S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК ???.?
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC ??X??

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИСТОЧНИКА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ.СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Э.В.Кораблина,В.Б.Левенштам

Abstract. The Cauchy problem is considered for the wave equation with an unknown right part that rapidly oscillates in time. This part is reconstructed from the three-term asymptotics of the solution given at one point of the space. In this case, an approach developed earlier by one of the authors of this article is used to solve the inverse problems with rapidly oscillating data.

Keywords: wave equation, Cauchy problem, asymptotics of a solution, reconstruction of an unknown high-frequency potential.

Введение

В работе рассматривается задача Коши для одномерного волнового уравнения, правая часть которого является произведением двух функций, одна из которых зависит от пространственной и временной переменных, а вторая—от временной и "быстрой временной" переменных. Вторая функция не известна. Исследуется вопрос о её восстановлении по заданной в некоторой точке пространства трёхчленной асимптотике решения (на самом деле, непосредственно задаётся принципиально меньше—подробнее об этом сказано в последнем абзаце введения). В работе применяется разработанный ранее вторым автором данной работы с учениками алгоритм (см. [1-5]) решения обратных коэффициентных задач с быстро осциллирующими данными.

Теории обратных задач для уравнений математической физики (включающей задачу о восстановлении источника) посвящён целый ряд монографий (см., например [6-11]) и большое число статей. Однако, обратные задачи для уравнений с быстро осциллирующими (высокочастотными) данными в классической

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20141).

теории не рассматривались. Вместе с тем обратные задачи для уравнений такого типа нередко встречаются при математическом моделировании физических, химических и иных процессов, протекающих в средах с неизвестными характеристиками, подверженных высокочастотному воздействию электромагнитных, акустических, вибрационных и т.п. полей. Это свидетельствует о необходимости развития теории обратных коэффициентных высокочастотных задач.

В работах [1-5], включая и данную работу, используется новый подход к постановке и решению обратных коэффициентных высокочастотных задач, лежащий на стыке двух дисциплин$-$асимптотические методы и обратные задачи. В связи с этим в каждой работе решение обратной задачи разбито на две части (этапы), относящиеся к соответствующим дисциплинам, и нужно следить за согласованностью (например, в смысле гладкости функций) этих частей. В этих работах исследуются обратные задачи для параболических и гиперболических уравнений с неизвестным быстро осциллирующим источником (в [1-5]$-$начально-краевые задачи; в данной работе$-$задача Коши). Специфика указанного подхода, в дополнение к сказанному выше, состоит в следующем: здесь в условии переопределения участвует не точное решение, как в классике, а лишь его частичная асимптотика, длина которой вычисляется на первом этапе решения обратной задачи; при этом необходимая для условия переопределения информация задаётся не для всех коэффициентов этой асимптотики, а лишь для некоторых "базисных" (нужные сведения для остальных коэффициентов однозначно определяются из "базисных"). Так, в данной работе в постановке обратной задачи (в условии переопределения) участвуют коэффициенты трёхчленной асимптотики, вычисленные в фиксированной точке пространства$-$это функции $q(t)$, $\phi(t)$ и $\psi(t)+\chi(t,\omega t)$, но задаются (известны) лишь функции $q(t)$ и $\chi(t,\tau)$. Поставленная обратная задача при этом однозначно разрешима.

1. Построение асимптотики и её обоснование

Пусть $T>0, \Pi=\{(x,t): x\in R, t\in[0,T]\}-$полоса, $\Omega=\{(x,t,\tau):(x,t)\in \Pi, \tau\in[0,\infty)\}-$ бесконечный прямоугольный параллелепипед. На множестве Π рассмотрим задачу Коши с большим параметром ω вида:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,\omega t) \\ u|_{t=0}=0 \\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $f(x,t,\tau)-$вещественная функция, определённая и непрерывная на множестве Ω, а также $2\pi-$периодическая по τ. Решения всех задач в данной работе понимаются в классическом смысле. Символом $F(x,t)$ обозначим среднее функции $f(x,t,\tau)$ по τ:

$$F(x,t)=<f(x,t,\tau)>\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x,t,\tau)d\tau.$$

Пусть функция $F(x,t)$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (x,t) на множестве Π. Введём в рассмотрение функцию $\phi(x,t,\tau)=f(x,t,\tau)-F(x,t)$ и будем предполагать, что она непрерывна на множестве Ω, а также имеет непрерывные производные пятого порядка по переменной x и по переменной t.

Пусть $u_\omega(x,t)-$ решение задачи (1.1). Его асимптотику можно формально строить в виде ряда:

$$u_\omega(x,t) \sim u_0(x,t) + \frac{1}{\omega}u_1(x,t) + \frac{1}{\omega^2}(u_2(x,t) + v_2(x,t,\omega t)) +$$

$$... + \frac{1}{\omega^k}(u_k(x,t) + v_k(x,t,\omega t)) + ..., \tag{1.2}$$

где функции $u_k(x,t)$ и $v_k(x,t,\tau)$ определены и непрерывны в Π и Ω соответственно, а также дважды непрерывно дифференцируемы по x и по (t,τ), причём, $v_k(x,t,\tau) - 2\pi-$периодические по τ с нулевым средним:

$$< v_k(x,t,\tau) >= 0.$$

Все рассматриваемые в работе функции вещественные.

Для формулировки теоремы введём следующие обозначения. Прежде всего определим два типа линейных однозначно разрешимых задач. К первому отнесём задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 s(x,t,\tau)}{\partial \tau^2} = \psi(x,t,\tau) \\ s(x,t,\tau+2\pi) = s(x,t,\tau) \\ < s(x,t,\tau) >= 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\psi(x,t,\tau)-$определённая и непрерывная на множестве Ω функция, $2\pi-$периодическая по $\tau \in [0;\infty)$ с нулевым средним. Как известно, решение задачи (1.3) имеет вид:

$$s(x,t,\tau) = \int_0^\tau \Big(\int_0^z \psi(x,t,s)ds - \Big\langle \int_0^\tau \psi(x,t,s)ds \Big\rangle \Big) dz -$$

$$-\Big\langle \int_0^\tau \Big(\int_0^z \psi(x,t,s)ds - \Big\langle \int_0^\tau \psi(x,t,s)ds \Big\rangle \Big) dz \Big\rangle.$$

Всюду в работе среднее $< ... >$ вычисляется по переменной τ. Ко второму типу отнесём задачу Коши для волнового уравнения второго порядка в полосе $(x,t) \in \ \Pi$ вида:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = g(x,t) \\ u(x,t)|_{t=0} = a(x) \\ u_t(x,t)|_{t=0} = b(x), \end{cases} \tag{1.4}$$

где функции $g(x,t)$ и $a(x), b(x)$ определены в полосе Π и на R соответственно, причём $g(x,t)$ и $b(x)-$непрерывно дифференцируемы по (x,t) и x соответственно, а $a(x)-$ дважды непрерывно дифференцируема. Решение задачи (1.4), как известно, выражается формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(a(x-t) + a(x+t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} b(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} g(\xi,s)d\xi.$$

Для любого положительного M определим прямоугольник $\Pi_M = \{(x,t) : |x| \le M, t \in [0,T]\}$, а также введём в рассмотрение $(k+1)-$членную $(k = 1,2)$ асимптотику решения задачи (1.1) (см. 1.2):

$$\overset{k}{u}_\omega (x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{\omega}u_1(x,t) + ... + \frac{1}{\omega^k}(u_k(x,t) + v_k(x,t,\omega t)).$$

Теорема 1. *Для каждого $M > 0$ справедлива асимптотическая формула:*

$$||u_\omega(x,t) - \overset{2}{u_\omega}(x,t)||_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \omega \to \infty,$$

где $u_n(x,t), n = 0,1,2,$ и $v_2(x,t,\tau)$– решения задач типа (1.4) и (1.3) соответственно.

Доказательство. Подставим формально ряд (1.2) в уравнения (1.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_2(x,t,\omega t)}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial^2 v_2(x,t,\omega t)}{\partial t\partial\tau} + \omega^2\frac{\partial^2 v_2(x,t,\omega t)}{\partial\tau^2}\right) - \\ -\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega}\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2(x,t,\omega t)}{\partial x^2}\right) + ... = f(x,t,\omega t) \\ \left[u_0(x,t) + \frac{1}{\omega}u_1(x,t) + \frac{1}{\omega^2}\Big(u_2(x,t) + v_2(x,t,\omega t)\Big) + ...\right]\Big|_{t=0} = 0 \\ \left[\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial v_2(x,t,\omega t)}{\partial t} + \omega\frac{\partial v_2(x,t,\omega t)}{\partial\tau}\right) + ...\right]\Big|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

В каждом из трёх последних равенств приравняем коэффициенты поочерёдно при степенях $\omega^0, \omega^{-1}, \omega^{-2}, \omega^{-3}$, а затем применим к полученным уравнениям операцию усреднения по $\tau, \tau = \omega t$. В результате придём к набору задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} = F(x,t) \\ u_0(x,t)|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0; \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial \tau^2} = \phi(x,t,\tau) \\ v_2(x,t,\tau+2\pi) = v_2(x,t,\tau) \\ < v_2(x,t,\tau) >= 0; \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ u_1(x,t)|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial\tau}|_{t,\tau=0} = 0; \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial \tau^2} = -2\frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial t\partial\tau} \\ v_3(x,t,\tau+2\pi) = v_3(x,t,\tau) \\ < v_3(x,t,\tau) >= 0; \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ u_2(x,t)|_{t=0} + v_2(x,t,\tau)|_{t,\tau=0} = 0 \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial t}|_{t,\tau=0} + \frac{\partial v_3(x,t,\tau)}{\partial\tau}|_{t,\tau=0} = 0; \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial t\partial\tau} \\ v_4(x,t,\tau+2\pi) = v_4(x,t,\tau) \\ < v_4(x,t,\tau) >= 0; \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ u_3(x,t)|_{t=0} + v_3(x,t,\tau)|_{t,\tau=0} = 0 \\ \frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial v_3(x,t,\tau)}{\partial t}|_{t,\tau=0} + \frac{\partial v_4(x,t,\tau)}{\partial\tau}|_{t,\tau=0} = 0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Положим $\overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t) = \overset{3}{u_\omega}(x,t) + \frac{1}{\omega^4}v_4(x,t,\omega t)$. Тогда:

$$\begin{cases} (\overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t))_{tt} - (\overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t))_{xx} = f(x,t,\omega t) + z(x,t,\omega t) \\ \overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t)|_{t=0} = w(x) \\ (\overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t))_t|_{t=0} = r(x), \end{cases} \quad (1.12),$$

где функции $z(x,t,\tau)$, $w(x)$ и $v(x)$ имеют вид:

$$z(x,t,\tau)=\frac{1}{\omega^3}\Big(\frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial t\partial\tau}\Big)+\frac{1}{\omega^4}\Big(\frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial x^2}\Big),$$

$$w(x)=\frac{1}{\omega^4}v_4(x,0,0),$$

$$r(x)=\frac{1}{\omega^4}\frac{\partial v_4(x,t,\tau)}{\partial t}\Big|_{t,\tau=0}.$$

Отсюда вытекают асимптотические равенства:

$$z(x,t,\tau)=O(\omega^{-3}),\omega\to\infty,\ \text{равномерно относительно}\ (x,t,\tau),\ (x,t,\tau)\in\Omega,$$

$$w(x)=O(\omega^{-4}),\omega\to\infty,\ \text{равномерно относительно}\ x,\ |x|\le M,$$

$$r(x)=O(\omega^{-4}),\omega\to\infty,\ \text{равномерно относительно}\ x,\ |x|\le M.$$

Таким образом:

$$\| u_\omega(x,t)-\overset{2}{u}_\omega(x,t)\|_{C(\Pi_M)}\le\| u_\omega(x,t)-\overset{3}{\hat{u}}_\omega(x,t)\|_{C(\Pi_M)}+\|\overset{3}{\hat{u}}_\omega(x,t)-\overset{2}{u}_\omega(x,t)\|_{C(\Pi_M)}=$$

$$=O(\omega^{-3})+O(\omega^{-3})=O(\omega^{-3}),\omega\to\infty$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы 1. □

2. Обратная задача

Пусть T и $\Pi-$те же, что в пункте 1. В полосе Π рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(x,t)r(t,\omega t)\\ u|_{t=0}=0\\ u_t|_{t=0}=0\end{cases}\tag{2.1}$$

Относительно функций $f(x,t)$ и $r(t,\tau)$ сделаем следующие предположения. Функция $f(x,t)$ определена и непрерывна на множестве Π и имеет на нём непрерывные производные пятого порядка по переменной x и по переменной t. Функция $r(t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве $Q=\{(t,\tau):t\in[0,T],\tau\in[0;\infty)\}$, а также представима в виде $r(t,\tau)=r_0(t)+r_1(t,\tau)$, где функция $r_0(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;T]$, а $r_1(t,\tau)$ непрерывна на множестве Q и имеет непрерывные производные пятого порядка по переменной t, а также $2\pi-$периодическая по τ с нулевым средним:

$$<r_1(t,\tau)>=0$$

Функцию $r(t,\tau)$, удовлетворяющую указанным выше условиям, будем, для краткости, называть функцией класса (I). В данном пункте функция f считается известной, а $r-$неизвестной.

Пусть заданы следующие объекты: точка x_0, для которой $f(x_0,t)\neq 0$, $t\in[0,T]$; функция $q(t)$ непрерывная, трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,T]$ и удовлетворяющая условию $q(0)=q'(0)=0$; функция $\chi(t,\tau)$ непрерывная на множестве Q и $2\pi-$периодическая по τ с нулевым средним, дважды непрерывно дифференцируемая по переменной τ, причём $\chi''_{\tau^2}(t,\tau)$ имеет непрерывные производные пятого порядка по переменной t. Введём ещё две функции

$$\phi(t)=\tilde{u}_1(x_0,t),$$

$$\psi(t)=\tilde{u}_2(x_0,t),$$

где $\tilde{u}_1(x,t), \tilde{u}_2(x,t)-$решения задач (1.7)-(1.9), в которых положено $v_2(x,t,\tau) = \frac{f(x,t)\chi(t,\tau)}{f(x_0,t)}$.

Определение. Задачу о нахождении функции $r(t,\tau)$ класса (I), при которой решение задачи (2.1) на отрезке $(x_0,t), t\in[0,T]$, удовлетворяет условию:

$$\Big|\Big|u_\omega(x_0,t) - q(t) - \frac{1}{\omega}\phi(t) - \frac{1}{\omega^2}(\psi(t) + \chi(t,\omega t))\Big|\Big|_{C([0,T])} = O(\omega^{-3}), \omega \to \infty, \quad (2.3)$$

будем называть обратной задачей.

Теорема 2. *Обратная задача имеет единственное решение.*

Доказательство. Согласно теореме 1 решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет условию

$$\Big|\Big|u_\omega(x,t) - u_0(x,t) - \frac{1}{\omega}u_1(x,t) - \frac{1}{\omega^2}(u_2(x,t) + v_2(x,t,\omega t))\Big|\Big|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \omega \to \infty,$$

где u_i, v_i- те же, что в пункте 1. Отсюда, с учётом (2.3), следует

$$u_0(x_0,t) + \frac{1}{\omega}u_1(x_0,t) + \frac{1}{\omega^2}(u_2(x_0,t) + v_2(x_0,t,\omega t)) =$$
$$= q(t) + \frac{1}{\omega}\phi(t) + \frac{1}{\omega^2}(\psi(t) + \chi(t,\omega t)) + O(\omega^{-3}) \quad (2.4)$$

Приравняем коэффициенты при степенях $\omega^0, \omega^{-1}, \omega^{-2}$ в равенстве (2.4). Отсюда, с учётом операции усреднения по $\tau, \tau = \omega t$, получим равенства:

$$u_0(x_0,t) = q(t); \quad (2.5)$$

$$u_1(x_0,t) = \phi(t); \quad (2.6)$$

$$u_2(x_0,t) = \psi(t); \quad (2.7)$$

$$v_2(x_0,t,\tau) = \chi(t,\tau). \quad (2.8)$$

В силу пункта 1

$$u_0(x_0,t) = \frac{1}{2}\int_0^t r_0(s)\int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi,s)d\xi ds.$$

Отсюда и из (2.5) следует равенство:

$$q(t) = \frac{1}{2}\int_0^t r_0(s)\int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi,s)d\xi ds.$$

Продифференцировав его дважды по t, получим уравнение Вольтерра 2 рода:

$$q''(t) = r_0(t)f(x_0,t) + \frac{1}{2}\int_0^t r_0(s)[f'_x(x_0+(t-s),s) - f'_x(x_0-(t-s),s)]ds,$$

из которого следует существование и единственность решения $r_0 \in C^1(0,T)$. Теперь продифференцируем (2.8) по переменной τ дважды. В силу (1.6) получим:

$$f(x_0,t)r_1(t,\tau) = \frac{\partial^2\chi(t,\tau)}{\partial\tau^2}$$

Таким образом, функция $r_1(t,\tau)$ также определяется единственным образом. В силу наложенных условий на функции $q(t)$ и $\chi(t,\tau)$, полученная функция $r(t,\tau) = r_0(t) + r_1(t,\tau)$, принадлежит классу (I).

Нетрудно показать, что при найденной функции $r(t,\tau)$ решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет требуемой асимптотической формуле (2.3).Теорема 2 доказана. $\square$

References

[1] Babich P. V., Levenshtam V. B. Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms. *Asymptotic Analysis*, 2016, vol. 97, pp. 329–336.

[2] Babich P. V., Levenshtam V. B., Prika S. P. Recovery of a rapidly oscillating source in the heat equation from solution asymptotics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 57, no. 12, pp. 1908–1918.

[3] Babich P. V., Levenshtam V. B. Recovery of a rapidly oscillating absolute term in the multidimensional hyperbolic equation. *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 4, pp. 489–497.

[4] Levenshtam V. B. Parabolic equations with large parameters. Inverse problems.—Mathematical Notes, 2020.—P.107 ,№3

[5] Babich P. V., Levenshtam V. B. Inverse Problem in the Multidimensional Hyperbolic Equation with Rapidly Oscillating Absolute Term. *Trends in Mathematics—book of Operator Theory and Differential Equations edited by Anatole G.Kusraev, Zhanna D. Totieva*, Birkhauser, 2021,pp.7-25 [in English]

[6] Lavret'ev M. M., Reznitskaya K. G., Yakhno V. G. One-Dimensional Inverse Problems of Mathematical Physics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Novosibirsk, Nauka, 1982. [in Russian]

[7] Romanov V. G. Inverse Problems of Mathematical Physics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Moscow, Nauka, 1984. [in Russian]

[8] Denisov A. M. Introduction to the Theory of Inverse Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Moscow, Nauka, 1994. [in Russian]

[9] Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Novosibirsk, Sib. Nauchn. Izd., 2008. [in Russian]

[10] Prilepko A. U., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, N.Y.:Marsel Dekker., 2000. [in English]

[11] Vatulyan A. O. Inverse problems in mechanics of deformable solids. Phizmatlit .M., 2007 [in Russian]

Ella Viktorovna Korablina
Mathematical Institute. V.A. Steklov of the Russian Academy of Sciences,
st. Gubkin, 8,
119991, Moscow, Russia
E-mail address: `ellakorablina1998@gmail.com`

Valery Borisovich Levenshtam
Mathematical Institute. V.A. Steklov of the Russian Academy of Sciences,
st. Gubkin, 8,
119991, Moscow, Russia
E-mail address: `vlevenshtam@yandex.ru`