S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК ???.?
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC ??X??

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОТЕНЦИАЛА ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ.СЛУЧАЙ ЗАДАЧИ КОШИ

Э.В.Кораблина,В.Б.Левенштам

Abstract. The Cauchy problem is considered for the wave equation with an unknown right part that rapidly oscillates in time. This part is reconstructed from the three-term asymptotics of the solution given at one point of the space. In this case, an approach developed earlier by one of the authors of this article is used to solve the inverse problems with rapidly oscillating data.

Keywords: wave equation, Cauchy problem, asymptotics of a solution, reconstruction of an unknown high-frequency potential.

Введение

В работе рассматривается задача Коши для одномерного волнового уравнения, правая часть которого является быстро осциллирующей по времени, но неизвестна. Исследован вопрос о её восстановлении по заданной в некоторой точке пространства трёхчленной асимптотике решения. При этом используется разработанный ранее одним из авторов данной работы алгоритм (см. [1-4]) решения обратных коэффициентных задач с быстро осциллирующими данными.

Молодой, но уже разработанной с большой полнотой теории обратных задач посвящён целый ряд монографий (см., например, [5-8]) и большое число статей. Однако, задачи с быстро осциллирующими данными в классической теории не рассматривались. В данной работе правая часть волнового уравнения является произведением двух функций, одна из которых зависит от пространственной и временной переменных, а вторая (высокочастотная)– от временной

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20141).

и быстрой временной переменных. Вторая функция не известна. Для её определения задано дополнительное условие$-$трёхчленная асимптотика решения, вычисленная в некоторой фиксированной точке пространства. Отметим, что в этом заключается основное отличие данной постановки обратной задачи от классики, где дополнительные условия ставятся на точное решения. В работе доказана теорема о существовании и единственности решения рассматриваемой обратной задачи. Доказательство опирается на предварительно построенную и обоснованную трёхчленную асимптотику решения задачи Коши для волнового уравнения с известными входными данными.

1. Построение асимптотики и её обоснование

Пусть $T>0, \Pi=\{(x,t): x\in R, t\in[0,T]\}-$полоса, $\Omega=\{(x,t,\tau):(x,t)\in \Pi, \tau\in[0,\infty)\}-$ бесконечный прямоугольный параллелепипед. На множестве Π рассмотрим задачу Коши с большим параметром ω вида:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,\omega t) \\ u|_{t=0}=0 \\ u_t|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $f(x,t,\tau)-$вещественная функция, определённая и непрерывная на множестве Ω, а также $2\pi-$периодическая по τ. Решения всех задач в данной работе понимаются в классическом смысле. Символом $F(x,t)$ обозначим среднее функции $f(x,t,\tau)$ по τ:

$$F(x,t)=<f(x,t,\tau)>\equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,t,\tau)d\tau.$$

Пусть функция $F(x,t)$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (x,t) на множестве Π. Введём в рассмотрение функцию $\phi(x,t,\tau)=f(x,t,\tau)-F(x,t)$ и будем предполагать, что она непрерывна на множестве Ω, а также пять раз непрерывно дифференцируема по переменной x и по переменной t.

Пусть $u_\omega(x,t)-$ решение задачи (1.1). Его асимптотику можно строить в виде ряда:

$$u_\omega(x,t)\sim u_0(x,t)+\frac{1}{\omega}u_1(x,t)+\frac{1}{\omega^2}(u_2(x,t)+v_2(x,t,\omega t))+ \\ ...+\frac{1}{\omega^k}(u_k(x,t)+v_k(x,t,\omega t))+..., \tag{1.2}$$

где функции $u_k(x,t)$ и $v_k(x,t,\tau)$ определены и непрерывны в Π и Ω соответственно, а также дважды непрерывно дифференцируемы по x и по (t,τ), причём, $v_k(x,t,\tau)-2\pi-$периодические по τ с нулевым средним:

$$<v_k(x,t,\tau)>=0.$$

Все рассматриваемые в работе функции вещественные.

Для формулировки теоремы введём следующие обозначения. Прежде всего определим два типа линейных однозначно разрешимых задач. К первому отнесём задачу для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 s(x,t,\tau)}{\partial\tau^2}=\psi(x,t,\tau) \\ s(x,t,\tau+2\pi)=s(x,t,\tau) \\ <s(x,t,\tau)>=0, \end{cases} \tag{1.3}$$

где $\psi(x,t,\tau)-$определённая и непрерывная на множестве Ω функция, $2\pi-$периодическая по $\tau\in[0;\infty)$ с нулевым средним. Как известно, решение задачи (1.3) имеет вид:

$$s(x,t,\tau)=\int_0^\tau\Big(\int_0^z\psi(x,t,s)ds-\Big\langle\int_0^\tau\psi(x,t,s)ds\Big\rangle\Big)dz-$$
$$-\Big\langle\int_0^\tau\Big(\int_0^z\psi(x,t,s)ds-\Big\langle\int_0^\tau\psi(x,t,s)ds\Big\rangle\Big)dz\Big\rangle.$$

Всюду в работе среднее $<\ ...\ >$ вычисляется по переменной τ. Ко второму типу отнесём задачу Коши для волнового уравнения второго порядка в полосе $(x,t)\in\ \Pi$ вида:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=g(x,t)\\ u(x,t)|_{t=0}=a(x)\\ u_t(x,t)|_{t=0}=b(x),\end{cases}\tag{1.4}$$

где функции $g(x,t)$ и $a(x),b(x)$ определены в полосе Π и на R соответственно, причём $g(x,t)$ и $b(x)-$непрерывно дифференцируемы по (x,t) и x соответственно, а $a(x)-$ дважды непрерывно дифференцируема. Решение задачи (1.4), как известно, выражается формулой Даламбера:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(a(x-t)+a(x+t))+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}b(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int_0^t ds\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)}g(\xi,s)d\xi.$$

Для любого положительного M определим прямоугольник $\Pi_M=\{(x,t):|x|\le M,t\in[0,T]\}$, а также введём в рассмотрение $(k+1)-$членную $(k=1,2)$ асимптотику решения задачи (1.1) (см. 1.2):

$$\overset{k}{u}_\omega(x,t)=u_0(x,t)+\frac{1}{\omega}u_1(x,t)+...+\frac{1}{\omega^k}(u_k(x,t)+v_k(x,t,\omega t)).$$

Теорема 1. *Для каждого $M>0$ справедлива асимптотическая формула:*

$$||u_\omega(x,t)-\overset{2}{u}_\omega(x,t)||_{C(\Pi_M)}=O(\omega^{-3}),\omega\to\infty,$$

где $u_n(x,t),n=0,1,2,$ и $v_2(x,t,\tau)-$ решения задач типа (1.4) и (1.3) соответственно.

Доказательство. Подставим формально ряд (1.2) в уравнения (1.1):

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial t^2}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2u_1(x,t)}{\partial t^2}+\frac{1}{\omega^2}\Big(\frac{\partial^2u_2(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2v_2(x,t,\tau)}{\partial t^2}+2\omega\frac{\partial^2v_2(x,t,\tau)}{\partial t\partial\tau}+\omega^2\frac{\partial^2v_2(x,t,\tau)}{\partial\tau^2}\Big)-\\ -\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{\omega}\frac{\partial^2u_1(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{\omega^2}\Big(\frac{\partial^2u_2(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_2(x,t,\tau)}{\partial x^2}\Big)+...=f(x,t,\tau)\\ \Big[u_0(x,t)+\frac{1}{\omega}u_1(x,t)+\frac{1}{\omega^2}\Big(u_2(x,t)+v_2(x,t,\tau)\Big)+...\Big]\Big|_{t,\tau=0}=0\\ \Big[\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{\omega}\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}+\frac{1}{\omega^2}\Big(\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial t}+\omega\frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial\tau}\Big)+...\Big]\Big|_{t,\tau=0}=0.\end{cases}$$

В каждом из трёх последних равенств приравняем коэффициенты поочерёдно при степенях $\omega^0,\omega^{-1},\omega^{-2},\omega^{-3}$, а затем применим к полученным уравнениям операцию усреднения по $\tau,\tau=\omega t$. В результате придём к набору задач:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial x^2}=F(x,t)\\ u_0(x,t)|_{t=0}=0\\ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0;\end{cases}\tag{1.5}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial \tau^2} = \phi(x,t,\tau) \\ v_2(x,t,\tau+2\pi) = v_2(x,t,\tau) \\ < v_2(x,t,\tau) >= 0; \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ u_1(x,t)|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial \tau}|_{t,\tau=0} = 0; \end{cases} \tag{1.7}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial \tau^2} = -2\frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial t \partial \tau} \\ v_3(x,t,\tau+2\pi) = v_3(x,t,\tau) \\ < v_3(x,t,\tau) >= 0; \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ u_2(x,t)|_{t=0} + v_2(x,t,\tau)|_{t,\tau=0} = 0 \\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial t}|_{t,\tau=0} + \frac{\partial v_3(x,t,\tau)}{\partial \tau}|_{t,\tau=0} = 0; \end{cases} \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial t^2} - 2\frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial t \partial \tau} \\ v_4(x,t,\tau+2\pi) = v_4(x,t,\tau) \\ < v_4(x,t,\tau) >= 0; \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = 0 \\ u_3(x,t)|_{t=0} + v_3(x,t,\tau)|_{t,\tau=0} = 0 \\ \frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t}|_{t=0} + \frac{\partial v_3(x,t,\tau)}{\partial t}|_{t,\tau=0} + \frac{\partial v_4(x,t,\tau)}{\partial \tau}|_{t,\tau=0} = 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

Положим $\overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t) = \overset{3}{u_\omega}(x,t) + \frac{1}{\omega^4} v_4(x,t,\omega t)$. Тогда:

$$\begin{cases} (\overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t))_{tt} - (\overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t))_{xx} = f(x,t,\omega t) + z(x,t,\omega t) \\ \overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t)|_{t=0} = w(x) \\ (\overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t))_t|_{t=0} = r(x), \end{cases} \tag{1.12},$$

где функции $z(x,t,\tau), w(x)$ и $r(x)$ имеют вид:

$$z(x,t,\tau) = \frac{1}{\omega^3}\Big(\frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial t \partial \tau}\Big) + \frac{1}{\omega^4}\Big(\frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_4(x,t,\tau)}{\partial x^2}\Big),$$

$$w(x) = \frac{1}{\omega^4} v_4(x,0,0),$$

$$r(x) = \frac{1}{\omega^4} \frac{\partial v_4(x,t,\tau)}{\partial t}\Big|_{t,\tau=0}.$$

Отсюда вытекают асимптотические равенства:

$$z(x,t,\tau) = O(\omega^{-3}), \omega \to \infty, \text{ равномерно относительно } (x,t,\tau),\ (x,t,\tau) \in \Omega,$$

$$w(x) = O(\omega^{-4}), \omega \to \infty, \text{ равномерно относительно } x,\ |x| \le M,$$

$$r(x) = O(\omega^{-4}), \omega \to \infty, \text{ равномерно относительно } x,\ |x| \le M.$$

Таким образом:

$$\| u_\omega(x,t) - \overset{2}{u_\omega}(x,t) \|_{C(\Pi_M)} \le \| u_\omega(x,t) - \overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t) \|_{C(\Pi_M)} + \| \overset{3}{\hat{u}_\omega}(x,t) - \overset{2}{u_\omega}(x,t) \|_{C(\Pi_M)} =$$

$$= O(\omega^{-3}) + O(\omega^{-3}) = O(\omega^{-3}), \omega \to \infty$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы 1. □

2. Обратная задача

Пусть T и Π−те же, что в пункте 1. В полосе Π рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)r(t,\omega t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Относительно функций $f(x,t)$ и $r(t,\tau)$ сделаем следующие предположения. Функция $f(x,t)$ определена и непрерывна на множестве Π и имеет на нём непрерывные производные пятого порядка по переменной x и по переменной t. Функция $r(t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве $Q = \{(t,\tau) : t \in [0,T], \tau \in [0;\infty)\}$, а также представима в виде $r(t,\tau) = r_0(t)+r_1(t,\tau)$, где функция $r_0(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0;T]$, а $r_1(t,\tau)$ непрерывна на множестве Q и пять раз непрерывно дифференцируема по переменной t, а также 2π−периодическая по τ с нулевым средним:

$$< r_1(t,\tau) >= 0$$

Функцию $r(t,\tau)$, удовлетворяющую указанным выше условиям, будем, для краткости, называть функцией класса (I). В данном пункте функция f считается известной, а r−неизвестной.

Пусть заданы следующие объекты: точка x_0, для которой $f(x_0,t) \neq 0$, $t \in [0,T]$; функция $q(t)$ непрерывная, трижды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,T]$ и удовлетворяющая условию $q(0) = q'(0) = 0$; функция $\chi(t,\tau)$ непрерывная на множестве Q и 2π−периодическая по τ с нулевым средним, дважды непрерывно дифференцируемая по переменной τ, причём $\chi''_{\tau^2}(t,\tau)$ пять раз непрерывно дифференцируема по переменной t. Введём ещё две функции

$$\phi(t) = \tilde{u}_1(x_0,t),$$

$$\psi(t) = \tilde{u}_2(x_0,t),$$

где $\tilde{u}_1(x,t), \tilde{u}_2(x,t)$−решения задач (1.7)-(1.9), в которых положено $v_2(x,t,\tau) = \frac{f(x,t)\chi(t,\tau)}{f(x_0,t)}$.

Определение. Задачу о нахождении функции $r(t,\tau)$ класса (I), при которой решение задачи (2.1) на отрезке $(x_0,t), t \in [0,T]$, удовлетворяет условию:

$$\Big|\Big|u_\omega(x_0,t) - q(t) - \frac{1}{\omega}\phi(t) - \frac{1}{\omega^2}(\psi(t) + \chi(t,\omega t))\Big|\Big|_{C([0,T])} = O(\omega^{-3}), \omega \to \infty, \tag{2.3}$$

будем называть обратной задачей.

Теорема 2. *Обратная задача имеет единственное решение.*

Доказательство. Согласно теореме 1 решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет условию

$$\Big|\Big|u_\omega(x,t) - u_0(x,t) - \frac{1}{\omega}u_1(x,t) - \frac{1}{\omega^2}(u_2(x,t) + v_2(x,t,\omega t))\Big|\Big|_{C(\Pi_M)} = O(\omega^{-3}), \omega \to \infty,$$

где u_i, v_i− те же, что в пункте 1. Отсюда, с учётом (2.3), следует

$$u_0(x_0,t) + \frac{1}{\omega}u_1(x_0,t) + \frac{1}{\omega^2}(u_2(x_0,t) + v_2(x_0,t,\omega t)) =$$

$$= q(t) + \frac{1}{\omega}\phi(t) + \frac{1}{\omega^2}(\psi(t) + \chi(t,\omega t)) + O(\omega^{-3}) \tag{2.4}$$

Приравняем коэффициенты при степенях $\omega^0, \omega^{-1}, \omega^{-2}$ в равенстве (2.4). Отсюда, с учётом операции усреднения по $\tau, \tau = \omega t$, получим равенства:

$$u_0(x_0, t) = q(t); \tag{2.5}$$

$$u_1(x_0, t) = \phi(t); \tag{2.6}$$

$$u_2(x_0, t) = \psi(t); \tag{2.7}$$

$$v_2(x_0, t, \tau) = \chi(t, \tau). \tag{2.8}$$

В силу пункта 1

$$u_0(x_0, t) = \frac{1}{2}\int_0^t r_0(s)\int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi, s)d\xi ds.$$

Отсюда и из (2.5) следует равенство:

$$q(t) = \frac{1}{2}\int_0^t r_0(s)\int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi, s)d\xi ds.$$

Продифференцировав его дважды по t, получим уравнение Волтерра 2 рода:

$$q''(t) = r_0(t)f(x_0, t) + \frac{1}{2}\int_0^t r_0(s)[f'_x(x_0 + (t-s), s) - f'_x(x_0 - (t-s), s)]ds,$$

из которого следует существование и единственность решения $r_0 \in C^1(0, T)$. Теперь продифференцируем (2.8) по переменной τ дважды. В силу (1.6) получим:

$$f(x_0, t)r_1(t, \tau) = \frac{\partial^2 \chi(t, \tau)}{\partial \tau^2}$$

Таким образом, функция $r_1(t, \tau)$ также определяется единственным образом. В силу наложенных условий на функции $q(t)$ и $\chi(t, \tau)$, полученная функция $r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau)$, принадлежит классу (I).

Нетрудно показать, что при найденной функции $r(t, \tau)$ решение задачи Коши (2.1) удовлетворяет требуемой асимптотической формуле (2.3).Теорема 2 доказана. $\square$

References

[1] Babich P. V., Levenshtam V. B. Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms. *Asymptotic Analysis*, 2016, vol. 97, pp. 329–336.

[2] Babich P. V., Levenshtam V. B., Prika S. P. Recovery of a rapidly oscillating source in the heat equation from solution asymptotics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1908–1918. [in Russian]

[3] Babich P. V., Levenshtam V. B. Recovery of a rapidly oscillating absolute term in the multidimensional hyperbolic equation. *Mathematical Notes*, 2018, vol. 104, no. 4, pp. 489–497. [in Russian]

[4] Levenshtam V. B. Parabolic equations with large parameters. Inverse problems.—Mathematical Notes, 2020.—V.107 ,№3,pp.452-463 [in Russian]

[5] Lavret'ev M. M., Reznitskaya K. G., Yakhno V. G. One-Dimensional Inverse Problems of Mathematical Physics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Novosibirsk, Nauka, 1982. [in Russian]

[6] Romanov V. G. Inverse Problems of Mathematical Physics. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Moscow, Nauka, 1984. [in Russian]

[7] Denisov A. M. Introduction to the Theory of Inverse Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Moscow, Nauka, 1994. [in Russian]

[8] Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, Novosibirsk, Sib. Nauchn. Izd., 2008. [in Russian]

Ella Viktorovna Korablina
Mathematical Institute. V.A. Steklov of the Russian Academy of Sciences,
st. Gubkin, 8,
119991, Moscow, Russia
E-mail address: ellakorablina1998@gmail.com

Valery Borisovich Levenshtam
Mathematical Institute. V.A. Steklov of the Russian Academy of Sciences,
st. Gubkin, 8,
119991, Moscow, Russia
E-mail address: vlevenshtam@yandex.ru