НЕФИНИТАРНЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ

В работе рассматриваются задачи, связанные с бесконечными треугольными матрицами. Именно, пусть K – коммутативное кольцо с единицей, и Γ – линейно упорядоченное множество. Рассматривается подгруппа $NT(\Gamma, K)$ аддитивной группы $\prod\limits_{\Gamma\times\Gamma}(K,+)$, состоящая из всех матриц $(a_{ij})_{i,j\in\Gamma}$, у которых $a_{ij}=0$ для всех $i \leq j$.

Получены следующие основные результаты.

Теорема 1 говорит, что $NT(\Gamma, K)$ для бесконечного Γ является кольцом тогда и только тогда, когда Γ изометрично (или антиизометрично) вкладывается в $\mathbb{Z}$ относительно обычного порядка, т.е. Γ изометрично $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}$. В последних трех случаях $NT(\Gamma, K)$ является радикальным кольцом.

Доказательство первой части данного утверждения слишком растянуто и выглядит неубедительно. Достаточно показать, что между любыми двумя фиксированными элементами Γ может лежать только конечное число элементов. Этот факт не менее очевиден, чем тезисы, используемые при доказательстве. Радикальность колец вида $NT(\Gamma, K)$ является простым упражнением на тему "квазирегулярность и круговая композиция" (см. Н. Джекобсон, Строение колец, 1961).

Теорема 2 представляет описание максимальных абелевых идеалов. Она переносит результаты [4] с цепи $\mathbb{N}$ на цепь $\mathbb{Z}$. Авторы схематично повторяют аргументацию из [4], что вполне обоснованно, так как доказательства для этих случаев отличаются очень мало.

Теорема 3 описывает строение группы автоморфизмов $NT(\Gamma, K)$ при $\Gamma=\mathbb{N}$ или анти-изометричной. Для случая $\Gamma=\mathbb{N}$, как указано в работе, она доказана в [5]. Второй случай мгновенно сводится к первому.

Теорема 4 описывает строение группы автоморфизмов $NT(\mathbb{Z}, K)$. Идея доказательства та же, что в предыдущей теореме, только детали рассуждения приведены более развернуто. Доказательство, тем не менее, содержит не относящиеся к сути вопроса замечания (например, с.8, строки 12-13: что такое Z_3?). В целом, теоремы 3 и 4 показывают, что автоморфизмы $NT(\Gamma, K)$ в нефинитарных случаях разлагаются на сопряжение, автоморфизм K (кстати, нет объяснения для обозначения $\widetilde{Aut}\,K$) и, в случае $\Gamma=\mathbb{Z}$, инверсии цепи.

Теорема 5 посвящена понятию локального автоморфизма. По определению локальный автоморфизм на каждом фиксированном элементе действует так же, как некоторый (зависящий от элемента) “обычный” автоморфизм. Наиболее ценными результатами в данном направлении являются теоремы о том, что для систем данного класса всякий локальный автоморфизм совпадает с обычным автоморфизмом (является *тривиальным*). В данной работе показано, что локальные автоморфизмы нефинитарных алгебр $NT(\mathbb{Z}, K)$ тривиальны по модулю L_2. Данное утверждение практически очевидно вытекает из теорем 3 и 4, а также описания автоморфизмов $NT(n, K)$.

Таким образом, новым содержательным результатом работы является теорема 4. Доказательство этой теоремы следует схеме из [5] и не представляет отдельного методического интереса. В целом, данная работа не представляет значительного продвижения в изучении локальных автоморфизмов и, по моему мнению, не соответствует критериям публикаций СЭМИ.