S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том ??, стр. ??–?? (20??) УДК 517.946

DOI 10.33048/semi.2020.xx.xxx MSC 35J46

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

И.Э. НИЁЗОВ

Abstract. Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы моментной теории упругости в пространственной области по значениям решения и значениям его напряжений на части границы этой области, т.е. задача Коши. Приводится критерий разрешимости поставленной завдачи.

Keywords: Cauchy problem, system theory of elasticity, elliptic system, ill-posed problem, Carleman matrix, regularization, Carleman's formula.

1. Введение

В работе предлагается явная формула восстановления решения систем моментной теории упругости в пространственной области по его значениям и значениям его напряжений на части границы этой области и приводится критерий разрешимости поставленной задачи.

Решение задачи Коши для одномерной системы уравнений Коши-Римана впервые получил Т. Карлеман в 1926 г [1]. Им была предложена идея введения в интегральную формулу Коши дополнительной функции, позволяющей путем предельного перехода погасить влияние интегралов по части границы, где значения продолжаемой функции не заданы. Идею Карлемана развили Г.М.Голузин и В.И. Крылов (1933) [2], которые нашли общий способ получения формул Карлемана для одномерной системы уравнений Коши-Римана.

На основе результатов Карлемана и Голузина-Крылова М.М. Лаврентьев ввел понятие функции Карлемана для одномерной системы уравнений Коши-Римана. Метод Лаврентьева [3] состоит в аппроксимации ядра Коши на дополнительной части границы области вне носителя данных задачи Коши.

Niyozov, I.E., On the solvability of the Cauchy problem for a system of the moment theory of elasticity.

Поступила ?? г., опубликована ?? г.

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа - это фундаментальное решение, зависящее от положительного числового параметра, стремящегося к нулю вместе со своей производной по нормали на части границы области вне носителя данных Коши, когда параметр стремится к нулю. При помощи функции Карлемана и интегральной формулы Грина получается формула Карлемана, которая дает точное решение задачи Коши, когда данные заданы точно. Построение функции Карлемана позволяет также строить регуляризацию, когда данные Коши заданы приближенно. Существование функции Карлемана следует из аппроксимационной теоремы С.Н.Мергеляна (1956).

В 1959 г. В.А.Фок и Ф.М.Куни нашли применение формулы Карлемана для одномерной системы уравнений Коши-Римана. В случае, когда часть границы области является отрезком действительной оси, используя формулу Карлемана, они нашли критерий разрешимости задачи Коши для системы уравнений Коши-Римана на плоскости. Аналог формулы Карлемана и критерии разрешимости задачи Коши для аналитических функций многих переменных получен в работе А.А.Гончара (1985), Л.А.Айзенберга (1990), А.М.Кытманова (1991), для гармонических функций в работе Ш.Я.Ярмухамедова, Н.Н.Тарханова (1995).

Система уравнений теории упругости эллиптическая. Соответственно задача Коши для таких систем является некорректной. Решение может существовать, тогда оно единственно, но не устойчиво, т.е. решение не устойчиво относительно малого изменения данных. В некорректных задачах существование решения и принадлежности её к классу корректности предполагается в априори.

В данной работе для решения поставленной задачи применяется метод "функция Карлемана"[2].

Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ точки вещественного евклидово пространство R^3, $D-$ограниченная односвязная область в R^3, с кусочно-гладкой границей ∂D состоящей из гладкой поверхности S лежащей в полупространстве $y_3>0$ и плоской части $\partial D \backslash S : y_3=0$.

Пусть шести компонентный вектор-функция $U(x)=(u_1(x),u_2(x),u_3(x),$ $v_1(x),v_2(x),v_3(x))=(u(x),v(x))$ удовлетворяет в области D системы уравнений моментной теории упругости [4]:

$$(1)\qquad \begin{cases} (\mu+\alpha)\Delta u+(\lambda+\mu-\alpha) graddiv\, u+2\alpha\, rotv+\rho\omega^2 u+\rho F=0, \\ (\nu+\beta)\Delta v+(\varepsilon+\nu-\beta) graddiv\, v+2\alpha\, rotu-4\alpha v+\theta\omega^2 v+\rho G=0, \end{cases}$$

где $F-$ массовая сила, $G-$ массовый момент, $\omega-$ частота колебания, $\rho-$ плотность среды, $\theta-$ положительный коэффициент, а коэффициенты $\lambda,\ \mu,\ \nu,\ \beta,\ \varepsilon,\ \alpha$ характеризующие среды, удовлетворяют условиям $\mu>0,\ 3\lambda+2\mu>0,\ \alpha>0,\quad 3\varepsilon+2\nu>0,\ \beta>0.$

Для краткости изложения в дальнейшем систему (1) удобно записать в матричной форме. С этой целью введем матричный дифференциальный оператор

$$M=M(\partial_x)=\left\| \begin{matrix} M^{(1)} & M^{(2)} \\ M^{(3)} & M^{(4)} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$M^{(i)}=\left\| M_{kj}^{(i)} \right\|_{3\times 3}, i=1,2,3,4,$$

причем

$$M_{kj}^{(1)} = \delta_{kj}(\mu+\alpha)(\triangle+\omega_1^2) + (\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j},$$

$$M_{kj}^{(2)} = M_{kj}^{(3)} = -2\alpha \sum_{p=1}^{3} \varepsilon_{kjp} \frac{\partial}{\partial x_p},$$

$$M_{kj}^{(4)} = \delta_{kj}(\nu+\beta)(\triangle+\omega_2^2) + (\varepsilon+\nu-\beta)\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j},$$

здесь $\omega_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu+\alpha}$, $\omega_2^2 = \frac{\theta\,\omega^2 - 4\alpha}{\nu+\beta}$, $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если k=j} \\ 0, & \text{если } k \neq j, \end{cases}$ ε_{kjp}-так называемый ε- тензор или символ Леви - Чивита, определяемый равенствами

$$\varepsilon_{kjp} = \begin{cases} 0, \text{если по крайней мере два из трех индексов } k, j, p \text{ равны} \\ 1, \text{если } (k, j, p) \text{ содержит четное число перестановок чисел } (1, 2, 3) \\ -1, \text{если} (k, j, p) \text{ содержит нечетное число перестановок чисел } (1, 2, 3). \end{cases}$$

Тогда уравнение упруго-колебательного состояние среды D, соответствующего массовой силе F и массовому моменту G иммет вид

$$M(\partial_x)U(x) + \rho F = 0, \tag{2}$$

где $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$.

Теперь введем оператор напряжения систем моментной теории упругости. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)-$ точка среды, а $n(x) = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))-$произволный единичный вектор в точке x. Введем матричный дифференциальный оператор

$$T(\partial_x, n(x)) = \left\| \begin{matrix} T^{(1)}(\partial_x, n(x)) & T^{(2)}(\partial_x, n(x)) \\ T^{(3)}(\partial_x, n(x)) & T^{(4)}(\partial_x, n(x)) \end{matrix} \right\|,$$

$$T^{(i)}(\partial_x, n(x)) = \left\| T_{kj}^{(i)}(\partial_x, n(x)) \right\|_{3\times 3}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$T_{kj}^{(1)}(\partial_x, n(x)) = \lambda n_k \frac{\partial}{\partial x_j} + (\mu-\alpha) n_j(x) \frac{\partial}{\partial x_k} + (\mu+\alpha)\delta_{kj}\frac{\partial}{\partial n(x)}, \quad k, j = 1, 2, 3,$$

$$T_{kj}^{(2)}(\partial_x, n(x)) = -2\alpha \sum_{p=1}^{3} \varepsilon_{kjp} n_p(x), \quad T_{kj}^{(3)}(\partial_x, n(x)) = 0, \quad k, j = 1, 2, 3,$$

$$T_{kj}^{(4)}(\partial_x, n(x)) = \varepsilon\, n_k(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + (\nu-\beta) n_j(x)\frac{\partial}{\partial x_k} + (\nu+\beta)\frac{\partial}{\partial n(x)}, \quad k, j = 1, 2, 3.$$

Основная цель в моментной теории упругости является определение упруго-колебательного состояния среды. Состояние непрерывно завысит от граничных данных. Дело заключается в том, что эти данные получаются при проведения эксперимента и поэтому они отличаются от точных данных. Определение точного состояния при приближенных данных является очень важным и корректным условием.

В моментной теории упругости рассматриваются в основном четыре корректные задачи. Это нахождение в упруго-колебательном состоянии смещения и вращения, сила и момент, перемещение и момент, наконец, вращение и сила напряжения, когда на все границы задаются данные.

Однако, в математической физике встречаются и некорректные задачи [5,6,7]. В настоящей работе мы рассматриваем одна из таких задач.

2. Фундаментальное решение и формула Сомилиана

Однородное уравнение установившихся колебаний моментной теории упругости имеет вид

$$M(\partial_x)U(x) = 0. \tag{3}$$

Определение 1. *Фундаментальным решением типа свертки для однородного уравнения (3) называется* (6×6) *матрица-функция* Ψ*, удовлетворяющая следующие равенства* $M(\Psi * U) = U$ *и* $\Psi * (MU) = U$ *при любом* $U \in C^\infty$ *с компактным носителем и со значением в* R^6.

Из этого определения следует

$$M(\partial_x)\Psi(x-y) = \delta(x-y)E_6,$$

$$M^{'}(\partial_y)(\Psi(x-y))^* = \delta(x-y)E_6,$$

для всех $(x,y) \in R^3 \times R^3$, где $M^{'}$ транспонированный дифференциальный оператор M, Ψ^* транспонированная матрица Ψ, δ-обобщенная функция Дирака.

Приведем один простой способ построения таких фундаментальных решений [4].

Фундаментальное решение можно будет получить с помощью формулы $\Psi = \mathcal{M}\varphi$, где $\mathcal{M}-$ называется дополнительной матрицей M, которая удовлетворяет уравнению $\mathcal{M}M = M\mathcal{M} = (\det M)E_6$ и φ фундаментальное решение типа свертки для дифференциального оператора $\det M$.

Обозначим алгебраическое дополнение элемента $M_{kj}(\partial_x)(k,j=\overline{1,6})$ в определителе $\det M(\partial_x)$, через $\mathcal{M}_{kj}(\partial_x)$. После элементарных, хотя и громоздких вычислений для элементов $\mathcal{M}_{kj}(\partial_x)$ матрицы

$$\mathcal{M}(\partial_x) = \left\|\begin{array}{cc} \mathcal{M}^{(1)}(\partial_x) & -\mathcal{M}^{(3)}(\partial_x) \\ -\mathcal{M}^{(2)}(\partial_x) & \mathcal{M}^{(4)}(\partial_x) \end{array}\right\|_{6\times6},$$

получим

$$\mathcal{M}^{(1)}_{kj} = \alpha_0\Bigg\{\frac{\delta_{kj}(\triangle+k_1^2)(\triangle+\omega_2^2)}{\mu+\alpha} - \frac{1}{\lambda+2\mu}\Bigg[\frac{(\lambda+\mu-\alpha)(\triangle+\omega_2^2)}{\mu+\alpha} -$$

$$-\frac{4\alpha^2}{(\mu+\alpha)(\nu+\beta)}\Bigg]\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\Bigg\}\left(\triangle+k_2^2\right)\left(\triangle+k_3^2\right)\left(\triangle+k_4^2\right),$$

$$\mathcal{M}^{(2)}_{kj} = \mathcal{M}^{(3)}_{kj} = \frac{2\alpha\alpha_0}{(\mu+\alpha)(\nu+\beta)}\sum_{q=1}^{3}\epsilon_{kjq}\frac{\partial}{\partial x_q}(\triangle+k_1^2)(\triangle+k_2^2)(\triangle+k_3^2)(\triangle+k_4^2), \tag{4}$$

$$\mathcal{M}^{(4)}_{kj} = \alpha_0\Bigg\{\frac{\delta_{kj}(\triangle+k_2^2)(\triangle+\omega_1^2)}{\nu+\beta} - \frac{1}{\epsilon+2\nu}\Bigg[\frac{(\nu+\epsilon-\beta)(\triangle+\omega_1^2)}{\nu+\beta} -$$

$$-\frac{4\alpha^2}{(\mu+\alpha)(\nu+\beta)}\Bigg]\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\Bigg\}(\triangle+k_1^2)(\triangle+k_3^2)(\triangle+k_4^2),$$

где

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, k_2^2 = \frac{\theta\omega^2 - 4\alpha}{\epsilon + 2\nu},$$

k_3^2 и k_4^2 удовлетворяют условиям

$$k_3^2 + k_4^2 = \omega_3^2 + \omega_4^2 + \frac{4\alpha^2}{(\mu+\alpha)(\nu+\beta)}, \quad k_3^2 k_4^2 = \omega_3^2\omega_4^2,$$

$$\alpha_0 = (\mu+\alpha)^2(\nu+\beta)^2(\lambda+2\mu)(\epsilon+2\nu) > 0.$$

Легко заметить, что $\mathcal{M}(\partial_x)$ (как $M(\partial_x)$) является самосопряженным оператором, т.е. $\mathcal{M}(\partial_x) = (\mathcal{M}(-\partial_x))'$, где штрих означает операцию транспонирования. Подставляя в $M(\partial_x)U = 0$ вместо U матрицу

$$U = (M(\partial_x))' \varphi = \left\| \begin{array}{cc} \mathcal{M}^{(1)}(\partial_x) & \mathcal{M}^{(2)}(\partial_x) \\ \mathcal{M}^{(3)}(\partial_x) & \mathcal{M}^{(4)}(\partial_x) \end{array} \right\| \varphi \tag{5}$$

где $\varphi-$ искомая скалярная функция, получим

$$\det M(\partial_x)\varphi = \alpha_0 \left(\triangle + k_1^2\right)\left(\triangle + k_2^2\right)\left(\triangle + k_3^2\right)^2\left(\triangle + k_4^2\right)^2 \varphi = 0.$$

В (5) каждый элемент содержит множитель $\alpha_0\left(\triangle + k_3^2\right)\left(\triangle + k_4^2\right)\varphi$, поэтому достаточно найти именно функцию

$$\psi = \alpha_0\left(\triangle + k_3^2\right)\left(\triangle + k_4^2\right)\varphi.$$

Для её определения имеем уравнение

$$\left(\triangle + k_1^2\right)\left(\triangle + k_2^2\right)\left(\triangle + k_3^2\right)\left(\triangle + k_4^2\right)\psi = 0.$$

Для того чтобы матрица решений (5) оказалась фундаментальной, мы должны найти такое решение последнего уравнения, частные производные шестого порядка которого имеют особенности лишь вида $|x|^{-1}$. Такое решение, если оно существует, должно удовлетворять условиям

$$\left(\triangle + k_{q+1}^2\right)\left(\triangle + k_{q+2}^2\right)\left(\triangle + k_{q+3}^2\right)\psi = (2\pi|x|)^{-1}\exp\left(ik_q|x|\right), \quad q = 1,2,3,4,$$

$$k_5 = k_1, \;\; k_6 = k_2, \;\; k_7 = k_3.$$

Рассматривая эти соотношения как систему уравнений относительно ψ, $\triangle\,\psi$, $\triangle^2\,\psi$, $\triangle^3\,\psi$ найдем

$$\psi = \sum_{q=1}^{4} A_q\,(2\pi|x|)^{-1}\exp\left(ik_q|x|\right), \tag{6}$$

где $A_q = \prod\limits_{s=1}^{3} \frac{1}{\left(k_{q+s}^2 - k_q^2\right)}$.

Соотношения (6) позволяет легко проверить, что ψ удовлетворят всем поставленным выше условиям.

Выражение для ψ в (6) мы получим в предположении, что постоянные k_q^2 $(q = 1,2,3,4)$ отличны друг от друга. Теперь найденный ψ подставляем в (4) и получим матрицу фундаментальных решений $U(x)$ из (5) которую обозначим через Ψ. Таким образом блочно-симметричная матрица фундаментальных решений имеет вид

$$\Psi(x) = \left\| \begin{array}{cc} \Psi^{(1)}(x) & \Psi^{(2)}(x) \\ \Psi^{(3)}(x) & \Psi^{(4)}(x) \end{array} \right\|_{6\times 6}$$

где

$$\Psi^{(i)} = \left\|\Psi^{(i)}_{kj}(x)\right\|_{3\times 3}, \ \ i=1,2,3,4,$$

$$\Psi^{(1)}_{kj}(x) = \sum_{q=1}^{4}\left(\delta_{kj}a_q + b_q\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\right)\left(-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\exp\left(ik_q|x|\right)}{|x|}\right),$$

$$\Psi^{(2)}_{kj}(x) = \Psi^{(3)}_{kj}(x) = \frac{2\alpha}{\mu+\alpha}\sum_{q=1}^{4}\sum_{m=1}^{3}\varepsilon_q\varepsilon_{kjm}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\exp\left(ik_q|x|\right)}{|x|}\right),$$

$$\Psi^{(4)}_{kj}(x) = \sum_{q=1}^{4}\left(\delta_{kj}c_q + d_q\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}\right)\left(-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\exp\left(ik_q|x|\right)}{|x|}\right),$$

для $k,j=1,2,3$. Все константы определяются из следующих равенств

$$a_q = \frac{(-1)^q(\omega_2^2-k_q^2)(\delta_{3q}+\delta_{4q})}{(\mu+\alpha)(k_3^2-k_4^2)}, \quad b_q = -\frac{\delta_{1q}}{\rho\omega^2}+\frac{a_q}{k_q^2}, \quad \sum_{q=1}^{4}b_q = 0,$$

$$c_q = \frac{(-1)^q(\omega_1^2-k_q^2)(\delta_{3q}+\delta_{4q})}{(\beta+\nu)(k_3^2-k_4^2)}, \quad d_q = -\frac{\delta_{2q}}{(\theta\omega^2-4\alpha)}+\frac{c_q}{k_q^2}, \quad \sum_{q=1}^{4}d_q = 0,$$

$$\varepsilon_q = \frac{(-1)^q(\delta_{3q}+\delta_{4q})}{(\beta+\nu)(k_3^2-k_4^2)}, \quad \sum_{q=1}^{4}\varepsilon_q = 0,$$

здесь $k_3^2\neq k_4^2,\ \theta\omega^2-4\alpha\neq 0$.

Теорема 2.1. *Каждый столбец матрицы $\Psi(x)$ рассматриваемый как вектор, удовлетворяет системе (3) во всех точках пространства R^3, кроме начала координат.*

Для матрицы фундаментальных решений имеет места равенства [8]

$$\Psi^*(x-y) = \Psi(y-x).$$

Имеет место формула Сомилианы [8].

Теорема 2.2. *Для любой функции $U\in C^1(\overline{D})$ со значениями в R^6, такое что $M(\partial_x)U\in L_1(D)$ имеет место*

$$\int\limits_{\partial D}\big(\left\{T\left(\partial_y,n(y)\right)\Psi(y-x)\right\}^*U(y)-\Psi(x-y)\left\{T\left(\partial_y,n(y)\right)U(y)\right\}\big)ds_y+ \tag{7}$$
$$+\int\limits_{D}\Psi(x-y)M(\partial_y)U(y)dy = \begin{cases} U(x), & x\in D\\ 0, & x\notin\overline{D}.\end{cases}$$

где "$*$" у матрицы означает операцию транспонирования.

Доказательство этой теоремы вытекает из леммы

Лемма 2.3. *Для любых регулярных функций U и G (т.е. из класса $C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$) на $\overline{D}$ со значениями в R^6 имеет место*

$$\int\limits_{D}\big(\Psi(x-y)\left\{M(\partial_y)U(y)\right\}-\left\{M(\partial_y)\Psi(x-y)\right\}^*U(y)\big)dy =$$
$$=\int\limits_{\partial D}\big(\Psi(x-y)\left\{T\left(\partial_y,n(y)\right)U(y)\right\}-\left\{T\left(\partial_y,n(y)\right)\Psi(y-x)\right\}^*U(y)\big)ds_y.$$

3. Задача Коши и критерий разрешимости

Постановка задачи. Пусть $S-$гладкая открытая часть поверхности ∂D. Рассмотрим задачу Коши для системы (1): Надо найти решение системы (1) $U(x)$ в D по данным $U(y)=U_0(y)$, $T(\partial_y,n(y))U(y)=U_1(y)$, $y\in S$ т.е.

$$\left\{\begin{array}{ll} M\left(\partial_x\right)U(x)+\rho F(x)=0\,, & x\in D\\ U(y)=U_0(y)\,, & y\in S\\ T(\partial_y,n(y))U(y)=U_1(y), & y\in S, \end{array}\right. \tag{8}$$

где $U_0\in C^1(S)\cap L_1(S),\ U_1\in C(S)\cap L_1(S),\ \ F\in C(D,R^6)$.

Известно что, это задача некорректна. Некорректность задачи аналогична задаче Коши для уравнения Лапласа [9]. При предположении существования решения единственность следует из условия задачи. Для решения задачи (8) определим следующую функцию

$$\begin{gathered} \mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)(x)=\int\limits_S\Big(\left\{T\left(\partial_y,n(y)\right)\Psi(y-x)\right\}^*U_0(y)-\Psi(x-y)U_1(y)\Big)ds_y-\\ -\int\limits_D\Psi(x-y)\rho F(y)dy \end{gathered} \tag{9}$$

для $x\in R^3\backslash S$.

Так как фундаментальное решение Ψ является вещественным и аналитичным кроме, начала координат в R^3, то функция $\mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)$ тоже является вещественно аналитичной в $R^3\backslash\overline{D}$. Кроме этого $\mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)$ является решением однородной системы (3), т.е.,

$$M(\partial_x)\mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)(x)=0,\quad x\in R^3\backslash\overline{D}.$$

В частности, компоненты вектор-значной функции $\mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)$ являются решениями скалярного уравнения

$$p(\triangle)=\prod_{q=1}^{4}\left(\triangle+k_q^2\right)u=0,$$

в $R^3\backslash\overline{D}$.

Когда $x\in S$, оба интегралы $\mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)$ и $T\left(\partial_y,n(y)\right)\mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)$ имеют скачки, равные U_0 и U_1 соответственно.

Введем обозначения $\mathcal{U}^{\pm}\left(U_0\oplus U_1\right)(x)=\mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)(x),\ \ x\in D^{\pm}$, где $D^-=R^3\backslash\overline{D}$.

Лемма 3.1. *Если $S\in C^2$, а $U_0\in C^1(S)\cap L_1(S)$, $U_1\in C(S)\cap L_1(S)$, то вектор-функция $\mathcal{U}^-\left(U_0\oplus U_1\right)$ непрерывно продолжается вместе со своими первыми производными в $D^-\cup S$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{U}^+\left(U_0\oplus U_1\right)$ непрерывно продолжается вместе со своими первыми производными в $D^+\cup S$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что существует гладкая в некоторой окрестности S в R^3 функция $\widehat{U}$ такая, что сужения на S функции $\widehat{U}$ и $T\left(\partial_y,n(y)\right)\widehat{U}$ равны $U_0(y)$ и $U_1(y)$ соответственно (см., [10], лемма 28.2.). Тогда на основе формулы Сохоцкого-Племеля, т.е., если $y\in S,\ n(y)-$ единичный вектор внешней нормали к S в точке y, то

$$\lim_{\epsilon\to0}\Big\{\mathcal{U}^+\left(U_0\oplus U_1\right)(y+\epsilon n(y))-\mathcal{U}^-\left(U_0\oplus U_1\right)(y-\epsilon n(y))\Big\}=U_0(y),$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\{T\left(\partial_y, n(y)\right)\mathcal{U}^{+}\left(U_0\oplus U_1\right)\left(y+\epsilon n(y)\right)-$$
$$-T\left(\partial_y, n(y)\right)\mathcal{U}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)\left(y-\epsilon n(y)\right)\} = U_1(y),$$

причем, предел достигается равномерно на компактных подмножествах S. В дальнейшем для удобства работы эти предельные соотношения напишем в виде

(10)
$$\lim_{\epsilon\to 0}\{\partial^p\mathcal{U}^{+}(U_0\oplus U_1)(y+\epsilon n(y))-$$
$$-\partial^p\mathcal{U}^{-}(U_0\oplus U_1)(y-\epsilon n(y))\} = \partial^p\widehat{U}(y),\quad |p|\le 1,$$

где $\widehat{U}(y) = U_0(y)$ при $p = 0, \partial^1\widehat{U}(y) = U_1(y)$ при $p = 1$ и $\partial^1 = T(\partial_y, n(y))$. Пусть например, $U^{+}(U_0\oplus U_1)$ гладко продолжается в $D^{+}\cup S$. Зафиксируем мультииндекс $p(|p|\le 1)$, тогда

$$\lim_{\epsilon\to 0}\partial^p\mathcal{U}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)\left(y-\epsilon n(y)\right) = \partial^p\mathcal{U}^{+}\left(U_0\oplus U_1\right)(y) - \partial^p\widehat{U}(y).$$

Доопределим $\partial^p\mathcal{U}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)$ в $D^{-}\cup S$ следующим образом:

$$\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x) = \begin{cases} \partial^p\mathcal{U}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x), & x\in D^{-} \\ \partial^p\mathcal{U}^{+}\left(U_0\oplus U_1\right)(x) - \partial^p\widehat{U}(x), & x\in S.\end{cases}$$

Покажем, что $\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)$ непрерывна в $D^{-}\cup S$. Зафиксируем произвольную точку $x_0\in S$ и $\mathtt{E}>0$. Поскольку $\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)$ непрерывна на S, то найдется такое δ_0, что если $x_1\in S$ и $|x_1-x_0|<\delta_0$, то

$$\left|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_1) - \partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_0)\right| < \mathtt{E}/2.$$

Уменьшая в случае надобности δ_0 , можно считать, что $K = \overline{B_{\delta_0}(x_0)}\cap S-$ компактное подмножество S.

Поскольку поверхность S является гладкой, то можно выбрать число $0<\delta<\delta_0/2$ таким образом, что каждая точка $x\in\overline{B_{\delta_0}(x_0)}\cap D^{-}$ представима в виде $x = x_1+\epsilon n(x_1)$, где $x_1\in S$, а $\epsilon = dist(x,S)$. Тогда $\epsilon<\delta$, поэтому $|x_1-x_0|\le|x_1-x|+|x-x_0|<\delta_0$, т.е. $x_1\in K$.

Учитывая, что предел в (10) достигается равномерно на компактных подмножествах S, и уменьшая, если надо, δ, можно добиться того, чтобы при $x_1\in K$ и $0<\epsilon<\delta$ выполнялось неравенство

$$\left|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_1+\epsilon n(x_1)) - \partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_1)\right| < \mathtt{E}/2.$$

Пусть теперь $x\in B_\delta(x_0)\cap D^{-}$, тогда для некоторых $x_1\in K$ и $0<\epsilon<\delta$ имеем $x = x_1+\epsilon n(x_1)$. Поэтому

$$\left|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_0) - \partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x)\right| \le$$
$$\le\left|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_0) - \partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_1)\right| +$$
$$+\left|\partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_1+\epsilon n(x_1)) - \partial^p\widehat{\mathcal{U}}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)(x_1)\right| < \mathtt{E}.$$

Следовательно, $\mathcal{U}^{-}\left(U_0\oplus U_1\right)$ гладко продолжается в $D^{-}\cup S$, если $U^{+}\left(U_0\oplus U_1\right)$ гладко продолжается в $D^{+}\cup S$, и наоборот. Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Для того, чтобы существовало решение $U\in C^1(D\cup S)$ задачи Коши (8) необходимо и достаточно чтобы интеграл $\mathcal{U}\left(U_0\oplus U_1\right)$ можно было продолжить из $R^3\backslash\overline{D}$ через S к D как вещественную аналитическую функцию.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть имеется решение $U \in C^1(D \cup S)$ задачи Коши (8) в $R^3 \backslash \partial D$ определим функцию V следующим образом

$$V(x) = \begin{cases} \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right) - U\,, & x \in D \\ \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right), & x \in R^3 \backslash \overline{D} \end{cases} \tag{11}$$

через $V^{\pm}(x)$ обозначим сужение V на D и $R^3 \backslash \overline{D}$ соответственно. На основе формул (7) и (11) получим

$$V^{+}(x) = -\int\limits_{\partial D \backslash S} \Big(\left\{ T\left(\partial_y, n(y)\right) \Psi(y-x) \right\}^{*} U(y) - \Psi(x-y) \left\{ T\left(\partial_y, n(y)\right) U(y) \right\} \Big) ds_y$$

для всех $x \in D$.

Отсюда следует, что V^{+} продолжается через S к аналитической функции V на все $R^3 \backslash (\partial D \backslash S)$ со значениями в R^6 т.е.

$$V(x) = \int\limits_{S} \Big(\left\{ T\left(\partial_y, n(y)\right) \Psi(y-x) \right\}^{*} U(y) - \Psi(x-y) \left\{ T\left(\partial_y, n(y)\right) U(y) \right\} \Big) ds_y +$$

$$+ \int\limits_{D} \Psi(x-y) M(\partial_x) U(y) dy$$

для всех $x \in R^3 \backslash D$. Поэтому $\mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)$ продолжается из $R^3 \backslash \overline{D}$ через S к D как вещественная аналитическая функция.

Достаточность. Обратно, пусть $\mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)$ продолжается до вещественной аналитической функции V из $R^3 \backslash \overline{D}$ через S к D со значениями в R^6, такое что $V = \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)$ вне окрестности $\overline{D}$. Тогда

$$M(\partial_x) V(x) = 0, \quad x \in R^3 \backslash \overline{D}.$$

Так как функция $M(\partial_x) V$ является вещественно аналитической, тогда она тоже обращается в ноль на D.

Положим

$$U(x) = \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)(x) - V(x), \quad x \in D.$$

Из только что доказанного следует, что U является гладкой функцией у S в D, удовлетворяющее уравнению $MU + \rho F = 0$.

Мы утверждаем, что U есть требуемое решение задачи (8). Можно проверить, что $U = U_0$ и $T(\partial_y, n(y)) U = U_1$ на S. Так как V является гладкой в $R^3 \backslash (\partial D \backslash S)$, мы без труда можем получать с помощью формулу Сохоцкого-Племелья

$$U(y) = \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)^{+}(y) - V^{+}(y) = \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)^{+}(y) - V^{-}(y) =$$

$$= \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)^{+}(y) - \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)^{-}(y) = U_0(y), \quad y \in S,$$

аналогично

$$T(\partial_y, n(y)) U(y) = T(\partial_y, n(y)) \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)^{+}(y) - T(\partial_y, n(y)) V^{+}(y) =$$

$$= T(\partial_y, n(y)) \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)^{+}(y) - T(\partial_y, n(y)) V^{-}(y) =$$

$$= T(\partial_y, n(y)) \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)^{+}(y) - T(\partial_y, n(y)) \mathcal{U}\left(U_0 \oplus U_1\right)^{-}(y) = U_1(y), \quad y \in S,$$

Теорема доказана.

4. Критерий разрешимости на языке матрицы Карлемана

Здесь мы рассматриваем задачу Коши для однородной системы моментной теории упругости

Пусть D ограниченная односвязная область в R^3 с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$ и часть плоскости $\partial D \backslash S : y_3 = 0$.

Рассмотрим задачу Коши для системы (3): Надо найти решение системы (3) $U(x)$ в D по данным $U(y) = U_0(y),\ \ T(\partial_y, n(y))U(y) = U_1(y),\ \ y \in S$ т.е.

$$\left\{ \begin{array}{ll} M\left(\partial_x\right)U(x) = 0\,, & x \in D \\ U(y) = U_0(y)\,, & y \in S \\ T(\partial_y, n(y))U(y) = U_1(y), & y \in S, \end{array} \right. \tag{12}$$

где $U_0 \in C^1(S) \cap L_1(S),\ U_1 \in C(S) \cap L_1(S)$.

Для решения данной задачи для данной односвязной области используется метод функции Карлемана, т.е. строится матрица Карлемана и с помощью этой матрицы дается формула нахождения решения внутри области.

Следуя [9], приведем

Определения 2. *Матрицей Карлемана задачи (12) называется* $(6 \times 6)-$ *матрица* $\Pi(y, x, \sigma)$, *зависящая от двух точек* y, x *и положительного числового параметра* σ, *удовлетворяющая следующим двум условиям:*

$$1) \quad \Pi(y, x, \sigma) = \Psi(y, x) + G(y, x, \sigma),$$

где матрица $G(y, x, \sigma)$ *удовлетворяет по переменный* y *системе (3) всюду в области* D, $\Psi(y, x)-$ *матрица фундаментальных решений системе (3);*

$$2) \quad \int\limits_{\partial D \backslash S} \left(|\Pi(y, x, \sigma)| + |T(\partial_y, n)\Pi(y, x, \sigma)|\right) ds_y \leq \varepsilon(\sigma),$$

где $\varepsilon(\sigma) \to 0$, *при* $\sigma \to \infty$; $|\Pi|-$ *евклидова норма матрицы* $\Pi = ||\Pi_{ij}||_{6\times 6}$, *т.е.,* $|\Pi| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{6} \Pi_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, *в частности* $|U| = \left(\sum\limits_{k=1}^{3} (u_k^2 + v_k^2)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Известно, что для регулярных вектор-функций $V(y)$ и $U(y)$ верна формула [4]:

$$\int\limits_D \left[V(y)\left\{M(\partial_y)U(y)\right\} - U(y)\left\{M(\partial_y)V(y)\right\}\right] ds_y =$$
$$= \int\limits_D \left[V(y)\left\{T(\partial_y, n(y))U(y)\right\} - U(y)\left\{T(\partial_y, n(y))V(y)\right\}\right] ds_y.$$

Подставляя в это равенство вместо $V(y)$ и $U(y)$ соответственно $G(y, x, \sigma)$ и регулярное решение $U(y)$ системы (1), мы получим

$$0 = \int_{\partial D} \left[G(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n(y))U(y)\} - \{T(\partial_y, n(y))G(y, x, \sigma)\}^* U(y)\right] ds_y.$$

Теперь учитывая теорему 2.2 при $M(\partial_y)U(y) = 0$ имеем

Теорема 4.2. *Всякое регулярное решение* $U(x)$ *системы (3) в области* D *определяется формулой*

$$\int_{\partial D} \left(\{T(\partial_y, n(y))\Pi(y, x, \sigma)\}^* U(y) - \Pi(y, x, \sigma)\{T(\partial_y, n(y))U(y)\}\right) ds_y = \tag{13}$$

$$= \begin{cases} U(x)\,, & x \in D \\ 0\,, & x \notin \overline{D}. \end{cases}$$

где $\Pi(y,x,\sigma)-$ *матрица Карлемана.*

Используя матрицу Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (12), а также указать метод эффективного решения этой задачи.

С целью построения приближенного решения задачи (12) построим матрицу Карлемана следующим образом:

$$\Pi(y,x,\sigma) = \left\| \begin{array}{cc} \Pi^{(1)}(y,x,\sigma) & \Pi^{(2)}(y,x,\sigma) \\ \Pi^{(3)}(y,x,\sigma) & \Pi^{(4)}(y,x,\sigma) \end{array} \right\|,$$

$$\Pi^{(i)}(y,x,\sigma) = \left\| \Pi^{(i)}_{kj}(y,x,\sigma) \right\|_{3\times 3}, \quad i = 1,2,3,4,$$

(14)
$$\Pi^{(1)}_{kj}(y,x,\sigma) = \sum_{q=1}^{4} \left(\delta_{kj} a_q + bq \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) \cdot \Phi_\tau(y,x,i\lambda_q), \quad k,j = 1,2,3,$$

$$\Pi^{(2)}_{kj}(y,x,\sigma) = \Pi^{(3)}_{kj}(y,x,\sigma) =$$

$$= \frac{2\alpha}{\mu+\alpha} \sum_{q=1}^{4} \sum_{m=1}^{3} \varepsilon_q \varepsilon_{kjs} \frac{\partial}{\partial x_m} \cdot \Phi_\sigma(y,x,i\lambda_q), \quad k,j = 1,2,3,$$

$$\Pi^{(4)}_{kj}(y,x,\sigma) = \sum_{q=1}^{4} \left(\delta_{kj} c_q + d_q \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \right) \cdot \Phi_\sigma(y,x,i\lambda_q), \quad k,j = 1,2,3,$$

где

(15)
$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda) = \frac{1}{-2\pi^2 exp(\sigma\, x_3)} \int\limits_0^\infty Im \left[\frac{exp(\sigma\, w)}{w - x_3} \right] \frac{cos(\lambda u)\, du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}},$$

$$w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_3,\ \ \alpha^2 = (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2,\ \ \alpha > 0.$$

Из результатов работы [9] вытекает

Лемма 4.3. *Функция* $\Phi_\sigma(y,x,\lambda)$ *определяемая формулой (15) представима в виде*

(16)
$$1)\ \Phi_\sigma(y,x,\lambda) = \frac{exp(i\lambda r)}{4\pi r} + \varphi_\sigma(y,x,\lambda), \quad r = |y-x|,$$

где φ_σ *-некоторая функция, определенная для всех значений* x, y *и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца:* $\Delta(\partial_y)\varphi_\sigma + \lambda^2\varphi_\sigma = 0$,

(17)
$$2)\ \int\limits_{\partial D \setminus S} \left(|\Phi_\sigma| + |\frac{\Phi_\sigma}{\partial n})| \right) ds_y \le C(\lambda, D)\sigma\, exp\,(-\sigma x_3),$$

где $C(\lambda, D)-$ *некоторая функция ограниченная внутри* D, *не зависящая от* σ, *а* $\Delta(\partial_y) = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}$.

Функцию $\Phi_\sigma(y,x,\lambda)$ назовем функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца. Приведем некоторые свойства функции Карлемана.

Функция $\Phi_\sigma(y,x,\lambda)$ при $x \neq y$ дважды непрерывно дифференцируема по y и имеют место следующие неравенства

$$| \Phi_\sigma(y,x,\lambda) | \leqslant C_1 r^{-1} exp\, \sigma(y_3 - x_3),$$

(18)
$$\left|\frac{\partial \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial y_k}\right| \leqslant C_2\, \sigma\, r^{-2} exp\ \sigma(y_3 - x_3),$$
$$\left|\frac{\partial^2 \Phi_\sigma(y,x,\lambda)}{\partial y_k \partial y_j}\right| \leqslant C_3\, \sigma^2\, r^{-3} exp\ \sigma(y_3 - x_3).$$

Из леммы 4.3 получим

Лемма 4.4. *Матрица* $\Pi(y,x,\sigma)$ *определенная формулами (14), (15) является матрицей Карлемана задачи (12).*

Доказательство. Из (14), (15) и леммы 4.3 имеем

$$\Pi(y,x,\sigma) = \Psi(y,x) + G(y,x,\sigma),$$

где

$$G(y,x,\sigma) = \left\| \begin{array}{cc} G^{(1)}(y,x,\sigma) & G^{(2)}(y,x,\sigma) \\ G^{(3)}(y,x,\sigma) & G^{(4)}(y,x,\sigma) \end{array} \right\|,$$

$$G^{(i)}(y,x,\sigma) = \left\| G^{(i)}_{k\,j}(y,x,\sigma) \right\|_{3\times 3}, \quad i = 1,2,3,4,$$

$$G^{(1)}_{kj}(y,x,\sigma) = \sum_{q=1}^{4} \left(\delta_{kj} a_q + b_q \frac{\partial^2}{\partial\, x_k \partial\, x_j} \right) \varphi_\sigma(y,x,k_q), \quad k,j = 1,2,3,$$

$$G^{(2)}_{kj}(y,x,\sigma) = G^{(3)}_{k\,j}(y,x,\sigma) = \frac{2\alpha}{\mu+\alpha} \sum_{q=1}^{4} \sum_{m=1}^{3} \varepsilon_q \varepsilon_{k\,j\,m} \frac{\partial}{\partial x_m} \varphi_\sigma(y,x,k_q), \quad k,j = 1,2,3,$$

$$G^{(4)}_{kj}(y,x,\sigma) = \sum_{q=1}^{4} \left(\delta_{kj} c_q + d_q \frac{\partial^2}{\partial\, x_k \partial\, x_j} \right) \varphi_\sigma(y,x,k_q), \quad k,j = 1,2,3.$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что матрица $G(y,x,\sigma)$ по переменному y удовлетворяет систему (3) всюду в D.

Используя (14), (15), и (18) получим

(19)
$$\int\limits_{\partial D \backslash S} (|\Pi(y,x,\sigma)| + |T(\partial_y, n(y))\Pi(y,x,\sigma)|)\ ds_y \leq C_1(x)\, \sigma^3 \exp(-\sigma\, x_3),$$

где $C_1(x)$ некая ограниченная функция внутри D. Лемма доказана.

Положим

(20)
$$U_\sigma(x) = \int\limits_S [\{T(\partial_y, n(y))\Pi(y,x,\sigma)\}^* U(y) -$$
$$-\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y, n(y))U(y)\}] ds_y \quad x \in D.$$

Верна теорема [11]

Теорема 4.5. *Пусть* $U(x)$ *регулярное решение системы (3) в области* D, *удовлетворяющее условию*

$$|U(y)| + |T(\partial_y, n(y))U(y)| \leq M, \quad y \in \partial D \backslash S.$$

Тогда для $\sigma \geq 1$ *и* $x \in D$ *верна*

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \le MC_2(x)\sigma^3 \exp(-\sigma\, x_3),$$

где $C_2(x)$ *некая ограниченная функция в* D.

Следствие 4.6. *При условии теоремы справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения*

$$U(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \int\limits_S [\{T(\partial_y, n)\Pi(y,x,\sigma)\}^* U(y) - \Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\}]ds_y, \tag{21}$$

$$U(x) = \int\limits_S [\{T(\partial_y, n)\Pi(y,x)\}^* U(y) - \Pi(y,x)\{T(\partial_y, n)U(y)\}]ds_y + \tag{22}$$

$$+ \int\limits_0^\infty \mathcal{R}(\sigma, x)d\sigma,$$

где

$$\mathcal{R}(\sigma, x) = \int\limits_S [\{T(\partial_y, n)\Omega(y,x,\sigma)\}^* U(y) - \Omega(y,x,\sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\}]ds_y, \tag{23}$$

$$\Omega(y,x,\sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma}\Pi(y,x,\sigma) = \left\| \frac{\partial}{\partial\sigma}\Pi^{(i)}_{kj}(y,x,\sigma) \right\|,\ i = 1,2,3,4,$$

$\Pi(y,x)-$ *матрица построенная по формуле (14) и (15) при*

$$\Phi_\sigma(y,x,\lambda) = \Phi(y,x,i\lambda) = \frac{exp(i\lambda r)}{4\pi r},\ r = |x-y|.$$

Эквивалентность формул продолжения (21) и (22) вытекает из формулы

$$\lim_{\sigma\to\infty} U_\sigma(x) = \int\limits_0^\infty \frac{dU_\sigma(x)}{d\sigma}d\sigma + U_0(x).$$

На основе формулы продолжения (21) и (22) приведем критерий разрешимости задачи Коши (12). Для этого обозначим через S_0 внутренние точки поверхности S, т.е. поверхность без края.

Теорема 4.7. *Пусть* $S \in C^2$, $U_0 \in C^1(S)$, $U_1 \in C(S)$. *Для того чтобы существовало регулярное решение* $U(x)$ *задачи (12) в области* D, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\left| \int\limits_0^\infty \partial_x^p \mathcal{R}(\sigma, x)d\sigma \right| < \infty, |p| \le 2, \tag{24}$$

где p-мультииндекс, равномерно на каждом компакте $K \subset D$, $x \in K$. *Если эти условия выполнены, то решения определяются двумя эквивалентными формулами (21), (22).*

Доказательство.*Необходимость.* Пусть существует регулярное решение $U(x)$ системы (3) удовлетворяющий условиям $U(y) = U_0(y)$, $T(\partial_y, n(y))U(y) = U_1(y)$, $y \in S_0$, где $U_0 \in C^1(S)$, $U_1 \in C(S)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $S_\varepsilon = S\backslash\{y \in$

$R^3 : y_3 < \varepsilon\}$, $D_\varepsilon = D \backslash \{y \in R^3 : y_3 < \varepsilon\}$. Граница D_ε состоит из гладкой поверхности S_ε и плоского куска P_ε параллельного плоскости $(0y_1y_2)$. В области D_ε функция

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\Phi_\sigma(y,x,\lambda) = \frac{1}{-2\pi^2 exp(\sigma x_3)}\int\limits_0^\infty Im\frac{exp(\sigma w)}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\cos(\lambda u)du,$$

где $w = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_3,\ \alpha^2 = (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2),\ \alpha > 0$, регулярна по во всем пространстве, следовательно все элементы матрицы $\frac{\partial}{\partial\sigma}\Pi(y,x,\sigma)$ являются регулярными. Исходя из формул (14), (15) и аналогу неравенств (18) и (19) продифференцировав равенство (23) по x и оценивая полученные равенства, получим

$$|\partial_x^p \mathcal{R}(\sigma,x)d\sigma| \leq \int\limits_{S_\varepsilon}\left[|\Omega(y,x,\sigma)| + |T(\partial_y,n)\Omega(y,x,\sigma)^*|\right]\left[|U_0(y)| + |U_1(y)|\right]ds_y \leq$$

$$\leq C(x)\sigma^5 exp(-\sigma x_3),\ \ |p| \leq 2,\ x_3 > 0,$$

где $C(x) = C(\lambda,\mu)\int\limits_0^\infty \frac{\sin\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+\alpha^2}du$. Таким образом из последнего неравенства в виду того, что правая часть не зависит от ε , переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$|\partial_x^p \mathcal{R}(\sigma,x)d\sigma| \leq C(x)\sigma^5 exp(-\sigma x_3^2),\ \ |p| \leq 2,\ x_3 > 0. \tag{25}$$

Теперь из (25) получим (24). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $S \in C^2$, $U_0 \in C^1(S)$, $U_1 \in C(S)$. и верно неравенство (24). Покажем что существует регулярное решение $U(x)$ системы (3) такое, что $U(y) = U_0(y)$, $T(\partial_y, n(y))U(y) = U_1(y)$, $y \in S_0$. Рассмотрим функцию $U(x)$ заданную двумя эквивалентными формулами вида (21) и (22). Первое слагаемое в правой части формулы (22) задает две функции, которые являются регулярными решениями эллиптической системы (3) соответственно в областях D и $R^3_+\backslash\overline{D}$, такими, что разности их предельных значений по нормалям и их напряжений ($x^{(1)}, x^{(2)}$ две точки на нормали, симметричные относительно точки $y \in S_0$, при стемлении к y) на S_0 равняется вектор-функциям $U_0(y)$ и $U_1(y)$ соответственно, причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до S_0, то другая тоже обладает данным свойством. Второе слагаемое в правой части (22) в силу (24) является регулярным решением системы (3) в R^3_+. Итак, правая часть формулы (22) задает два регулярных решения $\widetilde{U}_1(x)$ и $\widetilde{U}_2(x)$ в областях D и $R^3_+\backslash\overline{D}$, соответственно таких, что для всякой точки $y \in S_0$ верно (в указанном смысле) равенство

$$\begin{cases} \widetilde{U}_1^+(y) - \widetilde{U}_2^-(y) = U_0(y) \\ T(\partial_y,n)\widetilde{U}_1^+(y) - T(\partial_y,n)\widetilde{U}_2^-(y) = U_1(y), \end{cases} \tag{26}$$

причем если одна из этих функций непрерывна в соответствующей области вплоть до S_0, то другая тоже обладает данным свойством [12].

Далее заметим, что из формулы (21) и неравенств (19) вытекает, что $\widetilde{U}_2(x) = 0$ при $x_3 > sup\{y_3 : y \in \overline{D}\}$. Тогда, согласно теореме о единственности (так как решение эллиптических систем является аналитическим [13]) $\widetilde{U}_2(x) \equiv 0,\ x \in R^3_+\backslash\overline{D}$. Теперь из (26) получается утверждение теоремы. Теорема доказана.

References

[1] Carleman T. *Les functions quasi analytiques*, -Paris: Ganthier- Villars, 1926. -115 p.

[2] Goluzin G.M., Krilov V.M. *Generalized Carleman's formula and its applications to analytic continuation of functions* Math. Sb.-1933.-T.40. № 2.-c 144-149.(in Russian).

[3] Lavrent'ev M.M. *Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics*, Computer Center, Novosibirsk, 1962 (in Russian).92 p.

[4] Kupradze, V.D., Gegelia, T.G., Basheleishvili, M.O., and Burchuladze, T.V.. *Three-Dimensional Problems of Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*, Moscow: Nauka, 1976.-663 p.

[5] Makhmudov O., Niyozov I. *Regularization of a solution to the Cauchy Problem for the System of Thermoelasticity*, Contemporary Mathematics.AMS, Primary V382, 2005,74F05, 35Q72. pp.285-289.

[6] Makhmudov O., Niyozov I. *The Cauchy problem for the Lame system in infinite domains in* R^m,Journal of inverse and Ill-Posed Problems.V14. N9.2006. pp.905-924(20).

[7] Juraev, D.A.*On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain*, Siberian Electronic Mathematical Reports.Том 15, стр. 1865–1877 (2018).

[8] Makhmudov O. I., Niyozov I. E., Tarkhanov N. *The Cauchy Problem of Couple-Stress Elasticity*, Contemporary Mathematics. AMS, V455, 2008.pp 207-310.

[9] Yarmukhamedov, Sh.Ya.*On the Cauchy problem for Laplace equation*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1977, vol. 235, no. 2, pp. 281–283.

[10] Tarkhanov N.N. *Laurent series for solutions of elliptic systems*, Nauka, Novosibirsk, 1991. in Russian

[11] Makhmudov, O.I. and Niyozov, I.E. *3The Cauchy problem of the moment elasticity theory in* R^m, Russ. Math., 2014, vol. 58, no. 2, pp. 30-37.

[12] Shlapunov A. A. *On the Cauchy problem for the Laplace equation*,Sibirian Math. J. (1992) 33, No. 3, pp.205-215.

[13] Petrovskii I. G. *Lectures on Partial Differential Equations*, Moscow, Fizmatgiz,1961 (in Russian).

Ikbol Ergashevich Niyozov
Samarkand State University,
15 Universitetskii blvd,
140104, Republic of Uzbekistan, Samarkand
E-mail address: iqboln@mail.ru