Отзыв

о статье Д. В. Соломатина

«Иследования полугрупп с планарными графами Кэли»

Рецензируемая статья представляет собой обстоятельный обзор работ, посвященных двум задачам. Первая задача состоит в изучении *планарных* полугрупп, т.е. полугрупп, графы Кэли которых относительно некоторого порождающего множества планарны. Вторая задача имеет дело с *рангами планарности* полугрупповых многообразий, где под рангом планарности многообразия $\mathcal{V}$ понимается максимальный ранг планарной $\mathcal{V}$-свободной полугруппы. Подавляющее большинство работ, обозреваемых в статье, выполнено ее автором и некоторыми другими учениками Л. М. Мартынова.

Текст статьи абсолютно не готов к публикации, так как загрязнен большим числом разного рода неаккуратностей — от систематического цитирования нерелевантных источников до математических ошибок (см. список ниже). Эти неаккуратности, вероятно, устранимы, но для меня не вполне очевиден вопрос о том, может ли статья быть опубликована даже после их устранения. Задачи, рассматриваемые в обозреваемых работах автора и его коллег, весьма и весьма специальны и вряд ли представляют интерес для широкого круга читателей; соответственно, это снижает потенциальную ценность обзора, сосредоточенного именно на этих работах. Полноценная обзорная статья не может сводиться к более или менее детальному пересказу ранее опубликованных фактов; она должна давать «прибавочную стоимость», определяемую критическим анализом результатов, их систематизацией и помещением в более широкий контекст, вычленением потенциальных точек для дальнейшего роста теории. В представленном тексте из всего этого наличествует только краткий список открытых проблем в заключительном разделе статьи.

Замечания по тексту

Стр. 2, абзац 2 сверху: Автор пишет, что конечные группы, допускающие плоские графы Кэли, известны давно, но их исследования продолжаются «в том числе и зарубежными авторами [16,17,23,24]». Все эти работы, однако, имеют дело с **бесконечными** конечно порожденными группами. Замечу, что библиографические описания работ [17] и [24] нужно исправить следующим образом:

[17] C. Droms, Infinite-ended groups with planar Cayley graphs. J. Group Theory 9 (2006), no. 4, 487–496;

[24] A. Georgakopoulos, On planar Cayley graphs and Kleinian groups. Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), no. 7, 4649–4684.

Ссылку на препринт [23] следует заменить ссылкой на журнальную версию этой работы:

[23] A. Georgakopoulos, M. Hamann, The planar Cayley graphs are effectively enumerable I: Consistently planar graphs. Combinatorica 39 (2019), no. 5, 993–1019.

Говоря о бесконечных конечно порожденных группах с планарными графами Кэли следовало бы отметить и следующие важные публикации последних лет:

- A. Georgakopoulos, Characterising planar Cayley graphs and Cayley complexes in terms of group presentations. European J. Combin. 36 (2014), 282-293.
- A. Georgakopoulos, The planar cubic Cayley graphs of connectivity 2. European J. Combin. 64 (2017), 152–169.
- A. Georgakopoulos, The planar cubic Cayley graphs. Mem. Amer. Math. Soc. 250 (2017), no. 1190, v+82 pp.
- M. J. Dunwoody, Planar graphs and covers, Arxiv preprint `https://arxiv.org/abs/0708.0920`
- O. Varghese, Planarity of Cayley graphs of graph products of groups. Discrete Math. 342 (2019), no. 6, 1812–1819.

Замечу, что работы по графам Кэли групп релевантны и в теории графов Кэли полугрупп, поскольку конечно порожденная группа конечно порождена и как полугруппа. Среди работ последних лет по графам Кэли конечно порожденных групп есть весьма глубокие, вскрывающие интересные взаимосвязи между алгеброй, комбинаторикой и маломерной топологией. Если бы рецензируемая статья включала содержательный обзор и таких работ, она бы сильно выиграла.

Стр. 2, абзац 3 сверху: Здесь упомянута работа Босака [9] как пример исследования полугрупп методами теории графов и говорится, что «в дальнейшем широкое развитие и обобщение тех идей с приложением к теории графов было отражено в систематических работах института математики чешской академии наук под руководством профессора Зелинка [92,93,94]». Граф, введенный в рассмотрение Босаком в [9], — это граф подполугрупп данной полугруппы, в котором две различные подполугруппы смежны, если и только если их пересечение непусто. Этот граф никак не связан с графом Кэли. Работа [92] относится именно к графам подполугрупп, а работа [94] вообще не имеет никакого отношения ни к каким графам, так что ссылки на эти работы нерелевантны. Отмечу, хоть это и не так важно, что Богдан Зелинка никогда не работал в Институте математики Чешской академии наук — всю свою академическую жизнь он провел в Либерецком техническом университете (Technical University of Liberec).

Стр. 2, абзац 2 снизу: Заявление, что «значимость планарных графов Кэли для полугрупп сравнима с плоскими диаграммами ван Кампена в теории групп», не только грамматически неуклюже («значимость» нельзя сравнить с «диаграммами»!), но и математически бессмысленно — ведь диаграммы ван Кампена, в отличие от графов Кэли, всегда плоские. По-видимому, автору хотелось любой ценой сослаться на книгу [59].

Стр. 3, абзац 3 сверху: Весь этот абзац (со странными в контексте рецензируемой статьи экскурсами в историю античной математики) представляется совершенно нерелевантным.

Стр. 3, абзац 2 снизу: Здесь вдруг возникают «унитарные графы Кэли для конечных колец» (со ссылкой на [65]). Унитарный граф Кэли, рассматриваемый в [65], — это граф Кэли аддитивной группы кольца вычетов по модулю n относительно множества обратимых элементов этого кольца, т.е. вычетов, взаимно простых с n. Какое отношение такие графы имеют к проблематике рецензируемой статьи опять-таки непонятно.

Стр. 3, абзац 1 снизу: Абзац начинается утверждением, что Кэли ввел графы, впоследствии названные его именем, в 1854 г. Это неверно (и противоречит самой первой фразе введения на стр. 2, где сказано, что понятие графа Кэли было предложено в 1878 г.) В работе Кэли 1854 г. [11] впервые появляется то, что сейчас называют таблицами Кэли; таким образом, и эта ссылка нерелевантна.

Далее сообщается, что изучение «планарных графов Кэли восходит корнями к известным работам 1896 года [54]». Примечательное выражение «восходить корнями» обогащает палитру русского языка, но не дает ответа на вопрос, почему о работе Машке [54] говорится во множественном числе.

В следующей фразе утверждается, что «в 1958 году было показано [6,64], что свойство планарности трудно для изучения, поскольку нет эффективного алгоритма, который по заданному представлению определит планарность графа соответствующей группы». Автор имеет в виду теорему Адяна–Рабина о неразрешимости марковских свойств групп: нетрудно понять, что свойство иметь планарный граф Кэли — марковское. Процитированная фраза, однако, неудачна по целому ряду параметров. Во-первых, непонятно, почему автор цитирует работу Рабина [64], но вместо работы Адяна 1955 г. ссылается на депонированную рукопись [6]. Во-вторых, фраза создает ошибочное впечатление, что в работе Рабина [64] специально рассматривалась задача о планарности графа Кэли. В-третьих, в силу теоремы Адяна–Рабина для распознавания марковских свойств нет **никаких** алгоритмов (а не только эффективных).

Далее говорится (со ссылкой на монографию [96]), что в 1980 г. «удалось перечислить группы, графы Кэли которых планарны». Насколько я понимаю, термин «planar group» в [96] используется в смысле группы сохраняющих ориентацию автоморфизмов плоского комплекса. Группы с планарными графами Кэли таковы, так как группа действует автоморфизмами на своем графе Кэли, но я не думаю, что обратное должно быть верно. Поэтому процитированное высказывание сомнительно; во всяком случае, никакого списка групп с планарными графами Кэли в [96] я не нашел. Чтобы разобраться с этими нюансами, автору имело бы смысл проконсультироваться со специалистами по комбинаторной теории групп.

Оставшаяся часть абзаца рандомно перечисляет публикации, связанные с графами Кэли полугрупп. Ни в одной из этих публикаций, кроме [44] и [80], не идет речь о планарности этих графов.

Стр. 6, Теорема 1.1: Автор всюду пользуется термином «полурешетка», но здесь почему-то всплывает устаревший термин «полуструктура».

Стр. 8, абзац 1 сверху: Оценка времени работы алгоритма Бадера и Срешты $O\left(\frac{n\log^2 n}{p}\right)$, а не $O\left(\log^2 \sqrt[p]{n^n}\right)$, как утверждает автор.

Стр. 15, Теорема 2.3.4: Здесь имеется терминологическая путаница. Автор называет *клиффордовой* полугруппу, являющуюся объединением групп. Такая терминология действительно использовалась в некоторых публикациях школы Л. Н. Шеврина в последней четверти прошлого века, но не закрепилась. Сейчас объединения групп повсеместно называют *вполне регулярными* полугруппами, а атрибут *клиффордова* относят лишь к инверсным вполне регулярным полугруппам. В работе Жанг [95], из которой взята теорема 2.3.4, термин «клиффордова полугруппа» используется именно в последнем смысле, а не в том, который имеет в виду автор рецензируемой статьи. Но даже и при таком, намного более узком понимании термина именовать теорему 2.3.4 «классификацией плоских клиффордовых полугрупп», как это делает автор в начале 3-го снизу абзаца стр. 15, неправомерно. В теореме анализируется лишь простейший частных случай объединения двух групп.

Стр. 16, абзац 1 сверху: Весь этот абзац и цитируемые в нем работы нерелевантны. В работе Цедли (а не Чедли, как неверно транскрибирует автор) [14] планарность полурешетки понимается не в смысле планарности ее графа Кэли, а в смысле планарности ее диаграммы Хассе. Например, любая цепь планарна в последнем смысле, но граф Кэли 5-элементной цепи — это непланарный граф K_5.

Стр. 16, §2.4, абзац 1 сверху: Автор пишет «В ряде работ исследовалось свойство планарности графов Кэли полугрупп [93]». В действительности в [93] изучается граф правого сдвига полугруппы S относительно ее элемента a, т.е. граф, вершины которого — элементы S и в котором вершины s и t соединены ребром, если и только если $t = sa$. Такой граф является графом Кэли в смысле автора лишь в случае, когда элемент a порождает S. Кроме того, граф правого сдвига всегда планарен, так что утверждение, что в [93] «исследовалось свойство планарности», ничем не обосновано.

Стр. 35, абзац 2 снизу: Здесь автор описывает технические трудности, которые он преодолел при доказательстве того факта, что свободная связка удовлетворяет тождеству $xyzuxyuxz = xyzuyuxz$. По-видимому, автор не знаком с некоторыми классическими фактами о равенстве слов в свободной связке B_X над алфавитом X, установленными еще в работе Грина и Риса (J. A. Green, D. Rees, On semi-groups in which $x^r = x$. Proc. Cambridge Philos. Soc. 48 (1952), 35—40). Их можно найти, например, в §4.5 учебника Хауи (J. M. Howie, Fundamentals of semigroup theory. London Mathematical Society Monographs. New Series, 12. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995. x+351 pp.). Один из этих фактов состоит в следующем. Обозначим через $c(w)$ *содержание* слова w, т.е. множество букв из X, участвующих в записи w. Тогда если $c(w_1) = c(w_3) \supseteq c(w_2)$, то $w_1w_2w_3 = w_1w_3$ в B_X, см. стр. 121 в упомянутом учебнике. Если положить $w_1 := xyzu$, $w_2 := x$, $w_3 = yuxz$, становится очевидным, что нужное автору тождество $xyzu \cdot x \cdot yuxz = xyzu \cdot yuxz$ есть специальный случай указанного общего факта, и потому оно не нуждается в отдельном доказательстве. Аналогично, из решения проблемы равенства слов в свободной связке сразу следует неравенство $xyzuyux \neq xyzuxyux$ в B_X, которое автор проверяет громоздкими кустарными средствами в следующих двух абзацах.

Стр. 37, вопрос 5: Ответ на этот вопрос для локально конечных многообразий групп, очевидно, положителен, как следует из рассуждений в абзаце 1 следующей страницы. Более того, легко понять, что ранг планарности любого нетривиального локально конечного многообразия групп $\mathcal{V}$ не превосходит трех. Действительно, каждая группа в списке Машке может быть порождена не более чем тремя элементами, и уже поэтому $\mathcal{V}$-свободная группа с четырьмя и более образующими не может принадлежать этому списку.

Приведенный список замечаний далеко не исчерпывающий, но думаю, что он достаточен для заключения, что статья не может быть рекомендована к опубликованию. Как отмечено выше, устранение перечисленных замечаний — это только самый первый шаг той кардинальной переработки, которой должна подвергнуться статья для того, чтобы имело смысл ставить вопрос о пересмотре этого заключения.