S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 512.54, 512.55

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 17A36, 17B20, 17B40

НЕФИНИТАРНЫЕ АЛГЕБРЫ И ИХ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ

И.Н. ЗОТОВ, В.М. ЛЕВЧУК

Abstract. Let Γ be an infinite arbitrary chain (or linearly ordered set) and K be an associative commutative ring with identity. Then the K-module $M(\Gamma, K)$ of all matrices $||a_{ij}||$ over K with indexes from Γ is not an algebra because usual matrix multiplication is not its bijection. Denote by $NT(\Gamma, K)$, the submodule of all matrices with $a_{ij} = 0$ for all $i \leq j$. We show that $NT(\Gamma, K)$ is an algebra if and only if $\Gamma = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Also, each such algebra is radical. When K is a integral domain we find structure of the automorphism groups of the ring $R = NT(\Gamma, K)$ and associative Lie ring $R^{(-)}$. For these cases we also show that any local automorphism is an automorphism module R^2.

Keywords: nil-triangular subalgebra, nonfinitary generalizations, radical ring, adjoint group, group automorphisms, local automorphism.

1. Введение

Пусть K – ассоциативно коммутативное кольцо с единицей и Γ – линейно упорядоченное множество (кратко, цепь). Все Γ-матрицы $\alpha = ||a_{ij}||_{i,j\in\Gamma}$ над K с обычными линейными операциями образуют K-модуль $M(\Gamma, K)$ с подмодулями $NT(\Gamma, K)$ матриц с условием нильтреугольности $a_{ij} = 0$ для всех $i \leq j$ и $T(\Gamma, K)$ треугольных матриц. К алгебре с обычным матричным умножением приводит подмодуль $FM(\Gamma, K)$ финитарных матриц в $M(\Gamma, K)$. Её подалгебра $R = FNT(\Gamma, K)$ – радикальная и даже ниль-алгебра, а аномальные свойства

Zotov, I.N., Levchuk, V.M. Nonfinitary algebras and their automorphism groups.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2020-1534/1).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

присоединенной группы $G(R)$ отмечались в [1]. Автоморфизмы кольца R, ассоцированного кольца Ли $R^{(-)}$ и группы $G(R)$ изучались в [2] и [3].

Всякая конечная цепь Γ порядка n изометрична цепи $\{1, 2, \ldots, n\}$; модуль $M(\Gamma, K)$ приводит здесь к известной алгебре $n \times n$ матриц $M(n, K)$. Как выявилось в [4] и [5], для бесконечной цепи Γ матричное умножение на модуле $T(\Gamma, K)$ может являться бинарной операцией (и поэтому $T(\Gamma, K)$ – алгеброй), а на модуле $M(\Gamma, K)$ – нет.

Различные конструкции групп нефинитарных матриц исследовал В. Холубовский, [6]. Автоморфизмы предельной унитреугольной группы $UT(\infty, K)$ над полем K порядка > 2 исследовала Р. Словик [7]. См. также [8], [9] и замечание 1 в § 2. В [4] группа $UT(\infty, K)$ представлена группой $UT(\Gamma, K)$ с цепью $\Gamma = \mathbb{N}$ натуральных чисел, а также присоединенной группой кольца $NT(\mathbb{N}, K)$. Другие нефинитарные группы дает перенесение в [4] конструкции $NT(\mathbb{N}, K)$ на нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле классических типов. Группы автоморфизмов кольца $R = NT(\mathbb{N}, K)$, кольца Ли $R^{(-)}$ и присоединенной группы выявляются в [5].

В § 2 все цепи Γ с нефинитарной алгеброй $T(\Gamma, K)$ выявляет теорема 1. Это, в точности, цепи $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ и для каждой из них подкольцо $NT(\Gamma, K)$ – радикальное.

Строение групп автоморфизмов всех нефинитарных колец $R = NT(\Gamma, K)$ над областью целостности K и колец Ли $R^{(-)}$ выявляют теоремы 3 и 4 в § 3. Обе теоремы основываются на теореме 2 о максимальных абелевых идеалов.

С 90-х годов систематически изучаются локальные автоморфизмы и, взаимосвязано, локальные дифференцирования алгебр. Локальным автоморфизмом алгебры A называют каждый ее модульный автоморфизм, действующий на любой элемент $\alpha \in A$ как некоторый (зависящий от α) автоморфизм алгебры A. Локальные автоморфизмы простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ над полем характеристики 0 исследуются в [10]; для алгебры $M(n, \mathbb{C})$ их исчерпывают автоморфизмы и антиавтоморфизмы [11]. См. также [12].

Автоморфизмы алгебры называют *тривиальными* локальными автоморфизмами. Р. Крист [13] построил один из первых примеров нетривиального локального автоморфизма подалгебры матриц в $T(3, \mathbb{C})$ с попарно равными элементами на каждой диагонали. Локальные автоморфизмы алгебры $R = NT(n, K)$ и ассоциированной алгебры Ли $R^{(-)}$ исследовались в [14] и [15]; они описаны при $n = 3$ и, когда поле, $n = 4$. А. П. Елисова [16] установила редукционную теорему, доказав при $n > 4$ тривиальность локальных автоморфизмов алгебр R и $R^{(-)}$ по модулю коммутанта. И.Н. Зотов [17] перенес редукционную теорему на нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле всех классических типов. Теорема 5 распространяет редукцию на нефинитарные алгебры.

2. Нефинитарные алгебры

Всюду далее, где не оговорено противное, K – произвольное ассоциативно коммутативное кольцо с единицей, Γ – линейно упорядоченное множество или цепь.

Матрицы $\alpha = ||a_{ij}||$ над K с индексами i, j из Γ относительно линейных операций образуют K-модуль $M(\Gamma, K)$ с подмодулем $T(\Gamma, K)$ (нижних) треугольных матриц. Напомним, что биективное соответствие двух цепей называют изометрией, если оно сохраняет отношение порядка, и антиизометрией, если отношение порядка меняется на противоположное. Так, всякая конечная цепь Γ порядка n очевидно изометрична цепи $\{1, 2, \ldots, n\}$ и модуль $M(\Gamma, K)$ с обычным матричным умножением приводит здесь к единственной, с точностью до изоморфизмов, алгебре $n \times n$ матриц $M(n, K)$.

Согласно [4] и [5], для бесконечной цепи Γ матричное умножение на модуле $NT(\Gamma, K)$ нильтреугольных (нефинитарных) матриц может являться бинарной операцией (и поэтому $NT(\Gamma, K)$ – алгеброй), а на модуле $M(\Gamma, K)$ – нет.

Все нефинитарные алгебры $NT(\Gamma, K)$ и $T(\Gamma, K)$ выявляет

Теорема 1. *Матричное умножение есть бинарная операция на $NT(\Gamma, K)$ или $T(\Gamma, K)$ тогда и только тогда, когда Γ изометрична цепи $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ или $\mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$. Во всех этих случаях $T(\Gamma, K)$ есть алгебра, а ее подкольцо $NT(\Gamma, K)$ – радикальное.*

Доказательство. Отрезками цепи Γ называем подцепи

$$[p, q] := \{j \in \Gamma \mid p \leq j \leq q\} \quad (p, q \in \Gamma,\ p \leq q).$$

Очевидно, доказательство требуется лишь для бесконечной цепи Γ. Ее первый или наименьший элемент (если существует) и последний элемент называем также крайними.

Для фиксированных (произвольно) элементов p и q бесконечной цепи Γ можно выбрать матрицы $\alpha = ||a_{ij}||$ и $\beta = ||b_{ij}||$ в $M(\Gamma, K)$ с условием $a_{qm}b_{mp} = 1$ для бесконечного числа значений m в Γ и только с элементами 0 или 1.Бесконечные суммы ненулевых элементов в кольце K не определены. Поэтому (q, p)-я координата произведения $\alpha\beta$ не определена и матричное умножение в $M(\Gamma, K)$ не является бинарной операцией.

Допустим, что отрезок $[p, q]$ цепи Γ бесконечен для некоторых $p, q \in \Gamma$, $p \leq q$. Тогда матрицы α и β с неопределенной (q, p)-й координатой произведения $\alpha\beta$ можно выбрать, как и выше, даже в модуле $NT(\Gamma, K)$. Следовательно, корректность матричного умножения в модуле $NT(\Gamma, K)$ или $T(\Gamma, K)$ равносильна конечности каждого отрезка цепи Γ. В частности, цепь Γ – счетная. Когда в ней есть хотя бы один крайний элемент, приходим к случаю $\Gamma = \mathbb{N}$ или $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Если в Γ нет крайних элементов, приходим к случаю $\Gamma = \mathbb{Z}$. Корректность матричного умножения в модулях $NT(\Gamma, K)$ и $T(\Gamma, K)$ в обоих случаях показывают прямые вычисления. Таким образом, в обоих случаях $T(\Gamma, K)$ есть алгебра с подалгеброй $NT(\Gamma, K)$ и остается доказать последнее утверждение теоремы.

Любое ассоциативное кольцо R есть полугруппа относительно присоединенного умножения $a \circ b = a + b + ab$ и 0 – её единица; ассоциированное кольцо Ли $R^{(-)}$ получают заменой умножения в R коммутированием $a * b = ab - ba$. Обратный к элементу α в присоединенной полугруппе элемент α' называют квазиобратным. Когда $(R, \circ)$ – группа, кольцо R называют радикальным. Так, кольца $NT(n, K)$ радикальны, в силу их нильпотентности и того, что $\alpha' = \sum_{m=1}^{\infty}(-\alpha)^m$ для нильпотентных элементов α.

В алгебре $NT(\Gamma, K)$ все матрицы $||a_{uv}||$ с условием $a_{uv} = 0$ при $u - v < k$ для фиксированного номера $k \geq 1$ образуют идеал L_k. Отметим, что пересечение таких идеалов нулевое, причем $L_k L_m \subseteq L_{k+m}$. В присоединенной группе кольца $NT(\Gamma, K)$ и в ассоциированном кольце Ли получаем центральный ряд, называемый стандартным:

$$L_1 = NT(\Gamma, K) \supset L_2 \supset \ldots \supset L_k \supset \ldots\ .$$

Известно, что для случая конечной цепи Γ стандартны нижний центральный ряд и гиперцентральный (или верхний центральный) ряд

$$Z_0 = 0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots \ .$$

Несложно устанавливается (при $\Gamma = \mathbb{N}$ см. [4])

Лемма 1. *Если $\Gamma = \mathbb{Z}$ или $\mathbb{N}$, то нижний центральный ряд присоединенной группы кольца $NT(\Gamma, K)$ и ассоциированного кольца Ли стандартен, а гиперцентральный ряд стабилизируется на нулевом идеале.*

Радикальность колец $NT(\mathbb{N}, K)$ и, как следствие, антиизоморфных с ними колец $NT(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, K)$ доказана в [4]. Остается доказать радикальность колец $NT(\mathbb{Z}, K)$.

Укажем для произвольной матрицы $\alpha = ||a_{uv}|| \in L_1$ квазиобратную матрицу $\gamma = ||c_{uv}||$. Её k-ю диагональ $\{c_{uv} \mid u, v \in \mathbb{Z},\ u-v = k\}$ определяем равенствами

$$\gamma = \sum_{m=1}^{k-1} (-\alpha)^m = -\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \ldots + (-\alpha)^k \mod L_{k+1}$$

последовательно при $k = 1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, что построение каждой очередной диагонали не изменяет уже построенные диагонали. В силу равенства $\bigcap_{k=1}^{\infty} L_k = 0$, матрица γ определена полностью. Таким образом, доказательство радикальности кольца $NT(\mathbb{Z}, K)$ и, вместе с тем, теоремы завершается. $\square$

В. Холубовский и Р. Словик изучали в [9] нефинитарные группы $SL_{VK}(R)$, как определенные надгруппы предельной унитреугольной группы $UT(\infty, K)$.

Замечание 1. *В цепи $\Gamma = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ любой отрезок конечен и в модуле $M(\Gamma, K)$ ему соответствует подалгебра. Выберем произвольное семейство отрезков $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ в Γ, где $\Gamma_i \cup \Gamma_j$ $(i \neq j)$ – не отрезки; подалгебра $M(\Gamma_i, K)$ при каждом i изоморфна алгебре $M(|\Gamma_i|, K)$. Все подалгебры $M(\Gamma_i, K)$ и $T(\Gamma, K)$ порождают в $M(\Gamma, K)$ подмодуль $P(\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots)$, называемый параболическим, и также являющийся нефинитарной алгеброй. Нефинитарные группы $SL_{VK}(R)$ из [9] изоморфно вложимы в мультипликативную группу обратимых элементов параболической алгебры вида $P(\Gamma_1)$.*

Различие односторонних аннуляторов алгебр $NT(\Gamma, K)$, выделенных в теореме 1, показывает следующая очевидная лемма, использующая идеалы

$$T_{ij} = \langle \alpha = ||a_{uv}|| \in NT(\Gamma, K) \mid a_{uv} = 0, \text{ если } \ u < i \ \text{ или } \ v > j \rangle \quad (i, j \in \Gamma).$$

Лемма 2. *Левый аннулятор в алгебрах $NT(n, K)$ $(n > 2)$ и $NT(\mathbb{N}, K)$ равен T_{21}, а правый – T_{nn-1} и 0, соответственно. В $NT(\mathbb{Z}, K)$ оба аннулятора нулевые.*

Любая алгебра R и противоположная алгебра $R^{(op)}$ (получена заменой $a \ominus b := ba$ умножения в R) определены на одном множестве: тождественное отображение является их антиизоморфизмом. Известна [18, Лемма 1]

Лемма 3. *Всякий идеал в R есть идеал также в $R^{(-)}$ и $Aut\ R \subseteq Aut\ R^{(-)}$. Кроме того, $R^{(-)} \simeq (R^{(op)})^{(-)} \simeq \mu(R)^{(-)}$ для любого антиизоморфизма μ алгебры R.*

Отметим, что эндоморфизм $x \to -x$ $(x \in R)$ модулей R и $R^{(-)}$, в силу равенств

$$(-x) * (-y) = x * y = xy - yx = -(y * x) \quad (x, y \in R),$$

всегда есть антиавтоморфизм алгебры $R^{(-)}$. Его композиция $-\mu : x \to -x^{\mu}$ с любым антиизоморфизмом μ алгебры R дает изоморфизм алгебр $R^{(-)}$ и $\mu(R)^{(-)}$.

3. Группы автоморфизмов

Выделим вначале основные автоморфизмы колец и алгебр $R = NT(\Gamma, K)$ и $R^{(-)}$.

Подгруппу J внутренних автоморфизмов алгебры R образуют внутренние автоморфизмы присоединенной группы. Сопряжения обратимыми диагональными матрицами дают подгруппу D диагональных автоморфизмов. При переходе от алгебр к кольцам R добавляются также (индуцированные) кольцевые автоморфизмы

$$\widetilde{\theta} : ||a_{uv}|| \to ||\theta(a_{uv})|| \quad (\theta \in Aut\ K).$$

Автоморфизмы или изометрии на себя любой конечной цепи, цепей $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ очевидно единичные. Как и в [2], произвольный автоморфизм $'$ цепи Γ индуцирует автоморфизм $||a_{uv}|| \to ||a_{u'v'}||$ алгебры R (в частности, $xe_{ij} \to xe_{i'j'}$ при $x \in K$, $i > j$).

В силу замечания после леммы 3, всякий антиавтоморфизм $'$ цепи Γ индуцирует антиавтоморфизм $||a_{uv}|| \to ||a_{v'u'}||$ и автоморфизм $||a_{uv}|| \to -||a_{v'u'}||$ алгебры Ли $R^{(-)}$.

Для конечной цепи Γ порядка $n > 2$ группу автоморфизмов и антиавтоморфизмов порождает антиавтоморфизм $i \to n + 1 - i$. Подгруппу W автоморфизмов алгебры Ли $R^{(-)}$ при $R = NT(n, K)$ порождают идемпотентные автоморфизмы τ_f, сопоставляемые в [19] каждому идемпотенту $f = f^2$ кольца K по правилу

$$\tau_f : \ e_{ij} \to fe_{ij} - (1 - f)e_{n-j+1,n-i+1}, \quad 1 \leq j < i \leq n. \tag{1}$$

Автоморфизм τ_0 алгебры Ли $R^{(-)}$ известен как графовый автоморфизм. (Автоморфные продолжения τ_0 на алгебру Ли $R^{(-)}$ и на присоединенную группу различны, [19].)

Через $Z^{(a)}$ и $Z^{(r)}$ обозначаем подгруппу центральных автоморфизмов, соответственно, алгебры Ли и кольца Ли $R^{(-)}$, то есть действующих тождественно по модулю центра $Z_1 = Ke_{n1}$. Очевидно, подгруппа $Z^{(a)}$ изоморфна $(n-1)$-й декартовой степени аддитивной группы $(K, +)$, а подгруппа $Z^{(r)}$ – $(n-1)$-й декартовой степени аддитивной группы кольца эндоморфизмов $End\ (K, +)$, поскольку ее порождают автоморфизмы

$$\zeta_i(\lambda) : ||a_{uv}|| \to ||a_{uv}|| + \lambda(a_{i+1i})e_{n1}, \quad \lambda \in End\ (K, +), \quad 1 \leq i < n.$$

Центральные автоморфизмы допускают обобщение. Автоморфизм произвольной группы или кольца Ли с нетривиальным m-м гиперцентром называют *гиперцентральным высоты* m (или, кратко, *гиперцентральным*), если по модулю m-го гиперцентра он единичен, а по модулю $(m-1)$-го гиперцентра является внешним автоморфизмом.

При $R = NT(n, K)$ $(n > 4)$ в [19, Теоремы 1 и 2] подгруппу V порождают выделенные гиперцентральные автоморфизмы высоты 2 и 3 алгебры Ли $R^{(-)}$. Строение групп автоморфизмов колец R и $R^{(-)}$ выявлено в [19, Следствие 3]:

$$(2) \qquad Aut\ R = ((JZ^{(r)}) \leftthreetimes D) \leftthreetimes \widetilde{Aut}\ K, \qquad Aut\ R^{(-)} = ((Aut\ R)\ \leftthreetimes V) \leftthreetimes W.$$

Автоморфизмы кольца $R = FNT(\Gamma, K)$ и кольца Ли $R^{(-)}$, а также присоединенной группы описаны в [2] для случая произвольной цепи Γ и кольца K без делителей нуля. При названных ограничениях вначале выявлялись максимальные абелевы идеалы колец R и $R^{(-)}$, а также максимальные абелевы нормальные подгруппы присоединенной группы. Эту схему удается перенести на все нефинитарные алгебры $R = NT(\Gamma, K)$.

Теорема 2. *Если K – область целостности, то T_{i+1i} $(i \in \Gamma)$ исчерпывают все максимальные абелевы идеалы кольца $R = NT(\Gamma, K)$ и кольца Ли $R^{(-)}$, а также максимальные абелевы нормальные подгруппы присоединенной группы.*

Доказательство. В [4] теорема доказана для алгебры $NT(\mathbb{N}, K)$ и, следовательно, для антиизоморфной алгебры $NT(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, K)$. Исследуем оставшийся случай $\Gamma = \mathbb{Z}$.

Для нефинитарных алгебр $NT(\Gamma, K)$ при любом $m \in \Gamma$ выделяем также идеалы

$$T_{m,\infty} = \langle\ \alpha = ||a_{uv}|| \in NT(\Gamma, K) \mid a_{uv} = 0, \text{ если } \ u < m\ \rangle,$$
$$T_{-\infty,m} = \langle\ \alpha = ||a_{uv}|| \in NT(\Gamma, K) \mid a_{uv} = 0, \text{ если } \ v > m\ \rangle.$$

Пусть M – произвольный максимальный абелев идеал кольца $R = NT(\mathbb{Z}, K)$ или кольца Ли $R^{(-)}$ и $A = Id(\alpha)$ – идеал кольца R, порожденный матрицей $\alpha \in M$. Если α имеет ненулевые столбцы с какими угодно большими номерами, то централизатор $C(A)$ идеала A как в R, так и в $R^{(-)}$ нулевой, аналогично [4, Лемма 1]. Поэтому однозначно определено целое число m с условиями $M \subseteq T_{-\infty,m}$ и $M \not\subseteq T_{-\infty,m-1}$. Аналогично, существует целое число k с условием $M \subseteq T_{k,\infty}$ и $M \not\subseteq T_{k+1,\infty}$. Следовательно,

$$M \subseteq T_{-\infty,m} \cap T_{k,\infty} = T_{km}.$$

Случай $k \leq m$ приводит к противоречию с абелевостью M. Учитывая абелевость всех идеалов T_{ij} $(i > j)$ и условие максимальности M, получаем $k = m+1$ и $M = T_{m+1,m}$.

С использованием соответствия идеалов кольца Ли $R^{(-)}$ и нормальных подгрупп присоединенной группы доказательство переносится и на случай максимальных абелевых подгрупп присоединенной группы. □

Из теоремы 2 сразу же вытекает

Следствие 1. *Пусть R есть нефинитарная алгебра $NT(\Gamma, K)$ над областью целостности K и φ – автоморфизм кольца Ли $R^{(-)}$ или присоединенной группы. Тогда существует подстановка $'$ цепи Γ такая, что $\varphi(T_{i+1i}) = T_{i'+1i'}$ для всех $i \in \Gamma$.*

Теорема 3. *Если R есть кольцо $NT(\mathbb{N}, K)$ или $NT(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, K)$ над областью целостности K, то его группа автоморфизмов факторизуема $Aut\ R = (J \leftthreetimes D) \leftthreetimes \widetilde{Aut}\ K$ и совпадает с группами автоморфизмов кольца Ли $R^{(-)}$ и присоединенной группы.*

Доказательство. При $\Gamma = \mathbb{N}$ в [5, Лемма 5] показана характеристичность всех T_{i+1i} $(i \in \Gamma)$ в $R^{(-)}$. Следовательно, все подстановки $'$ из следствия 1 единичны и характеристичны

$$(3) \qquad T_{ij} = T_{ii-1} \cap T_{j+1j} = Ke_{ij} + Q_{ij}, \quad Q_{ij} = T_{ij} \cap L_{i-j+1} \ \ (i > j).$$

Несложно показывается и характеристичность идеалов $T_{m,\infty}$. Поэтому любой автоморфизм φ индуцирует автоморфизм на каждом факторе $R/T_{n+1,\infty} \simeq NT(n, K)$. Применяя факторизации (2), приходим к описанию [5, Теорема 2] групп автоморфизмов колец $R = NT(\mathbb{N}, K)$ и $R^{(-)}$, а также к их факторизации подгруппами $\widetilde{Aut}\ K$, D и J.

Цепь $\mathbb{Z}$ целых чисел допускает антиавтоморфизм

$$\tau : m \to -m \ \ (m \in \mathbb{Z}).$$

Ограничение τ на цепи $\mathbb{N}$ натуральных чисел дает ее антиизоморфизм на цепь $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ и индуцирует антиизоморфизм алгебры $NT(\mathbb{N}, K)$ на $NT(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, K)$.

Таким образом, кольцо $NT(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}, K)$ антиизоморфно $NT(\mathbb{N}, K)$ и его группа автоморфизмов допускает аналогичную факторизацию подгруппами J, D и $\widetilde{Aut}\ K$. □

Ясно, что автоморфизмы и антиавтоморфизмы любой цепи Γ образуют в симметрической группе ее подстановок подгруппу. Очевидна

Лемма 4. *Группа автоморфизмов и антиавтоморфизмов каждой из цепей $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ единична, а для цепи $\mathbb{Z}$ целых чисел есть бесконечная диэдральная группа*

$$\langle \sigma_1 \rangle \leftthreetimes \langle \tau \rangle, \quad \tau\sigma_m\tau = \sigma_m^{-1} = \sigma_{-m}, \quad \tau^2 = 1, \quad \sigma_k\sigma_m = \sigma_{m+k} \ \ (k, m \in \mathbb{Z}).$$

Обозначение τ (аналогично σ_m) сохраняем и для индуцированного автоморфизма алгебры Ли $NT(\mathbb{Z}, K)^{(-)}$, выделяя подгруппы $\langle \tau \rangle$ и $\langle \sigma_1 \rangle$ ее автоморфизмов.

Описание групп автоморфизмов нефинитарных алгебр $NT(\Gamma, K)$ завершает

Теорема 4. *Если R есть кольцо $NT(\mathbb{Z}, K)$ над областью целостности K, то*

$$Aut\ R = ((J \leftthreetimes D) \ \leftthreetimes \langle \sigma_1 \rangle) \leftthreetimes \widetilde{Aut}\ K, \quad Aut\ R^{(-)} = (Aut\ R) \ \leftthreetimes \langle \tau \rangle.$$

Доказательство. Пусть R есть алгебра $NT(\mathbb{Z}, K)$ над областью целостности K. Исследуем подстановку $'$ цепи Γ, сопоставленную следствием 1 произвольному автоморфизму φ кольца Ли $R^{(-)}$. С точностью до умножения φ на подходящий m-сдвиг σ_m, можно считать, что $0' = 0$ и $\varphi(T_{10}) = T_{10}$. Используя по модулю L_3 соотношения

$$\varphi(T_{20}) = \varphi(T_{21} * T_{10}) = T_{1+1',1'} * T_{10}, \quad T_{1+(-1)',(-1)'} * T_{10} = T_{1,(-1)'},$$

получаем $\varphi(T_{21}) = T_{21}$ или $T_{0,-1}$, так что $1' = 1$ или $1' = -1$.

С точностью до умножения φ также на τ, имеем $0' = 0$, $1' = 1$ и $(-1)' = -1$. Пусть $m > 1$ и $j' = j$ для любого j с условием $|j| < m$. Тогда $|m'| \geq m$ и

$$\varphi(T_{m+1m-1}) = T_{m'+1m'} * T_{mm-1} \mod L_3.$$

Отсюда $m' = m$ и аналогично $(-m)' = -m$. Продолжая далее, получаем единичность подстановки $'$. Поэтому φ-инвариантны сейчас все идеалы T_{i+1i} и T_{ij}, а также каждый идеал $I_m := T_{-\infty,-m}+T_{m,\infty}$. Кроме того, пересечение идеалов I_m нулевое и φ индуцирует автоморфизмы на фактор-кольцах

$$R^{(-)}/I_m \simeq NT(2m+1,K), \quad m=1,2,3,\ldots.$$

К индуцированным автоморфизмам фактор-колец можем применять при каждом m факторизации (2). Как и в [19], получаем включение в $Aut\ R$ каждого автоморфизма из $Aut\ R^{(-)}$, который фиксирует все идеалы T_{i+1i}. По доказанному и с учетом включения $\langle\sigma_1\rangle \subset Aut\ R$, приходим к факторизации $Aut\ R^{(-)} = (Aut\ R) \leftthreetimes \langle\tau\rangle$.

Обозначая через Ω подгруппу в $Aut\ R$ автоморфизмов, фиксирующих все идеалы T_{i+1i}, находим $Aut\ R = \Omega \leftthreetimes \langle\sigma_1\rangle$ и $\Omega = (\Omega_0 \leftthreetimes D) \leftthreetimes \widetilde{Aut}\ K$, где Ω_0 – подгруппа автоморфизмов кольца в R, тождественных по модулю L_2.

В нефинитарных случаях гиперцентральный ряд алгебры Ли $R^{(-)}$ стабилизируется на нулевом идеале и поэтому φ действует как внутренний автоморфизм. В случае $R = NT(n,K)$ любой гиперцентральный автоморфизм действует тождественно по модулю $Z_3 \cap (T_{21}+T_{nn-2}) = T_{n-2,1}+T_{n,3}$. Следовательно, по этому модулю φ действует как внутренний автоморфизм,

Охарактеризуем внутренние автоморфизмы по аналогии с [2], где для описания $Aut\ FNT(\Gamma,K)$ (с произвольной цепью Γ) использовались введенные Ю. М. Горчаковым [20] локально внутренние автоморфизмы.

Заметим, что сопряжение в $(R,\circ)$ матрицей $\alpha \in R$ равносильно сопряжению унитреугольной матрицей $e+\alpha$, поскольку $(e+\alpha)^{-1} = e+\alpha'$ и

$$(e+\alpha)\beta(e+\alpha)^{-1} = \beta^\alpha = \alpha\circ\beta\circ\alpha' = \beta+\alpha\beta+\beta\alpha'+\alpha\beta\alpha'.$$

В частности,

$$(4) \qquad (e_{ij})^\alpha = e_{ij} + \sum_{k=i+1}^{\infty} a_{ki}e_{kj} + \sum_{m=j+1}^{\infty} a'_{jm}e_{im} \mod T_{i+1j-1} \quad (i>j).$$

Поэтому i-й столбец матрицы α для фиксированного i совпадает с j-м столбцом матрицы $(e_{ij})^\alpha$ при любом выборе $j \le i-1$. Аналогично j-я строчка матрицы α' для фиксированного j совпадает с i-й строчкой матрицы $(e_{ij})^\alpha$ при любом выборе $i > j$. Это показывает, что действие любого автоморфизма $\varphi \in \Omega_0$ совпадает на матричных единицах с сопряжением подходящей матрицей $\alpha \in R$ и в этом случае φ есть α-сопряжение.

Требуемая в теореме факторизация группы $Aut\ R$ также доказана. □

4. Редукция локальных автоморфизмов по модулю L_2

Локальные автоморфизмы алгебр $NT(n,K)$, $n=3,4$, исследованы в [14] и [15].

Известно, что локальные автоморфизмы алгебры $NT(n,K)$ $(n>4)$ и ассоциированной алгебры Ли по модулю коммутанта L_2 тривиальны, то есть действуют по модулю L_2 как автоморфизм ([16, Теорема 3]).

На нефинитарные алгебры редукцию распространяет

Теорема 5. *Пусть $R = NT(n,K)$ $(n>4)$ или K область целостности и R – нефинитарная алгебра $NT(\Gamma,K)$. Тогда всякий локальный автоморфизм φ алгебры R или $R^{(-)}$ является тривиальным по модулю L_2.*

Доказательство. Из определения локальных автоморфизмов сразу же вытекает

Лемма 5. *Локальный автоморфизм любого кольца, с точностью до умножения на автоморфизм, оставляет неподвижным фиксированный произвольно элемент.*

С точностью до умножения φ из теоремы на автоморфизм, по лемме 5 имеем

$$\varphi(e_{21}) = e_{21}, \quad \varphi(xe_{21}) = x\varphi(e_{21}) = xe_{21} \quad (x \in K). \tag{5}$$

Пересечение подгруппы $\widetilde{Aut}\ K$ с группой автоморфизмов алгебры Ли $R^{(-)}$ единично.

Лемма 6. *Всякий локальный автоморфизм φ алгебры Ли $NT(n,K)^{(-)}$ $(n > 4)$ с условием $\varphi(e_{21}) = e_{21}$ действует по модулю L_2 как диагональный автоморфизм.*

Доказательство. Используем описания групп автоморфизмов. Любой диагональный автоморфизм из D умножает каждую матричную единицу e_{i+1i} на обратимую константу из K и однозначно определяется набором всех таких констант.

Ясно, что если идемпотентный автоморфизм τ_f из W фиксирует e_{21}, то $f = 1$ и τ_f – тождественный автоморфизм. См. также [17, Лемма 5]. Автоморфизмы из остальных подгрупп разложения (2) действуют по модулю L_2 тождественно на матричные единицы. Утверждение леммы следует сейчас из того, что автоморфизмы из JV действуют тождественно по модулю L_2. $\square$

Лемма 6 завершает доказательство теоремы для случая конечной цепи Γ. В силу (5) и теоремы 3, доказательство переносится и на случай $\Gamma = \mathbb{N}$ или $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

В силу (5) и теоремы 4, при $\Gamma = \mathbb{Z}$ локальный автоморфизм φ действует по модулю по модулю L_2 на R как автоморфизм из произведения $D \leftthreetimes \langle\sigma_1\rangle$, а на $R^{(-)}$ как автоморфизм из произведения $(D \leftthreetimes \langle\sigma_1\rangle) \leftthreetimes \langle\tau\rangle$. $\square$

References

[1] Yu.I. Merzlyakov, *Equisubgroups of unitriangular groups: a criterion for self-normalizability*, okl. Akad. Nauk, **339**:6 (1994), 732-735.

[2] V.M. Levchuk, *Some locally nilpotent rings and their adjoined groups*, Math. Notes, **42**:5 (1987), 631-641.

[3] F. Kuzucuoglu, V.M. Levchuk, *Isomorphism of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings*, Acta Appl. Math, **82**:2 (2004), 169-181.

[4] Yu.V. Bekker, V.M. Levchuk, E.A. Sotnikova, *Non-finitary Generalizations of Nil-triangular Subalgebras of Chevalley Algebras*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **29** (2019), 39-51.

[5] Yu.V. Bekker, D.V. Levchuk, E.A. Sotnikova, *Automorphisms of rings of nonfinitary niltriangular matrices*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **26**:3 (2020), 7-13.

[6] W. Holubowskii, *Algebraic properties of groups of infinite matrices*, Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, Gliwice, (2017).

[7] R. Slowik, *Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators*, Linear and Multilinear Algebra, **61**:8 (2013), 1028-1040.

[8] A.J. Hahn, D.G. James and B. Weisfeiler, *Homomorphisms of algebraic and classical groups*, Survey Can. Math. Soc., **4** (1984), 249-296.

[9] W. Holubowskii, R. Slowik, *Parabolic subgroups of groups of column-finite infinite matrices*, Linear Algebra Appl., **437**:2 (2012), 519-524.

[10] T. Becker, J. Escobar Salsedo, C. Salas, R. Turdibaev, *On local automorphisms of* $\mathfrak{sl}_n$, arXiv:1711.11297, 2018.

[11] D.R. Larson, A.R. Sourour, *Local derivations and local automorphisms of* $B(X)$, Proc. Sympos. Pure Math., **51** (1990), 187-194.

[12] V.M. Levchuk, O.V. Radchenko, *Derivations of the locally nilpotent matrix rings*, Journal of Algebra and its Applications, **9**:5 (2010), 717-724.

[13] R. Crist, *Local automorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc., **128** (2000), 1409-1414.

[14] A.P. Elisova, I.N. Zotov, V.M. Levchuk, G.S. Suleimanova, *Local automorphisms and local derivations of nilpotent matrix algebras*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **4**:1 (2011), 9-19.

[15] A.P. Elisova, *Local automorphisms of nilpotent algebras of matrices of small orders*, Russian Mathematics (Iz. VUZ), **57**:2 (2013), 40-48.

[16] A.P. Elisova, *Local derivations and local automorphisms of nilpotent algebras of matrices of small orders*, Bulletin of the Siberian State Aerospace University named after Academician M.F., **44**:4 (2012), 17-22.

[17] I.N. Zotov, *Local automorphisms of nil-triangular subalgebras of classical Lie type Chevalley algebras*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, **12**:5 (2019), 598-605.

[18] V.M. Levchuk, G.S. Suleimanova, N.D. Khodyunya, *Nonassociative enveloping algebras of Chevalley algebras*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **26**:3 (2020), 91-100.

[19] V.M. Levchuk, *Connections between a unitriangular group and certain rings. Part 2. Groups of automorphisms*, Siberian Mat. J., **24** (1983), 543-557.

[20] Yu. M. Gorchakov, *Groups with finite classes of conjugate elements*, Nauka, Moscow (1978).

Igor Nikolaevich Zotov, Vladimir Mikhailovich Levchuk
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: zotovin@rambler.ru, vlevchuk@sfu-kras.ru