

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, стр. 1–11 (2021)

УДК 517.55

DOI 10.33048/semi.2021.18.xxx

MSC 32A25, 32A50, 97I50, 97I60, 97I80

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ
ЗИГЕЛЯ

Матякубов З.К., Рахмонов У.С.

ABSTRACT. In this article, the Carleman formula for the Siegel region was found.

Key words: Carleman's formula, Shilov boundary, Cauchy kernel, matrix unit disc, Siegel domain.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегральные представления голоморфных функций играют важную роль в классической теории функций одного комплексного переменного и в многомерном комплексном анализе. Они решают классическую задачу восстановления в точках области D голоморфной функции, достаточно хорошо себя ведущей при подходе к границе ∂D , по ее значениям на ∂D или на S —граница Шилова. Наряду с этой классической задачей можно и естественно рассматривать следующую: восстановить голоморфную функцию в D по ее значениям на некотором множестве $M \subset \partial D$, не содержащем S . Конечно, M должно быть множеством единственности для рассматриваемого класса голоморфных функций.

Первый результат в направлении решения такой задачи получил Т. Карлеман в 1926 г. для области $D \subset \mathbb{C}$ одного специального вида. Его идею введения «гасящей» функции в интегральную формулу Коши развили Г. М. Голузин и В. И. Крылов в 1933 г. применительно к односвязным плоским областям. Их метод предусматривал построение некоторой вспомогательной голоморфной

МАТЯКУБОВ З.К., РАХМОНОВ У.С., ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ
ЗИГЕЛЯ.

© 2021 Матякубов З.К..

Работа выполнена при финансовой поддержке министерства инновационного развития Республики Узбекистана, по гранту ОТ-Ф4-(37+29)- Функциональные свойства A -аналитических функций и их применения и некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях.

Received October, 31, 2020, published February, , 2021.

функции, зависящей от множества M , что было возможно для односвязных областей $D \subset \mathbb{C}$, но, вообще говоря, уже невозможно для многосвязных областей в \mathbb{C} или для областей в \mathbb{C}^n , $n > 1$.

В 1935 году Э. Картан доказал, что существуют только шесть возможных типов неприводимых, однородных, ограниченных, симметрических областей. Из них $\mathfrak{R}_I, \mathfrak{R}_{II}, \mathfrak{R}_{III}$ и \mathfrak{R}_{IV} называются классическими областями:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_I &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times k] : I^{(m)} - Z\bar{Z}' > 0 \right\}, \\ \mathfrak{R}_{II} &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} - Z\bar{Z} > 0, \quad \forall Z' = Z \right\}, \\ \mathfrak{R}_{III} &= \left\{ Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I^{(m)} + Z\bar{Z} > 0, \quad \forall Z' = -Z \right\}, \\ \mathfrak{R}_{IV} &= \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0, \quad |zz'| < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Размерность этих областей равны $mk, m(m+1)/2, m(m-1)/2, n$, соответственно.

Все эти области биголоморфно неэквивалентны, поэтому комплексный анализ для них строятся поразному.

В работе [6] описаны голоморфные автоморфизмы для матричного шара первого типа. Интегральные формулы для матричного шара второго типа были получены Г. Худайбергановым и З. Матякубовым [7], [8], а третьего типа были изучены Г. Худайбергановым, У. Рахмоновым и были найдены интегральные формулы [9],[10].

В работе [14] вычисляются объемы матричного шара третьего типа и обобщенного шара Ли. Полные объемы этих областей необходимы для нахождения ядер интегральных формул для этих областей (ядра Бергмана, Коши-Сеге, Пуассона и др.(см. нап. [8], [17])). В работе [15] были определены голоморфные и плюригармонические функции для классических областей первого типа Картана, а также изучены операторы Лапласа и Хуа Ло-Кена. Более того, между этими операторами была установлена взаимосвязь.

Для симметрических областей формулы Карлемана получены в работе [14]. Доказательства из [14] не переносятся на области Зигеля, поскольку в области Зигеля нет точки, через которую можно провести достаточно мощное семейство комплексных прямых, пересекающих остов \mathcal{D} по кривой (в симметрических областях такой точкой является точка 0). Поэтому в работе [15] восстановлено значение голоморфной функции не в области, а на остове \mathcal{D} . В данной работе найдена формула Карлемана для области Зигеля.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим пространство m^2 комплексных переменных, обозначаемое через \mathbb{C}^{m^2} . В некоторых вопросах точки Z этого пространства удобно представлять в виде квадратных $[m \times m]$ - матриц, т.е. в виде $Z = (z_{ij})_{i,j=1}^m$. При таком представлении точек пространство \mathbb{C}^{m^2} будем обозначать $\mathbb{C}[m \times m]$.

Верхняя полуплоскость не является ограниченной областью, но формулы Карлемана для нее играют важную роль в дальнейшем изложении. В данной статье мы рассматриваем формулы Карлемана в матричных областях Зигеля.

Пусть \mathfrak{R}_{II} —классическая область второго типа по классификации Э.Картана, определяется как множество (см. [2])

$$\mathfrak{R}_{II} = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : I - Z\bar{Z} > 0\},$$

где Z —симметрические матрицы порядка m , (I —единичная $[m \times m]$ —матрица). Граница \mathfrak{R}_{II} состоит из множества

$$\partial\mathfrak{R}_{II} = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : \det(I - Z\bar{Z}) = 0, \quad I - Z\bar{Z} \geq 0\},$$

т.е. из множества матриц Z , для которых матрица $I - Z\bar{Z}$ является неотрицательно определенной, но не положительно определенной эрмитовой матрицей (ее собственные значения неотрицательны и хотя бы одно из них равно нулю). На границе лежит множество

$$S_{II} = \{Z \in \mathbb{C}[m \times m] : Z\bar{Z} = I\},$$

которое называется остовом \mathfrak{R}_{II} (заметим, что S_{II} является границей Шилова для \mathfrak{R}_{II}). Ясно, что S_{II} есть множество всех унитарных $[m \times m]$ —матриц (множество унитарных матриц порядка m обозначается как обычно $U(m)$). Следует отметить, что множество матриц

$$\{Z : \det(I - Z\bar{Z}) = 0\}$$

содержит ограниченную компоненту, выделяемую условием $I - Z\bar{Z} \geq 0$, и неограниченную, для которой $I - Z\bar{Z} \leq 0$. Эти компоненты пересекаются по остову S_{II} .

Пусть множество $M \subset S_{II}$ и $\mu(M) > 0$, где μ —нормированная мера Лебега на S_{II} .

Параметризуем S_{II} следующим образом: $U = e^{i\phi}u$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $u \in SU(m)$, где $SU(m)$ — группа специальных унитарных матриц, т. е. $\det u = 1$. Поскольку $\det U = e^{im\phi} \det u = e^{im\phi}$, то множество $\{U : U = \lambda u, |\lambda| = 1\}$, $u \in SU(m)$ пересекает множество элементов группы $SU(m)$ ровно в m точках, соответствующих корням из единицы $e^{im\phi} = 1$.

Лемма 1 (см. [3]). Мера Хаара $d\mu$ многообразия S_{II} может быть записана в виде $d\mu = h(u)d\varphi d\mu_0(u)$, где $d\mu_0$ — нормированная мера Лебега на $SU(m)$, а h — гладкая положительная функция на $SU(m)$.

Введём обозначение

$$M_{0,u} = \{U : U \in M, U = \lambda u, \lambda = e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, u \in SU(m),$$

$$M'_0 = \{u : u \in SU(m), m_1 M_{0,u} > 0\}.$$

где m_1 —мера Лебега. По теореме Фубини $\mu_0(M'_0) > 0$. Обозначим

$$\psi_0(U) = \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{0,u}} \frac{\eta + \lambda d\eta}{\eta - \bar{\lambda} \eta} , \quad \varphi_0 = \exp \psi_0 .$$

Лемма 2 (см. [3]). Пусть $f \in H^1(\mathfrak{R}_{II})$ (где $H^1(\mathfrak{R}_{II})$ —класс Харди). Тогда справедлива следующая формула

$$f(0) = \frac{m}{\int_{M'_0} d\mu_1} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(U) \left[\frac{\varphi_0(U)}{\varphi_0(0)} \right]^j d\mu_U$$

Пусть далее $\varphi_A(Z)$ —автоморфизм области \mathfrak{R}_{II} , переводящий точку A в 0 . Обозначим

$$\begin{aligned} \mu_A(K) &= \mu_1(\varphi_A^{-1})(K), \\ M_{A,\omega} &= \{U : U \in M, U = \varphi_A^{-1}(\lambda\varphi_A^{-1}(\omega)), |\lambda| = 1, \omega \in S_A = \varphi_A(SU(m)), \\ M'_A &= \{\omega : \omega \in S_A, m_1 M_{A,\omega} > 0\}, \\ \psi_A(U) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{M_{A,\omega}} \frac{\eta + \lambda d\eta}{\eta - \lambda \bar{\eta}}, \quad \varphi_A = \exp \psi_A, \end{aligned}$$

(ψ_A зависит от U , поскольку λ и ω - функции U).

Теорема 1 (см. [3]). Пусть $f \in H^1(\mathfrak{R}_{II})$. Тогда для любой точки $A \in \mathfrak{R}_{II}$ справедлива формула Карлемана

$$f(A) = \frac{m}{\int_{M'_A} d\mu_A} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M f(U) \left[\frac{\varphi_A(U)}{\varphi_A(A)} \right]^j H(A, \bar{U}) d\mu_U,$$

где $H(A, \bar{U})$ —ядро Коши для классической области второго типа.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Матричной верхней полуплоскостью называется область (область Зигеля) [16]

$$D_{II} = \{W \in \mathbb{C}[m \times m] : \text{Im } W > 0\}$$

где $W = \|w_{jk}\|$, ($j, k = 1, \dots, m$)-симметрическая матрица порядка m , элементами которой служат комплексные числа из \mathbb{C} , где $\text{Im } W$ определено как

$$\text{Im } W = \frac{1}{2i}(W - \bar{W}).$$

Очевидно, что матрица $\text{Im } W$ эрмитова: ее элементы $h_{jk} = \frac{1}{2i}(w_{jk} - \bar{w}_{jk})$ удовлетворяют условиям $\bar{h}_{jk} = h_{kj}$, и в частности, $h_{jj} = \text{Im } w_{jj}$ вещественны. Неравенство $H > 0$ для эрмитовой матрицы H означает, что она положительно определена, т.е. все ее собственные значения положительны.

На ∂D_{II} имеет множество

$$\Gamma_{II} = \{W \in \mathbb{C}[m \times m] : \text{Im } W = 0\},$$

которое называется остовом области D_{II} . Оно состоит из всех эрмитовых матриц порядка m .

Лемма 3. Преобразование $W = \Phi(Z)$ (преобразование Кэли), где

$$W = \Phi(Z) = i(I + Z)(I - Z)^{-1}, \quad (1)$$

является биголоморфным отображением области \mathfrak{R}_{II} на D_{II} , при этом S_{II} переходит в Γ_{II} .

Доказательство. Сначала докажем, что для $Z \in \mathfrak{R}_{II}$ матрица $I - Z$ невырождена. Прежде всего заметим, что из условия $I - Z\bar{Z} > 0$ вытекает $Z \neq 0$.

Пусть w — m мерный вектор-столбец и

$$(I - Z)w = 0.$$

Тогда $w = Zw$, откуда $w^* = w^*\bar{Z}$. Далее,

$$w^*w = w^*\bar{Z}Zw \text{ и } w^*(I - \bar{Z}Z)w = 0.$$

Так как условия

$$I - Z\bar{Z} > 0 \text{ и } I - \bar{Z}Z > 0$$

эквивалентны (см.[2]), то левая часть последнего равенства при $w \neq 0$ положительно определена. Следовательно, $w = 0$. Это означает невырожденность матрицы $I - Z$, т.е. существование $(I - Z)^{-1}$ и голоморфность отображения Φ в области \mathfrak{R}_{II} .

Далее, из (1) найдем:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} W &= \frac{1}{2i}(W - W^*) = \frac{1}{2i} \left[i(I + Z)(I - Z)^{-1} + i(I - \bar{Z})^{-1}(I + \bar{Z}) \right] = \\ &= \frac{1}{2}(I - \bar{Z})^{-1} \left[(I - \bar{Z})(I + Z) + (I + \bar{Z})(I - Z) \right] (I - Z)^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}(I - \bar{Z})^{-1} \left[I + Z - \bar{Z} - \bar{Z}Z + I - Z + \bar{Z} - \bar{Z}Z \right] (I - Z)^{-1} = \\ &= (I - \bar{Z})^{-1} [I - \bar{Z}Z] (I - Z)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при невырожденности $I - Z$, эрмитовы матрицы

$$\operatorname{Im} W \text{ и } I - \bar{Z}Z$$

одновременно положительно определены. Мы доказали, что Φ отображает \mathfrak{R}_{II} в D_{II} .

Из (1) можно найти обратное отображение $Z = \Phi^{-1}(W)$:

$$Z = (W + iI)^{-1}(W - iI). \quad (2)$$

При $W \in D_{II}$ матрица $W + iI$ невырождена (это доказывается, как и выше). Поэтому отображение Φ^{-1} голоморфно в D_{II} . Из (1) также видно, что при $W \in D_{II}$ невырождена и матрица $I - Z$, следовательно, $I - Z\bar{Z} > 0$, т.е. Φ^{-1} отображает D_{II} в \mathfrak{R}_{II} .

Итак, отображение Φ биголоморфно отображает \mathfrak{R}_{II} на D_{II} , причем, из (2) ясно, что оно преобразует S_{II} в Γ_{II} .

Лемма доказана.

С помощью преобразования классической области второго типа Φ и автоморфизма Φ_A переводящее точку $A \in \mathfrak{R}_{II}$ в 0 (0-нулевая матрица порядка m) (см. [2]), определим следующее преобразование

$$\Psi_B = \Phi \circ \Phi_A \circ \Phi^{-1}, \quad B = \Phi(A),$$

которое является автоморфизмом области D_{II} , переводящий точку B из D_{II} в точку iI .

Пусть \dot{U} — элемент объема в S_{II} , а \dot{V} — элемент объема в Γ_{II} . В [2] доказано следующее соотношение между \dot{U} и \dot{V} при отображении Φ :

$$\dot{U} = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} (\det(V^2 + I))^{-\frac{m+1}{2}} \dot{V}, \quad (3)$$

где $V \in \Gamma_{II}$. Так как $V^* = V$ и

$$\begin{aligned} \det(V^2 + I) &= \det(V - iI) \det(V + iI) = \\ &= \overline{\det(V + iI)} \det(V + iI) = |\det(V + iI)|^2, \end{aligned}$$

то (3) можно записать в виде

$$\dot{U} = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} |\det(V + iI)|^{-(m+1)} \dot{V}. \quad (4)$$

Класс функций, голоморфных в области D_{II} обозначаем $A(D_{II})$.

Для рассмотрения многомерных аналогов формул Карлемана желательно расширить класс функций, для которых верны эти формулы в матричной верхней полуплоскости D_{II} (область Зигеля).

Пусть $f \in A(D_{II})$. Заметим, что $f(i(I+Z)(I-Z)^{-1}) \in H^1(\mathfrak{R}_{II})$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{f(W)}{\det(W+iI)^2} \in H^1(D_{II}), \quad (5)$$

(скалярный вариант см. [13]).

Теорема 2. *Если функция $f \in A(D_{II})$ удовлетворяет условию (5) и множество $\tilde{M} \in \partial D_{II}$ имеет положительную меру Лебега, то верна следующая формула Карлемана*

$$f(W) = \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI)}{i^{\frac{m+1}{2}}} \times \\ \times \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\tilde{M}} f(V) \left[\frac{\tilde{\varphi}(V)}{\tilde{\varphi}(W)} \right]^j \frac{d\mu_V}{\det^{\frac{m+1}{2}}(\bar{V}-W) \det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI)}, \quad (6)$$

предел в которой достигается равномерно на компактах из ∂D_{II} , где $V \in \tilde{M}$.

Доказательство. Пусть $F(Z) = f(i(I+Z)(I-Z)^{-1})$, тогда $F(Z) \in H^1(\mathfrak{R}_{II})$ и справедлива формула Карлемана

$$F(Z) = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_M F(U) \left[\frac{\varphi(U)}{\varphi(Z)} \right]^j \frac{d\mu_U}{\det^{\frac{m+1}{2}}(I-ZU^*)},$$

где M -образ \tilde{M} при отображении $Z = (W+iI)^{-1}(W-iI)$ области Зигеля на классическую область второго типа.

Далее рассмотрим обратное отображение к (1)

$$Z = (W+iI)^{-1}(W-iI), \quad U = (V+iI)^{-1}(V-iI),$$

и сделаем следующие вычисления:

$$\begin{aligned} I - ZU^* &= I - (W+iI)^{-1}(W-iI)(\bar{V}+iI)(\bar{V}-iI)^{-1} = \\ &= (W+iI)^{-1} [(W+iI)(\bar{V}-iI) - (W-iI)(\bar{V}+iI)] (\bar{V}-iI)^{-1} = \\ &= (W+iI)^{-1} [W\bar{V} - iW + i\bar{V} + I - W\bar{V} - iW - i\bar{V} - I] (\bar{V}-iI)^{-1} = \\ &= 2i(W+iI)^{-1} [\bar{V} - W] (\bar{V}-iI)^{-1}, \end{aligned}$$

и условие (3) будет выполняться

$$d\mu_U = 2^{\frac{m(m+1)}{2}} |\det(V+iI)|^{-(m+1)} d\mu_V.$$

Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \frac{d\mu_U}{\det^{\frac{m+1}{2}}(I-ZU^*)} &= \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI) \det^{\frac{m+1}{2}}(\bar{V}-iI)}{(2i)^{\frac{m(m+1)}{2}} \det^{\frac{m+1}{2}}(\bar{V}-W)} \cdot \frac{2^{\frac{m(m+1)}{2}} d\mu_V}{\left| \det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI) \right|^2} = \\ &= \frac{\det^{\frac{m+1}{2}}(W+iI)}{i^{\frac{m(m+1)}{2}} \det^{\frac{m+1}{2}}(\bar{V}-W) \det^{\frac{m+1}{2}}(V+iI)} d\mu_V. \end{aligned}$$

Далее, φ играет роль $\tilde{\varphi}$ для множества M . По теореме М.А. Лаврентьева (см. [4]) M – множество тоже положительной меры Лебега, такое что гармоническая мера M переходит в гармоническую меру \tilde{M} , следовательно, φ перейдет в $\tilde{\varphi}$, и мы приходим к формуле (6).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Худайберганов, А. М. Кытманов, Б. А. Шаимкулов, *Комплексный анализ в матричных областях*, Монография. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2011. – 290 с.
- [2] Хуа Ло-кен, *Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях*, М.: ИЛ, 1959. – 163 с.
- [3] Айзенберг Л.А., *Формулы Карлемана в комплексном анализе*, Новосибирск: Наука. 1990. – 248 с.
- [4] Привалов И.И., *Граничные свойства аналитических функций*, М.: Гостехиздат, 1950. – 338 с.
- [5] Khudayberganov G., Matyoqubov Z.Q., *Carleman's formula for the matrix upper half-plane*, АСТА NUUZ. **2**:1 (2018), 8–13.
- [6] Косбергенов С. *О формуле Карлемана для матричного шара*, Изв. вузов. Матем. № 1, 76–79 (1999); Russian Math. (Iz. VUZ), 43:1, 72–75(1999).
- [7] G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, Z.Q.Matyakubov, *Integral formulas for some matrix domains*, Contemporary Mathematics, AMS, Volume 662, pp. 89-95.(2016).
- [8] G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, *The Bergman and Cauchy-Szego kernels for matrix ball of the second type*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics 7:3, pp. 305-310.(2014).
- [9] G.Khudayberganov, B.P.Otemuratov, U.S.Rakhmonov, *Boundary Morera theorem for the matrix ball of the third type*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, 11:1, 40-45.(2018).
- [10] G.Khudayberganov, U.S.Rakhmonov, *Carleman Formula for Matrix Ball of the Third Type*, Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory. USUZCAMP 2017. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics vol. 264, pp. 101-108, Springer, Cham.(2017).
- [11] U. S. Rakhmonov, J. Sh. Abdullayev, *On volumes of matrix ball of third type and generalized Lie balls*, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 29:4 (2019), 548–557
- [12] Г. Худайберганов, А. М. Халкназаров, Ж. Абдуллаев, *Об операторах Лапласа и Хуа Ло-Кена*, Изв. вузов. Матем., 2020, № 3, 74–79
- [13] Кусис П., *Введение в теорию пространств H^p* . М.: Мир. 1984. 368 с.
- [14] Кытманов А. М., Никитин А. Т. Н., *Аналоги формулы Карлемана в классических областях* Матем. заметки.— 198.9.— Т. 45.—№ 3.—С. 87–93.
- [15] А. М. Кытманов, Т. Н. Никитина, *Многомерные формулы Карлемана в областях Зигеля*, Изв. вузов. Матем., 1990, № 3, 44–49; Soviet Math. (Iz. VUZ), 34:3 (1990), 50–56
- [16] Владимиров В. С., Сергеев А. Г., *Комплексный анализ в трубе будущего* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНТИ, 1985. – Т. 8. – С. 191–266.
- [17] Khudayberganov G., Abdullayev J., *Relationship between the Kernels Bergman and Cauchy-Szegő in the domains $\tau^+(n-1)$ and \mathfrak{R}_{IV}^n* , Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, **13**:5, 559-567(2020).

Зокир Кадамович Матякубов
 ХОРЕЗМСКАЯ АКАДЕМИЯ МАЪМУНА,
 РР. ХИВА, 4,
 630090, ХОРЕЗМ, УЗБЕКИСТАН
E-mail address: zokirbek.1986@mail.ru

РАХМОНОВ Уктам Содикович
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ,
ул. Университетская, 2,
110090, Ташкент, Узбекистан
E-mail address: `uktam_rakhmonov@mail.ru`