})^{-1}\left[I - \overline{Z}Z\right](I-Z)^{-1}.$$

Отсюда видно, что при невырожденности $I - Z$, эрмитовы матрицы

$$\operatorname{Im} W \text{ и } I - \overline{Z}Z$$

одновременно положительно определены. Мы доказали, что Φ отображает $\Re_{II}$ в D_{II}.

Из (1) можно найти обратное отображение $Z = \Phi^{-1}(W)$:

$$Z = (W+iI)^{-1}(W-iI). \tag{2}$$

При $W \in D_{II}$ матрица $W + iI$ невырождена (это доказывается, как и выше). Поэтому отображение Φ^{-1} голоморфно в D_{II}. Из (1) также видно, что при $W \in D_{II}$ невырождена и матрица $I - Z$, следовательно, $I - Z\overline{Z} > 0$, т.е. Φ^{-1} отображает D_{II} в $\Re_{II}$.

Итак, отображение Φ биголоморфно отображает $\Re_{II}$ на D_{II}, причем, из (2) ясно, что оно преобразует S_{II} в Γ_{II}.

Лемма доказана.

С помощью преобразования классической области второго типа Φ и автоморфизма Φ_A переводящее точку $A \in \Re_{II}$ в 0 (0−нулевая матрица порядка m) (см. [1]), определим следующее преобразование

$$\Psi_B = \Phi \circ \Phi_A \circ \Phi^{-1}, \; B = \Phi(A),$$

которое является автоморфизмом области D_{II}, переводящий точку B из D_{II} в точку iI.

Пусть $\dot{U}$— элемент объема в S_{II}, а $\dot{V}$— элемент объема в Γ_{II}. В [1] доказано следующее соотношение между $\dot{U}$ и $\dot{V}$ при отображении Φ:

$$\dot{U} = 2^{\frac{m(m+1)}{2}}\left(\det(V^2+I)\right)^{-\frac{m+1}{2}}\dot{V}, \tag{3}$$

где $V \in \Gamma_{II}$. Так как $V^* = V$ и

$$\det(V^2+I) = \det(V-iI)\det(V+iI) =$$

$$= \overline{\det(V+iI)}\det(V+iI) = |\det(V+iI)|^2,$$

то (3) можно записать в виде

$$\dot{U} = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} |\det(V+iI)|^{-(m+1)} \dot{V}. \tag{4}$$

Для рассмотрения многомерных аналогов формул Карлемана желательно расширить класс функций, для которых верны эти формулы в матричной верхней полуплоскости D_{II} (область Зигеля).

Класс функций, голоморфных в области D_{II} обозначаем $A(D_{II})$. Пусть $f \in A(D_{II})$ и

$$\frac{f(W)}{\det^2(W+iI)} \in H^1(\Gamma_{II}), \tag{5}$$

т. е. по определению, найдется такое $C_1 > 0$, что, выполняется соотношение

$$\lim_{r \to 1-0} \int\limits_{\Gamma_{II}} \left| \frac{f(rW)}{\det^2(rW+iI)} \right| d\mu_V =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_{II}} \left| \frac{f(V)}{\det^2(V+iI)} \right| d\mu_V < C_1 < +\infty. \tag{6}$$

Теперь, используя отображение (1) и соотношения (3) и (4), мы получим следующие равенства:

$$\int\limits_{S_{II}} \left| f\left(i(I+U)(I-U)^{-1}\right) \right| d\mu_U =$$

$$= 2^{\frac{m(m+1)}{2}} \int\limits_{\Gamma_{II}} \left| f(V) |\det(V+iI)|^{-(m+1)} \right| d\mu_V =$$

$$= 2^{\frac{m(m+1)}{2}} \int\limits_{\Gamma_{II}} \left| \frac{f(V)}{\det^2(V+iI)} \cdot |\det(V+iI)|^{-m+1} \right| d\mu_V. \tag{7}$$

Интеграл (7) ограничен, потому что по соотношению (6), интеграл дроби первого множителя ограничен, а также интеграл (7) сходится, так как под интегралом существует $V+iI$-невырожденная матрица[1].

Из этого следует, что найдется $C_2 > 0$,

$$\int\limits_{S_{II}} \left| f\left(i(I+U)(I-U)^{-1}\right) \right| d\mu_U < C_2,$$

т.е.

$$f\left(i(I+Z)(I-Z)^{-1}\right) \in H^1(S_{II}). \tag{8}$$

Следовательно, для справедливость (8) тогда и только тогда, когда справедливо (5). Заметим, что скалярный вариант вышеприведенного соотношения представлен в работе [13, стр. 147].

---

[1]На самом деле этот интеграл ведет себя как несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$, $(a > 0)$, как известно, этот интеграл сходится в $\alpha > 2$.

Теорема 2. *Если функция $f \in A(D_{II})$ удовлетворяет условию (5) и множество $\tilde{M} \in \partial D_{II}$ имеет положительную меру Лебега, то верна следующая формула Карлемана*

$$f(W) = \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI)}{i^{\left(\frac{m+1}{2}\right)^2}} \times$$

$$\times \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\tilde{M}} f(V) \left[\frac{\tilde{\varphi}(V)}{\tilde{\varphi}(W)}\right]^j \frac{d\mu_V}{\det^{\frac{m+1}{2}}(\overline{V}-W)\det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI)}, \tag{9}$$

предел в которой достигается равномерно на компактах из ∂D_{II}, где $V \in \tilde{M}$.

Доказательство. Пусть $F(Z) = f(i(I+Z)(I-Z)^{-1})$, тогда $F(Z) \in H^1(\Re_{II})$ и справедлива формула Карлемана

$$F(Z) = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{M} F(U) \left[\frac{\varphi(U)}{\varphi(Z)}\right]^j \frac{d\mu_U}{\det^{\frac{m+1}{2}}(I-ZU^*)},$$

где $M-$образ $\tilde{M}$ при отображении $Z = (W+iI)^{-1}(W-iI)$ области Зигеля на классическую область второго типа.

Далее рассмотрим обратное отображение к (1)

$$Z = (W+iI)^{-1}(W-iI), \quad U = (V+iI)^{-1}(V-iI),$$

и сделаем следующие вычисления:

$$I - ZU^* = I - (W+iI)^{-1}(W-iI)(\overline{V}+iI)(\overline{V}-iI)^{-1} =$$

$$= (W+iI)^{-1}\left[(W+iI)(\overline{V}-iI) - (W-iI)(\overline{V}+iI)\right](\overline{V}-iI)^{-1} =$$

$$= (W+iI)^{-1}\left[W\overline{V} - iW + i\overline{V} + I - W\overline{V} - iW - i\overline{V} - I\right](\overline{V}-iI)^{-1} =$$

$$= 2i(W+iI)^{-1}\left[\overline{V}-W\right](\overline{V}-iI)^{-1},$$

и условие (3) будет выполняться

$$d\mu_U = 2^{\frac{m(m+1)}{2}}|\det(V+iI)|^{-(m+1)}d\mu_V.$$

Вычисления показывают, что

$$\frac{d\mu_U}{\det^{\frac{m+1}{2}}(I-ZU^*)} = \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI)\det^{\frac{m+1}{2}}(\overline{V}-iI)}{(2i)^{\frac{m(m+1)}{2}}\det^{\frac{m+1}{2}}(\overline{V}-W)} \cdot \frac{2^{\frac{m(m+1)}{2}}d\mu_V}{\left|\det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI)\right|^2} =$$

$$= \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI)}{i^{\frac{m(m+1)}{2}}\det^{\frac{m+1}{2}}(\overline{V}-W)\det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI)}d\mu_V.$$

Далее, φ играет роль $\tilde{\varphi}$ для множества M. По теореме М.А.Лаврентьева (см. [15]) $M-$ множество тоже положительной меры Лебега, такое что гармоническая мера M переходит в гармоническую меру $\tilde{M}$, следовательно, φ перейдет в $\tilde{\varphi}$, и мы приходим к формуле (9).

Теорема доказана.

Литература

[1] Хуа Ло-кен, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*, М.: ИЛ, 1959. – 163 с.

[2] А. М. Кытманов, Т. Н. Никитина, *Аналоги формулы Карлемана в классических областях* Матем. заметки.— 1989.— Т. 45.—№ 3.—С. 87—93.

[3] А. М. Кытманов, Т. Н. Никитина, *Многомерные формулы Карлемана в областях Зигеля*, Изв. вузов. Матем., 1990, № 3, 44–49; Soviet Math. (Iz. VUZ), 34:3 (1990), 50–56

[4] С. Косбергенов, *О формуле Карлемана для матричного шара*, Изв. вузов. Матем. № 1, 76–79 (1999); Russian Math. (Iz. VUZ), 43:1, 72–75(1999).

[5] G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, Z.Q.Matyakubov, *Integral formulas for some matrix domains*, Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662, pp. 89-95.(2016).

[6] G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, *The Bergman and Cauchy-Szego kernels for matrix ball of the second type*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 7:3, pp. 305-310.(2014).

[7] G.Khudayberganov, B.P.Otemuratov, U.S.Rakhmonov, *Boundary Morera theorem for the matrix ball of the third type*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 11:1, 40-45.(2018).

[8] G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, *Carleman Formula for Matrix Ball of the Third Type*, Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics vol. 264, pp. 101-108, Springer, Cham.(2017).

[9] U. S. Rakhmonov, J. Sh. Abdullayev, *On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:4 (2019), 548–557

[10] G. Khudayberganov, J. Abdullayev, *Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-Szegő in the domains* $\tau^{+}(n-1)$ *and* $\Re_{IV}^{n}$, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, **13:5**, 559-567(2020).

[11] Г. Худайберганов, А. М. Халкназаров, Ж. Абдуллаев, *Об операторах Лапласа и Хуа Ло-Кена*, Изв. вузов. Матем., 2020, № 3, 74–79

[12] Л. А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе*, Новосибирск: Наука. 1990. - 248 с.

[13] П. Кусис, *Введение в теорию пространств* H^p . М.: Мир. 1984. 368 с.

[14] Худайберганов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов, *Анализ в матричных областях*, Монография. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2017. – 292 с.

[15] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, М.: Гостехиздат, 1950. – 338 с.

Зокир Кадамович Матякубов
Хорезмская академия Маъмуна,
pr. Хива, 4,
630090, Хорезм, Узбекистан
E-mail address: zokirbek.1986@mail.ru

Рахмонов Уктам Содикович
Ташкентский государственный технический университет,
ул. Университетская, 2,
110090, Ташкент, Узбекистан
E-mail address: uktam_rakhmonov@mail.ru