S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 512.572
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 20M07

ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛУГРУПП С ПЛАНАРНЫМИ ГРАФАМИ КЭЛИ

Д.В. СОЛОМАТИН

Abstract. We survey a results obtained in investigations on finite semigroups with planar Cayley graphs and results on the study of planarity rank of a semigroup varieties. A number of unsolved problems are formulated.

Keywords: semigroup, Cayley graph of a semigroup, semigroup variety, planarity rank of a semigroup variety, planar graphs.

СОДЕРЖАНИЕ

Solomatin, D.V., About semigroups with planar Cayley graphs.

Автор выражает глубокую признательность профессору Л. М. Мартынову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и полезные обсуждения результатов.

Поступила 9 сентября 2020 г., опубликована __ _____ 202_ г.

Введение

Понятие графа Кэли было предложено Артуром Кэли в 1878 году [12] как наглядная интерпретация абстрактных групп. С тех пор было получено много интересных результатов опирающихся на саму концепцию графов Кэли групп как таковую. Вдохновленные обилием результатов о графах Кэли для групп, многие авторы изучали графы Кэли для полугрупп. Что касается исследования планарных графов, то их традиционно относят к вопросам топологии, которые представляют определённый интерес и с инженерной точки зрения. Рассматриваемый же нами алгебраический подход значительно шире.

Описание допускающих плоские графы Кэли конечных групп известно давно [54], но исследования не прекращаются, а продолжаются [6, 5], в том числе и зарубежными авторами [16, 17, 23, 24].

Первое упоминание используемого нами определения конструкции графов Кэли для полугрупп, относительно множества образующих её элементов, как ориентированного мультиграфа с помеченными (раскрашенными) дугами, опубликовано в трудах второй пражской конференции по топологии 1966 года [60]. При этом исследование полугрупп методами теории графов проводилось и ранее, например [9], а в дальнейшем широкое развитие и обобщение тех идей с приложением к теории графов было отражено в систематических работах института математики чешской академии наук под руководством профессора Зелинка [92, 93, 94].

Хорошо известно, что можно фиксировать свойства графов, получая тем самым описание связанных с ними алгебраических структур, и наоборот, фиксируя алгебраические свойства, получать уникальные серии графов, наглядно отражающих внутреннюю природу некоторой алгебраической структуры. Это будет продемонстрировано, в частности, в приводимых результатах.

Вопрос описания конечных полугрупп с планарными графами Кэли оказался весьма трудным и по сей день остаётся открытым. Наши исследования позволяют говорить о том, что вопрос является трансцендентным. При этом значимость планарных графов Кэли для полугрупп сравнима с плоскими диаграммами ван Кампена в теории групп, подробное описание которых можно найти в [59]. Кроме того, поднимаемые в работах [39, 40] специалистов по теории графов и её применению к теории полугрупп, вопросы различной вложимости графов Кэли для полугрупп также лежат на стыке теории графов, алгебры и топологии, а ведь именно на стыке наук рождаются новые идеи.

Основной целью настоящей статьи является обзор результатов многолетних научных исследований проводимых в следующих двух направлениях. Первое направление сопряжено с исследованиями конечных полугрупп, допускающих планарные графы Кэли. Второе направление исследования инспирировано тесно связанными между собой понятиями ранга и спектра планарности многообразий полугрупп. Предложенное Л.М. Мартыновым, это направление базируется на оценке наибольшего числа образующих элементов свободных полугрупп в многообразиях полугрупп, относительно которых граф Кэли этих полугрупп является планарным. Так как свободные полугруппы в многообразиях играют важную роль (хотя бы потому, что любая полугруппа многообразия является гомоморфным образом подходящей свободной в нём полугруппы), то изучение этого понятия является весьма актуальной задачей. При изучении свойства планарности графов Кэли для многообразий полугрупп принципиальный характер имеет проблема описания рангов планарности многообразий полугрупп, сформулированная Л.М. Мартыновым в 2015 году [1].

В завершающем подразделе обзора будет приведён новый результат, полученный в процессе написания. Прежде чем привести определение ключевого для понимания этого результата понятия (ранга планарности многообразия полугрупп), напомним некоторые определения понятий, связанных со свойством планарности графов Кэли полугрупп.

Наглядность – один из основных принципов обучения. Таким образом, навстречу алгебраической теории графов [7] идет «Графовая теория алгебр». Не секрет, что со времен Древнего Египта и Вавилона, геометрические чертежи использовались для иллюстрации алгебраических соотношений; «не только наслаждение зримым, но и логическая необходимость заставили пифагорейцев преобразовать их алгебру в геометрическую форму». Более того, «визуализация» является одним из основополагающих факторов развития любых способностей.

Структурные свойства унитарных графов Кэли для конечных колец ныне изучают различные исследовательские коллективы. В частности, в [65] рассматриваются собственные пространства унитарных графов Кэли и некоторых графов Хэмминга. Показано, что эти классы графов тесно связаны между собой и допускают особенно простые базисы собственных пространств для всех собственных значений, а именно базисы, содержащие вектора записываемые элементами множества $\{0, 1, -1\}$.

В качестве небольшого исторического экскурса всё же напомним, что Артур Кэли использовал для наглядного представления структуры групп графы, впоследствии названные его именем, еще в 1854 году [11]. Изучение же планарных графов Кэли восходит корнями к известным работам 1896 года [54]. А в 1958 году было показано [2, 64], что свойство планарности трудно для изучения, поскольку нет эффективного алгоритма, который по заданному представлению определит планарность графа соответствующей группы. Таким образом, в лучшем случае, можно рассчитывать лишь на «каталоги» планарных групп. И в 1980 году [96] удалось перечислить группы, графы Кэли которых планарны. Но на этом исследования не были остановлены, так, например, в 1997 году изучались регулярные замощения плоскости как графы Кэли [6]. Из сравнительно недавних работ можно упомянуть исследования операций над группами, сохраняющих свойства связности и планарности их графов [18]. Как видим изучение графов Кэли востребовано для групп. Более того, с 1981 года это понятие систематически исследовалось в виде аналогичной конструкции на полугруппах [93]. Важность этого понятия для комбинаторной теории полугрупп была продемонстрирована в работах многих авторов. Например, в [47] изучались E-унитарные инверсные моноиды и графы Кэли, а в [29, 32] исследовали свойства полноты, двудольности, транзитивности графов Кэли групп и полугрупп. В [30] описывались полугруппы, удовлетворяющие различным комбинаторным свойствам, определенным в терминах графов Кэли, а в [31] – определялись все периодические (и, следовательно, все конечные) полугруппы G, для которых существует непустое подмножество S такое, что граф Кэли группы G относительно S является неориентированным графом Кэли. Кроме того, из [33] нам известно описание конечных инверсных полугрупп, коммутативных инверсных полугрупп с двудольными графами Кэли, и инверсных эпигрупп с графами Кэли, являющимися дизъюнктными объединениями полных графов. Алгебраисты интересовались также и графами Кэли полурешёток полугрупп, на предмет характеризации цветовых автоморфизмов вершинно-транзитивных графов Кэли полурешёток полугрупп [37], вершинной транзитивностью графов Кэли полугрупп Брандта [36], вершинной транзитивностью графов Кэли левых групп [35] и конечных связок (полугрупп идемпотентов) [20]. Что касается важного свойства планарности, то, как видим, ранее оно исследовалось в основном для групп, а ныне проводятся исследования полугрупп с ациклическими [44], внешнепланарными [80] графами Кэли. Изучаются и более общие вопросы, о полугруппах с планарными графами Кэли, результаты в этой области принадлежат автору, они будут приведены далее.

Отметим, что после пионерских работ, свойство планарности для графов Кэли полугрупп зазвучало и в работах других авторов, так как развитие тематики помимо фундаментального значения находит отражение в прикладных исследованиях [43, 44, 46, 45, 49, 50, 51, 52, 34, 55, 58, 95].

В частности, известна классификация плоских клиффордовых полугрупп, понятие которых близко к понятию групп, так как клиффордовы полугруппы являются объединением групп. Расскажем обо всём этом по порядку в соответствующих разделах.

1. Основные определения и обозначения

Для удобства чтения напомним определения основных понятий и условимся относительно некоторых обозначений. Определения других, используемых в этой работе и не определяемых здесь понятий, можно найти в [67].

Определение 1.1. *Пусть S – полугруппа, X – множество порождающих её элементов. Через $Cay(S,X)$ обозначим [правый] граф Кэли полугруппы S относительно X. Граф $Cay(S,X)$ состоит из множества вершин S и множества помеченных дуг – всевозможных троек (a,x,b), где $a,b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$.*

Заметим, что в данном случае граф Кэли является ориентированным мультиграфом с помеченными дугами. Вершины графа обычно изображаются точками на плоскости, а дуга (a,x,b) – линией направленной от a к b и помеченной элементом x.

Вышеупомянутое определение задает ориентированный мультиграф с помеченными рёбрами. Но существует несколько небольших разновидностей, например, в некоторых контекстах, вместо правого умножения используется левое. Тем самым можно разделять правые и левые графы Кэли. Очевидно, что данные понятия совпадают для случая коммутативных полугрупп, в противном же случае их можно исследовать с точностью до антиизоморфизма, а принцип двойственности позволяет не воспроизводить соответствующие утверждения для одного из взаимно двойственных случаев.

Определение 1.2. *Основой ориентированного мультиграфа с помеченными дугами называем (обыкновенный) граф, полученный из данного графа удалением петель, меток и заменой всех дуг, соединяющих две вершины одним ребром, соединяющим эти вершины.*

Естественно называть полугруппу *допускающей планарный граф Кэли*, если относительно некоторого минимального множества образующих её элементов, основа граф Кэли данной полугруппы является планарным графом.

Определение 1.3. *Ориентированный помеченный мультиграф называем планарным [внешнепланарным], если его основа является планарным [внешнепланарным] графом. Будем говорить, что полугруппа S допускает планарный [внешнепланарный] граф Кэли, если для некоторого множества X его образующих основа $SCay(S,X)$ графа $Cay(S,X)$ является планарным [внешнепланарным] графом.*

Напомним, что граф называется внешнепланарным, если внешняя грань его плоской укладки содержит все его вершины.

Систему полугрупповых тождеств $\{xw \approx w, wx \approx w\}$ при любом слове w, не содержащем переменную x, будем записывать в эквивалентном виде тождеством $w \approx 0$. Полугрупповые тождества вида $w \approx 0$, при $w \neq 0$, а также многообразия полугрупп с нулем 0, задаваемые системами тождеств такого вида, называются 0-*приведёнными*. Такие многообразия обладают неприводимым базисом тождеств вида $w \approx 0$ и их множество имеет мощность континуума [53].

Напомним также:

Определение 1.4. *Многообразие, каждая полугруппа которого допускает планарный граф Кэли, называется планарным.*

И приведем ещё определение конечных свободных коммутативных моноидов, так как будем ссылаться на ранее выполненные нами исследования вопросов планарности их графов Кэли. Конечную полугруппу [моноид, полугруппу с нулем], являющуюся коммутативно-свободным произведением циклических полугрупп [моноидов, полугрупп с нулем], условимся называть *конечной свободной коммутативной полугруппой* [*моноидом, полугруппой с нулем*]. В частности, в классе коммутативных моноидов такой моноид имеет копредставление:

$$S = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid a_j^{m_j} = 1, a_i^{r_i+m_i} = a_i^{r_i}, i \in I, j \in J \right\rangle,$$
$$I \cup J = \overline{1,n}, I \cap J = \varnothing, J \neq \varnothing$$

Под *множеством свободных образующих* коммутативно–свободного произведения циклических полугрупп [моноидов, полугрупп с нулем] мы понимаем множество полугрупповых образующих соответствующих циклических сомножителей.

Кроме того, в обозначениях моноидов [полугрупп с нулем], условимся различать операции присоединения единицы [нуля] и внешнего присоединения единицы [нуля] к полугруппе S. В первом случае единицу [нуль] будем добавлять только в случае, когда она [он] отсутствует в полугруппе S, и соответствующую полугруппу обозначать, как обычно, через S^1 [S^0]. Во втором случае единицу [нуль] будем присоединять всегда и полученную полугруппу обозначать через S^{+1} [S^{+0}].

Важнейший класс полугрупп формируют клиффордовы полугруппы, по определению, являющиеся объединением групп. Типичные ситуации возникновения групп в теории полугрупп перечислены в [67], где можно почерпнуть и дополнительные определения. Кроме того, краткий перечень современных понятий и актуальных фактов теории полугрупп приведен в фундаментальном обзоре [48, стр. 218–225]. Среди прочего из упомянутого обзора напомним, что полугруппа S называется *регулярной*, если для любого элемента a из S найдется элемент $x \in S$ такой, что $axa = a$. Другими словами, полугруппа называется регулярной, если в ней для любого элемента a разрешимо уравнение $axa = a$. Далее, два элемента a и b полугруппы S называются *инверсными*, если $aba = a$ и $bab = b$. В результате, тесно связанными с понятием регулярности оказываются инверсные полугруппы. *Инверсной полугруппой* называется полугруппа, в которой каждый элемент имеет единственный инверсный к нему элемент.

Как мы упомянули выше, полугруппа, которая является объединением групп, называется *клиффордовой* (*вполне регулярной*). Таким образом, если элементы полугруппы, принадлежащие максимальным подгруппам, называть *групповыми*, то соответственно полугруппы, все элементы которых групповые являются вполне регулярными или клиффордовыми.

Напомним, что *полурешёткой* называется коммутативная полугруппа идемпотентов. В связи с этим для понимания дальнейшего изложения уместно будет вспомнить и хорошо известный факт о том, что клиффордова инверсная полугруппа является полурешёткой групп, более того, для неё можно указать детальное строение, описываемое в теореме 1.1.

Теорема 1.1 ([63, Теорема 4.11])**.** *Пусть Y – полуструктура. Каждому элементу α из Y поставим в соответствие группу G_α таким образом, что G_α и G_β не пересекаются при $\alpha \neq \beta$. Каждой паре элементов α, β из Y, для которых $\alpha > \beta$, поставим в соответствие гомоморфизм $f_{\alpha,\beta}$, группы G_α в G_β таким образом, что если $\alpha > \beta > \gamma$, то $f_{\alpha,\beta} f_{\beta,\gamma} = f_{\alpha,\gamma}$. Через $f_{\alpha,\alpha}$ обозначим тождественный автоморфизм группы G_α. Пусть S – объединение всех групп $G_\alpha (\alpha \in Y)$. Определим произведение в S, полагая для двух элементов a_α, b_β из S ($a_\alpha \in G_\alpha$, $b_\beta \in G_\beta$) $a_\alpha a_\beta = (a_\alpha f_{\alpha,\gamma})(b_\beta f_{\beta,\gamma})$, где γ равно произведению $\alpha\beta$ элементов α и β полуструктуры Y. Тогда S – полугруппа с коммутирующими идемпотентами, являющаяся объединением групп, или (что эквивалентно) инверсная полугруппа, являющаяся объединением групп. Обратно, каждая такая полугруппа может быть построена указанным способом.*

В 2012 году [82] начато изучение предложенного Л.М. Мартыновым понятия ранга планарности многообразия полугрупп. Третий раздел настоящего обзора содержит детальное изложение актуальных результатов и текущего положения дел в данной области.

Условимся буквой $\boldsymbol{O}$ обозначать многообразие одноэлементных полугрупп и называть его *тривиальным.*

Определение 1.5. *Пусть $\boldsymbol{V}$ – нетривиальное многообразие полугрупп. Если существует такое натуральное число r, что все $\boldsymbol{V}$-свободные полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарные графы Кэли (относительно множеств их свободных образующих), а $\boldsymbol{V}$-свободная полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли, то рангом планарности многообразия $\boldsymbol{V}$ называется это число $r = r_\pi(\boldsymbol{V})$. Если для многообразия $\boldsymbol{V}$ такого натурального числа не существует, то говорят, что многообразие $\boldsymbol{V}$ имеет бесконечный ранг планарности и пишут $r_\pi(\boldsymbol{V}) = \infty$.*

Заметим, что ранг планарности для любого нетривиального многообразия $\boldsymbol{V}$ ограничен снизу, а именно, $r_\pi(\boldsymbol{V}) \geq 1$, так как очевидно, что любая циклическая (моногенная) полугруппа допускает планарный граф Кэли. С другой стороны, вырожденный случай формирует тривиальное многообразие $\boldsymbol{O}$, для которого нам удобно будет считать в дальнейшем, что ранг планарности $r_\pi(\boldsymbol{O}) = 0$, в целях повышения информативности понятия спектра рангов планарности.

Определение 1.6. *Спектром рангов планарности многообразия $\boldsymbol{V}$ называется множество $Spec_{r\pi}(\boldsymbol{V})$ всех возможных значений рангов планарности подмногообразий $\boldsymbol{X}$ многообразия $\boldsymbol{V}$.*

Если через $L(\boldsymbol{V})$ обозначить решётку подмногообразий многообразия $\boldsymbol{V}$, то $Spec_{r\pi}(\boldsymbol{V}) = \{r_\pi(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{X} \in L(\boldsymbol{V})\}$. Кроме того, зафиксируем обозначение $\mathbb{N}^\infty = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \infty\}$.

Определение 1.7. *Спектр рангов планарности полугруппового многообразия $\boldsymbol{V}$ называется полным, если он содержит все натуральные числа и символ ∞, то есть $Spec_{r\pi}(\boldsymbol{V}) = \mathbb{N}^\infty$.*

Коль скоро всякое многообразие полугрупп содержит тривиальное многообразие в качестве подмногообразия, то спектр любого многообразия содержит число 0, а $Spec_{r\pi}(\boldsymbol{O}) = \{0\}$.

При получении сформулированных ниже результатов для обоснования планарности обыкновенного графа использовались различные критерии. Наиболее часто применялся известный *критерий Понтрягина–Куратовского*: обыкновенный граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных полному двудольному графу $K_{3,3}$ или полному пятиэлементному графу K_5. Напомним его в оригинальной формулировке:

Теорема 1.2. *(Л.С. Понтрягин 1927 – К. Куратовский 1930). Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подразбиений полного графа с пятью вершинами (K_5) и полного двудольного графа с тремя вершинами в каждой доле ($K_{3,3}$).*

Кроме того, применялась *теорема Вагнера*: обыкновенный граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, стягиваемых к графам K_5 или $K_{3,3}$.

Для полугруппы, удовлетворяющей условиям соответствующего утверждения, строится плоская укладка её графа Кэли. Если полугруппа не удовлетворяет этим условиям, то основа её графа Кэли содержит подграф, либо гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, либо стягиваемый к графу K_5 или $K_{3,3}$. Напомним, что известный критерий Понтрягина–Куратовского, равно как и эквивалентный ему критерий Вагнера, подразумевает поиск подграфов специального вида K_5 или $K_{3,3}$, в той или иной форме, что подчеркивает важную роль последних. В статье [69] эти графы были детально исследованы.

Более того, на сегодняшний день существуют эффективные методы распознавания планарности графа. Например, Лемпел, Эвен и Цедербаум в [41] предложили работающий линейное время $\mathrm{O}(n)$ алгоритм, использующий специальные структуры данных (PQ-деревья) для представления графа порядка

n; на его базе Клейн и Рейф [38] построили параллельный алгоритм, довольствующийся $\mathrm{O}(\log^2 n)$ операциями; последний, в свою очередь, оптимизировали Бадер и Среща [4], для параллельных вычислений на $p \leq n$ процессорах с CREW PRAM (это одна из разновидностей оперативной памяти для мультипроцессорных систем, которая допускает одновременное чтение, но запрещает одновременную запись), и получили более точную оценку эффективности $\mathrm{O}(\log^2 \sqrt[p]{n^n})$.

В [79] все известные способы определения планарности графа условно разделены на следующие группы:

1) Критерии планарности графа.

1.1. Критерий Маклейна.

1.2. Критерий Уитни.

1.3. Критерий Понтрягина–Куратовского (вариация для схем – условия Линского).

1.4. Критерий Харари–Татта.

2) Алгоритмические методы определения планарности графа.

2.1. Циклические методы.

2.2. Матричные методы.

2.3. Смешанные методы.

Заметим, что к критерию 1.3 можно адаптировать представленный в [77] вероятностный алгоритм поиска подграфа гомеоморфного заданному.

С применением функционала Маклейна и структурных чисел, можно предложить более алгоритмизируемый критерий. Хотя и менее эффективный, чем использующий PQ-деревья, но легче реализуемый. Для поиска базиса пространства циклов в графе можно использовать так называемые структурные числа. Вообще говоря, задача поиска циклов для полугрупп заслуживает отдельного внимания [27].

В целом, задача распознавания планарности графа Кэли полугруппы разбивается на следующие последовательные этапы:

1) подготовительный этап;

2) эвристический анализ;

3) предварительный выбор;

4) окончательный выбор.

На подготовительном этапе фиксируется класс исследуемых полугрупп и метод проверки планарности основы их графа Кэли, после чего эвристический анализ позволяет предопределить эффективность выбранного метода. Выбор из всех полугрупп лишь допускающие планарные графы завершает решение задачи. Очевидно, что число всех неориентированных графов порядка n без петель и кратных ребер равно $2^{\frac{n^2-n}{2}}$, известны так же оценки числа заведомо планарных и заведомо не планарных из них [57]. Естественно, далеко не каждый из них планерен и может служить основой некоторого графа Кэли полугруппы. Тем не менее, решение поставленной задачи перебором сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Например, число всех неориентированных графов порядка 6 равно 32 768, число заведомо не планарных из них 121, а заведомо планарных – 22 818, поэтому дополнительная проверка требуется еще для 9 829 графов.

В связи с этим, имеет смысл индуктивно строить цепь полугрупп, в которой граф Кэли каждой предшествующей содержался бы в следующем планарном графе. Получится, аналогично пифагоровым полям, своеобразная цепочка расширений. При её построении следует учитывать, что любую петлю можно провести без пересечений. Более того, для кратных ребер справедливо утверждение - если одно из кратных ребер расположено без пересечений, то и другие не пересекаются.

Таким образом, если строить цепочки планарных графов Кэли, то можно ограничиться описанием соотношений, приводящих к появлению кратных ребер и петель в конечном случае, либо фрактальных графов в бесконечном случае. Поскольку добавление иных ребер, в пределе, инспирирует наибольшие по включению планарные графы, так называемые триангуляции, исследованные также в [69].

2. О конечных полугруппах с планарными графами Кэли

Пионерские работы в обозначенном направлении, инициированные в 2001 году Л.М. Мартыновым, можно условно разделить по следующим категориям, в зависимости от класса решаемой задачи:

1) критерий планарности графов Кэли коммутативно-свободных произведений циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулем;

2) критерий планарности графов Кэли прямых произведений циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулем;

3) задача о допустимости плоских триангуляций, полного пятиэлементного графа K_5 и полного двудольного графа $K_{3,3}$ с некоторой ориентацией ребер в качестве графов Кэли полугрупп;

4) рассыпчатые полугруппы с планарными графами Кэли.

А именно, в [68] охарактеризованы полугруппы, являющиеся коммутативно-свободными произведениями [67, с. 69] циклических полугрупп, циклических моноидов и циклических полугрупп с нулем с планарными графами Кэли. При этом мы рассматриваем сначала случаи конечных полугрупп, а затем в качестве следствий получаем описания бесконечных полугрупп с указанным свойством.

2.1. **О коммутативных полугруппах с планарными графами Кэли**

Выбор тематики данного раздела объясняется исключительной ролью коммутативных полугрупп в теории полугрупп, сравнимой по уровню развития со структурной теорией абелевых групп.

Основным результатом о конечных свободных коммутативных полугруппах с планарными графами Кэли является следующая

Теорема 2.1.1 ([68, Теорема 1]). *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1) $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, *где r и m – любые натуральные числа;*

2) $S = \big\langle a,\ b \bigm| ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h \big\rangle$, *где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:*

а) *$m \leq 2$, $t \leq 2$;*

б) *$r = 1$, $h = 1$, $t = 2$; или $r = 1$, $h = 2$, $t = 1$;*

в) *$r = 1$, $h = 1$, $m = 2$; или $r = 2$, $h = 1$, $m = 1$;*

г) *$r = 1$, $m = 1$; или $h = 1$, $t = 1$;*

3) *$S = \langle a,\ b,\ c \ \big|\ ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^{k+l} = c^k \rangle$, где k и l – натуральные числа, причем $l \leq 2$.*

Заметим, что в каждом условии теоремы присутствуют бесконечные серии полугрупп.

Тем не менее, число образующих соответствующих полугрупп с планарными графами Кэли в данном случае ограничено числом 3. Позднее [71] были охарактеризованы конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие планарный граф Кэли.

Теорема 2.1.2 ([71, Теорема 1]). *Граф Кэли конечного свободного коммутативного моноида S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задан копредставлением одного из следующих видов:*

1) *$S = \langle a \mid a^m = 1 \rangle$, где m – любое натуральное число;*

2.1) *$S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^t = 1 \rangle$, где для натуральных чисел r, m, t выполнено одно из следующих ограничений:*

а) *$t \leq 2$;*

б) *$m \leq 2$, $t > 2$;*

2.2) *$S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^m = 1,\ b^t = 1 \rangle$, где m и t – натуральные числа, причем $t \leq 2$;*

3.1) *$S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h, c^k = 1 \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k выполнено одно из следующих условий:*

а) *$h = 1$, $t = 1$, $k = 1$;*

б) *$m \leq 2$, $t \leq 2$, $k = 1$;*

в) *$m \leq 2$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 2$;*

3.2) *$S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle$, где r и m – натуральные числа, причем $m \leq 2$;*

3.3) *$S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle$;*

4) *$S = \langle a, b, c, d \mid ab = ba,\ ac = ca,\ ad = da,\ bc = cb,\ bd = db,\ cd = dc,$ $a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c^2 = c, d = 1 \rangle$, где r и m – натуральные числа, причем $m \leq 2$.*

Для полноты изложения приведем и соответствующий результат из [68], о конечных свободных коммутативных полугруппах с нулем, допускающих планарный граф Кэли.

Теорема 2.1.3 ([68, Теорема 2]). *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём 0 относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1) *$S = \langle a \mid a^r = 0 \rangle$, где r – любое натуральное число;*

2) *$S = \langle a,\ b \ \big|\ ab = ba,\ a^r = 0,\ b^h = 0 \rangle$, где r, h– любые натуральные числа;*

3) *$S = \langle a,\ b \ \big|\ ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^h = 0 \rangle$, где r, m, h – натуральные числа, причем $m \leq 2$, либо $r = 1$ и $h = 1$;*

4) *$S = \langle a,\ b,\ c \ \big|\ ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^k = 0 \rangle$, где k – любое натуральное число.*

Коль скоро согласно теореме Биркгофа [8] многообразия полугрупп замкнуты относительно операций взятия подполугрупп, прямых произведений и гомоморфных образов полугрупп, то вторым естественным этапом эволюции познания структуры полугрупп, допускающих планарные графы Кэли, является анализ прямых произведений оных. Полугруппы, являющиеся прямыми произведениями циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулем, допускающие планарные графы Кэли охарактеризованы в [72] и [73] следующими теоремами.

Так как граф Кэли конечной циклической полугруппы является планарным, то предполагается, что число сомножителей в рассматриваемых ниже прямых произведениях более одного.

Теорема 2.1.4 ([72, Теорема]). *Конечная полугруппа S, являющаяся прямым произведением неодноэлементных циклических полугрупп, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r\rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h\rangle$, *где для натуральных чисел r, m, h, t выполняется одно из следующих ограничений:*

1.1) $r = 1$, $h = 1$, *НОД*$(m, t) < 3$;

1.2) $r = 1$, $m = 2$, $t < 3$;

1.3) $r = 2$, $m = 1$, $h < 4$, $t < 3$;

1.4) $r = 2$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$;

1.5) $r = 3$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$;

2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r\rangle \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h\rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k\rangle$, *где для натуральных чисел r, m, h, t, k, l выполняется одно из следующих ограничений:*

2.1) $r = 1$, $m = 2$, $h = 1$, $t = 2$, $k = 1$, $l = 2$;

2.2) $r = 1$, $m = 2$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 2$, $l = 1$;

2.3) $r = 2$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 2$, $l < 3$;

2.4) $r = 2$, $m = 1$, $h = 2$, $t = 1$, $k = 3$, $l = 1$;

3) $S \cong \langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2\rangle$, *где для натуральных чисел r и m выполняется одно из следующих ограничений:*

3.1) $r = 1$, $m = 2$; 3.2) $r = 2$, $m < 3$; 3.3) $r = 3$, $m = 1$.

Теорема 2.1.5 ([73, Теорема 1]). *Конечный моноид S, являющийся прямым произведением неодноэлементных циклических моноидов, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r\rangle^1 \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h\rangle^1$, *где для натуральных r, m, h, t и выполняется одно из следующих ограничений:*

1.1) $r = 1$, $m = 2$;

1.2) $m \leq 2$, $t \leq 2$;

1.3) $r = 1$, $m > 2$, $t \leq 2$;

2) $S \cong \langle a \mid a^3 = a\rangle \times \langle b \mid b^3 = b\rangle \times \langle c \mid c^{k+l} = c^k\rangle^i$, *где i принимает указанные ниже значения, и для натуральных k, l выполняется одного из следующих ограничений:*

2.1) $i = 1$, $l \leq 2$;

2.2) $i = +1$, $k = 1$, $l \leq 2$;

3) $S \cong \langle a \mid a^{1+m} = a^1\rangle^{+1} \times \langle b \mid b^{h+t} = b^h\rangle^i$, *где m, h, t – натуральные числа, $i \in \{1, +1\}$ и выполняется одно из следующих ограничений:*

3.1) $m = 1$;

3.2) $i = 1$, $h = 1$, $t = 2$;
3.3) $m = 2$, $h = 1$, $i = 1$;
3.4) $m = 2$, $h = 1$, $t = 2$, $i = +1$.
4) $S \cong \left\langle a_0 \mid a_0^{r+m} = a_0^r \right\rangle^1 \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \mid a_i^2 = a_i \right\rangle^{+1}$, *где* $m \le 2$, $n \le 2$; *или* $r = 1$, $m = 1$, $n \le 3$.

Заметим, что условия теоремы 2.1.5 практически повторяют условия теоремы 2.1.2, с учётом неодноэлементности перемножаемых моноидов.

Теорема 2.1.6 ([73, Теорема 2]). *Конечная полугруппа S с нулем, являющаяся прямым произведением неодноэлементных циклических полугрупп с нулем, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^0 \times \left\langle b \mid b^{h+t} = b^h \right\rangle^0$, *где для натуральных чисел* r, m, h, t *выполняется одно из следующих ограничений:*
1.1) $r = 2$, $m = 1$, $h < 5$, $t = 1$;
1.2) $r = 3$, $m = 1$, $h = 3$, $t = 1$;
1.3) $r = 2$, $m = 1$, $h = 1$, $t = 2$;
2) $S \cong \left\langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \mid a_i^{2+1} = a_i^2 \right\rangle$, *где* r – *натуральное число, причем* $r \le 3$;
3.1) $S \cong \left\langle a \mid a^{2+1} = a^2 \right\rangle \times \left\langle b \mid b^{2+1} = b^2 \right\rangle^{+0}$;
3.2) $S \cong \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle^{+0} \times \left\langle b \mid b^2 = b \right\rangle^{+0}$, *где* r *и* m – *натуральные числа, причем* $m \le 2$;
4) $S \cong \left\langle a_0 \mid a_0^{r+1} = a_0^r \right\rangle \times \prod_{i=1}^{n} \left\langle a_i \mid a_i^2 = a_i \right\rangle^{+0}$, *где* $n \le 2$; *или* $r = 1$, $n \le 3$.

2.2. О полугруппах с ациклическими графами Кэли

Остановимся подробнее на полугруппах с ациклическими графами Кэли. Их изучением систематически занимался А.Л. Макарьев с 2006 года, и на этом пути были получены интересные результаты.

Теорема 2.2.1 ([43, Теорема 1]). *Основа графа Кэли нильпотентной полугруппы S ступени $n \ge 2$ с минимальным порождающим множеством X является деревом тогда и только тогда, когда для любых элементов x, y из множества X справедливо равенство $xy = x^2$.*

Опираясь на данную теорему, её следствия и ряд ценных предложений, была доказана следующая теорема, характеризующая конечное дерево, которое может быть основой графа Кэли некоторой нильпотентной полугруппы, и позволяющая указать такие полугруппы, если они имеются.

Теорема 2.2.2 ([43, Теорема 2]). *Для того чтобы конечное дерево было основой графа Кэли некоторой нильпотентной полугруппы ступени $n \ge 2$ необходимо и достаточно, чтобы среди центральных или висячих вершин этого дерева имелась хотя бы одна вершина ω, удаленная от каждой висячей вершины дерева (отличной от ω) на расстояние, равное $(n-1)$ или $(n-2)$, и все простые цепи, соединяющие произвольную висячую вершину с вершиной ω, либо не имели общих вершин (кроме ω), либо имели одинаковую длину (или, в частности, совпадали). При этом все висячие вершины дерева (кроме вершины ω, если она является висячей) соответствуют порождающим элементам, а данная вершина ω соответствует нулю этой полугруппы.*

Годом позднее оказались охарактеризованы рассыпчатые и прямоугольные полугруппы с ациклическими графами Кэли (в частности, деревьями), а также найдены условия, при которых ациклический неорграф (в частности, дерево) может служить основой графа Кэли некоторой прямоугольной или рассыпчатой полугруппы.

Основным результатом, касающимся рассыпчатых полугрупп, явилась следующая теорема.

Теорема 2.2.3 ([44, Теорема 1]). *Ординальная сумма $S = \cup_{e \in P} S_e$ сингулярных полугрупп имеет ациклический граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $|P| = 1$ *и* $|S| \leq 2$*, причём* S *– любая сингулярная полугруппа;*

2) $|P| = 1$ *и* $S > 2$*, причём* S *– полугруппа левых нулей;*

3) $|P| = 2$*, причём одна из компонент – произвольная полугруппа левых нулей, а вторая компонента – одноэлементная полугруппа.*

Следующий результат касается прямоугольных полугрупп.

Теорема 2.2.4 ([44, Теорема 2]). *Основа графа Кэли прямоугольной полугруппы* $S = L \times R$ *является ациклическим графом тогда и только тогда, когда* $|R| \leq 2$.

Естественным образом формулируемая, но нетривиально доказываемая, следующая теорема характеризует ациклический неорграф, который может быть основой графа Кэли некоторой прямоугольной полугруппы.

Теорема 2.2.5 ([44, Теорема 3]). *Для того чтобы ациклический неорграф мог служить основой графа Кэли некоторой прямоугольной полугруппы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось только одно из условий:*

1) *каждая вершина графа изолирована;*

2) *все вершины графа являются висячими.*

Как следствие из приведённой теоремы вытекает, для того чтобы неориентированное дерево могло служить основой графа Кэли некоторой прямоугольной полугруппы необходимо и достаточно, чтобы это дерево имело не больше двух вершин.

В 2008 продолжилось рассмотрение полугрупп с ациклическими графами Кэли, начатое в [43] и [44]. А именно, рассматривался важный класс полугрупп идемпотентов – полурешётки.

Характеризацию полурешёток, имеющих ациклический граф Кэли, дает следующая теорема.

Теорема 2.2.6 ([46, Теорема]). *Для полурешётки* S *следующие условия эквивалентны:*

1) *основа графа Кэли полугруппы* S *является ациклическим графом;*

2) S *– веерная полугруппа;*

3) *основа графа Кэли полугруппы* S *является нуль- или одноярусным деревом.*

Заключительным результатом в данной серии была теорема 2.2.7, значительно усиливающая результат теоремы 2.2.3. Заметим, что ранее найдены условия, при которых ординальная сумма сингулярных полугрупп имеет ациклический граф Кэли, а в следующей теореме рассматриваются условия, при которых ациклический граф Кэли имеет ординальная сумма произвольных полугрупп.

Теорема 2.2.7 ([45, Теорема]). *Ординальная сумма $\overline{S} = \cup_{e \in P} S_e$ полугрупп имеет ациклический граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $|P| = 1$ *и* $\overline{S}$ *– любая полугруппа с ациклическим графом Кэли;*

2) $|P| = 2$, *причём выполняется одно из условий:*

а) *первая компонента – циклическая полугруппа с периодом* 1 *или* 2, *а вторая – левосингулярная полугруппа;*

б) *вторая компонента – одноэлементная полугруппа, а первая – любая нециклическая полугруппа* S *с минимальным порождающим множеством* X, *в которой выполняется условие: если* $xa = yb$ *или* $xa = y$, *то* $x = y$, *где* $x, y \in X$ *и* $a, b \in S$.

2.3. **О клиффордовых полугруппах с планарными графами Кэли**

Частным случаем полугрупп являются группы. Исторически сложилось так, что изучение групп было начало раньше, чем полугрупп, исходя из геометрических приложений первых. Несмотря на их более сложную структуру, многие проблемы теории полугрупп ныне решаются по модулю теории групп. В частности, исследователям вопросов планарности графов Кэли для групп удалось получить завершенные результаты.

Как было упомянуто во введении, описание допускающих плоские графы Кэли конечных групп давно известно, но перед тем как привести соответствующую теорему, напомним необходимые обозначения из теории групп. $\mathbb{Z}_n = \{0, \ldots, n-1\}$ – аддитивная группа кольца вычетов по модулю n. Заметим, что $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{mn}$ при взаимно простых m и n. В частности, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \cong D_2$. Здесь $D_n = \langle x, y \mid x^n = y^2 = (xy)^2 = 1 \rangle$ – диэдральная группа. Элементами D_n являются автоморфизмы графа состоящего только из цикла с n вершинами, таким образом $\mid D_n \mid = 2n$. Очевидно, что $\mathbb{Z}_2 \times D_n \cong D_{2n}$ при нечетном n. Наконец A_n и S_n – знакопеременная группа и симметрическая группа подстановок степени n, содержащая только чётные и, соответственно, все возможные подстановки данной степени.

Теорема 2.3.1 ([54, §5]). *Конечная группа* G *планарна тогда и только тогда, когда* $G = G_1 \times G_2$, *где* $G_1 = \mathbb{Z}_1$ *или* $\mathbb{Z}_2$, *а* $G_2 = \mathbb{Z}_n$, D_n, S_4, A_4 *или* A_5.

Напомним, что *родом* графа G называется называется наименьшее число ручек, которые нужно добавить к сфере, чтобы уложить G на этой сфере.

Опираясь на приведённое описание плоских групп, основным результатом в работе [39] была найдена следующая характеризация полугрупп, графы Кэли которых допускают укладку на торе, то есть являются графами минимального рода равного 1. Центральное место в этой характеризации заняли так называемые *правые группы*, по определению представимые прямым произведением группы G на полугруппу правых нулей R_n порядка n.

Теорема 2.3.2 ([39, Теорема 3.6]). *Пусть* $G \times R_r$ *- конечная правая группа с* $r \geq 2$. *Минимальный род графа* $Cay(G \times R_r, C \times R_r)$ *среди всех порождающих множеств* $C \subseteq G$ *группы* G *равен* 1 *тогда и только тогда, когда* $G \times R_r$ *изоморфна одной из следующих правых групп:* $\mathbb{Z}_n \times R_r$ *с* $(n, r) \in$

$\{(2,3),(2,4),(3,3),(i,2)\}$ *для* $i \geq 4$; $D_n \times R_2$ *для всех* $n \geq 2$. *Обратите внимание, что этот список включает в себя* $\mathbb{Z}_2 \times D_n \times R_2$ *и* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_n \times R_2$ *для нечетного* $n \geq 3$.

Упомянутый результат позднее был дополнен перечислением всех правых групп, графы Кэли которых являются планарными, то есть минимального рода равного 0.

Теорема 2.3.3 ([40, Теорема 7.1]). *Любая плоская правая группы представима в виде произведения* $G \times R_k$ *с* $k \geq 2$, *где один из множителей равен* $G \in \{\{e\}, \mathbb{Z}_n, D_n, S_4, A_4, A_5\}$ *при* $k \leq 3$, *либо в виде произведения* $\{e\} \times R_4$. *Здесь* $\{e\}$ *означает одноэлементную группу.*

Приведем теперь известную классификацию плоских клиффордовых полугрупп, понятие которых так близко к понятию групп. Устоявшийся в научной литературе термин для этих полугрупп придан в честь американского математика А. Клиффорда, одного из пионеров теории полугрупп, выявившего среди прочего основополагающие свойства обсуждаемых полугрупп, которые сам он называл объединениями групп [63].

Прежде чем сформулировать соответствующий результат, разъясним используемые в [95] обозначения. Запись $G_\alpha \xrightarrow{f} G_\beta$ применяется для обозначения групп и соответствующего гомоморфизма $f_{\alpha,\beta}$, описанного в теореме 1.1. Запись $G_\alpha \xrightarrow{(f,f')} G_\beta$ содержит соответствующие ограниченные отображения $f_{\alpha,\beta}$ на каждой из компонент G_α, если G_α имеет два образующих. Кроме того, 0 обозначает нулевое отображение, id обозначает тождественное отображение. Например, в пункте 2b теоремы 2.3.4 первый множитель отображается тождественно, а второй - нулевым отображением. Инъективное и биективное отображения обозначаются как *injective* и *bijective* соответственно. Наконец заметим, что если k и m взаимно просты, то группы $Z_k \times Z_m$ и Z_{km} изоморфны друг другу.

Теорема 2.3.4 ([95, Теорема 2.5]). *Пусть* $S = G_\alpha \bigcup G_\beta$ – *конечная клиффордова полугруппа с* $\alpha > \beta$. *Тогда* S *планарна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $G_\alpha = \mathbb{Z}_m$, $G_\beta = \mathbb{Z}_n$ *при*

a) $\mathbb{Z}_m \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_n$ *или*

b) $m = n$, $\mathbb{Z}_m \xrightarrow{bijective} \mathbb{Z}_m$ *или*

c) $n = 2m$, $\mathbb{Z}_m \xrightarrow{injective} \mathbb{Z}_{2m}$.

2) $G_\alpha = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *при*

a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}_n$ *или*

b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(id,0)} \mathbb{Z}_2$ *или*

c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{(injective,0)} \mathbb{Z}_4$.

3) $G_\alpha = \mathbb{Z}_2$, $G_\beta = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ *или* D_2.

4) $G_\beta = \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{2n}$, D_n, *где* $(n > 2)$, A_4, A_5, S_4 *или* $\mathbb{Z}_2 \times A_4$ *и*

a) $G_\alpha = \{0\}$ *или*

b) $G_\alpha = \mathbb{Z}_2$ *с* $f_{\alpha,\beta}$, *являющимся нулевым отображением.*

Кроме того, некоторыми авторами активно задействовались машинные вычисления. Известно, что пионерская работа Маккьюна [56] ознаменовала начало эпохи автоматизации построения доказательств теорем, это начинание не обошло стороной и вопросы планарности графов алгебраических структур. Таким способом, например, Чедли недавно был получен следующий результат.

Теорема 2.3.5 ([14, Теорема 1.1]). *Пусть L – конечная n-элементная полурешётка. Тогда, если L имеет не менее чем $127 \cdot 2^{n-8}$ подполурешёток, то эта полурешётка планарна.*

2.4. О полугруппах с внешнепланарными графами Кэли

Выбор тематики данного подраздела обусловлен следующим наблюдением, анонсированным в [78]. В ряде работ исследовалось свойство планарности графов Кэли полугрупп [93]. Как оказалось, свойство планарности графа Кэли полугруппы не сохраняется при переходе к следующим теоретико-полугрупповым конструкциям: коммутативно-свободного произведения [71], ординальной суммы [70], прямого произведения [72] циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулем. В связи с этим возникает естественная задача характеризации полугрупп с планарными графами Кэли тех или иных классов $\mathcal{K}$ полугрупп, применение к которым наиболее используемых в теории полугрупп конструкций наследуют свойство планарности. В настоящем исследовании в качестве $\mathcal{K}$ был выбран класс нильпотентных полугрупп, а в качестве конструкции взято 0–прямое объединение. Напомним, что 0–прямым объединением дизъюнктного семейства полугрупп S_i $(i \in I)$ с нулем называется полугруппа S с нулем, определенная на объединении полугрупп S_i с последующим отождествлением нулей всех S_i и операцией умножения, совпадающей с исходными операциями на каждой полугруппе S_i, и $xy = 0$, если $x \in S_i$, $y \in S_j$ и $i \neq j$.

Ключевым результатом, мотивирующим к исследованию полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли, является

Теорема 2.4.1 ([78, Теорема]). *Свойство планарности графа Кэли полугруппы наследуется 0-прямым объединением нильпотентных полугрупп, если и только если основа графа Кэли каждой из объединяемых полугрупп в результате удаления нулевого элемента допускает такую плоскую укладку, что все её вершины принадлежат одной грани.*

Основной целью данного параграфа представляется обзор исследований полугрупп, допускающих внешнепланарных графов Кэли. На пути достижения указанной цели, будут приведены решения вопросов внешнепланарности графов Кэли для следующих классов:

1) конечные свободные коммутативные полугруппы;
2) конечные свободные коммутативные моноиды;
3) рассыпчатые полугруппы;
4) конечнопорожденные полугруппы с одним определяющим соотношением и с тождеством;
5) свободные частично коммутативные полугруппы и n-веерные полурешётки.

Особый интерес представляет вопрос:

6) о допустимости графов и взятых с некоторой ориентацией и пометкой ребер, в качестве графов Кэли полугрупп.

В данном параграфе описываются конечные свободные коммутативные полугруппы, а также конечные свободные коммутативные полугруппы с нулём, графы Кэли которых являются внешнепланарными.

Теорема 2.4.2 ([80, Теорема 2.1]). *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1) $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, *где r и m – любые натуральные числа;*

2) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$, *где для натуральных r, m, h, t выполняется одно из следующих условий:*

а) $h = 1$, $m \leq 2$, $t = 1$; *или* $r = 1$, $m = 1$, $t \leq 2$;

б) $r \leq 2$, $h \leq 2$, $m \leq 2$, $t \leq 2$ *при* $r + m \leq 3$, $h + t \leq 3$.

Перейдем к рассмотрению полугрупп с нулём.

Теорема 2.4.3 ([80, Теорема 2.2]). *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём 0 относительно множества свободных образующих внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1) $S = \langle a \mid a^r = 0 \rangle$, *где r – любое натуральное число;*

2) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^r = 0, b^h = 0 \rangle$, *где r, h – натуральные числа, причем $r \leq 2$, $h \leq 2$;*

3) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0 \rangle$, *где для натуральных r, m, h выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $h = 1$;

б) $r + m = 3$, $h = 2$;

в) $r + m = 2$, $h > 2$.

4) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^1 = 0 \rangle$.

Перечислим конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие внешнепланарные графы Кэли:

Теорема 2.4.4 ([80, Теорема 3.1]). *Граф Кэли свободного коммутативного моноида S с циклическими соотношениями внешнепланарен тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $S = \langle a \mid a^m = 1 \rangle$, *где m – любое натуральное число;*

2) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \rangle$, *либо полугруппа S имеет копредставление $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^m = 1, b^t = 1 \rangle$, где для натуральных r, m, t выполнено одно из следующих ограничений:*

а) $t = 1$; б) $m \leq 2$, $t = 2$;

3) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c = 1 \rangle$, *где r и m – натуральные числа, причем $m \leq 2$.*

Решена и задача описания рассыпчатых полугрупп, допускающих внешнепланарный граф Кэли. Любая рассыпчатая полугруппа является ординальной суммой сингулярных полугрупп [67, с. 50]. Напомним, что ординальной суммой попарно непересекающихся полугрупп S_e, где e пробегает цепь P, называется полугруппа $S = \bigcup_{e \in P} S_e$, в которой при $e < f$ для любых $a \in S_e$ и $b \in S_f$ действует правило умножения $ab = ba = a$. Полугруппа называется *сингулярной*, если она является полугруппой левых или правых нулей.

Теорема 2.4.5 ([80, Теорема 4.1]). *Пусть S - рассыпчатая полугруппа и $S = \bigcup_{e \in P} S_e$, соответствующая ординальная сумма сингулярных полугрупп. Тогда S допускает внешнепланарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:*

1) $|P| = 1$ *и* $|S| < 4$, *если* S *– полугруппа правых нулей;*

2) $|P| = 2$ *и выполнено одно из условий:*

а) *обе компоненты – полугруппы правых нулей и* $|S| < 4$;

б) *только одна из компонент* S_e *является полугруппой правых нулей, при этом* $\mid S_e \mid \ \leq 2$, *и другая компонента также содержит менее трех элементов;*

в) *обе компоненты – полугруппы левых нулей, и одна из них одноэлементная, либо каждая содержит не более двух элементов;*

3) $|P| = 3$ *и выполнено одно из условий:*

а) *все компоненты – полугруппы правых нулей и* $|S| < 4$;

б) *все компоненты являются полугруппами левых нулей и* $|S| < 5$;

Приведённое нами во введении определение графа Кэли задает ориентированный мультиграф с помеченными рёбрами. Но существует несколько небольших разновидностей, например, в некоторых контекстах, вместо правого умножения используется левое. Тем самым можно разделять правые и левые графы Кэли. Очевидно, что данные понятия совпадают для случая коммутативных полугрупп, в противном же случае их можно исследовать с точностью до антиизоморфизма, а принцип двойственности позволяет не воспроизводить соответствующие утверждения для одного из взаимно двойственных случаев. В связи с вышесказанным, оказалась верна теорема приведённая ниже.

Теорема 2.4.6 ([80, Теорема 5.1]). *Нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением и с тождеством, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она антиизоморфна одной из полугрупп:* $S_{2,k} = \langle a, b \mid ab = b^k \rangle$, *при* $k \leq 3$, $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba \rangle$ *или изоморфна полугруппе* $S_{2,1} = \langle a, b \mid ab = b \rangle$.

Напомним из [61, с. 1296] и [15, с. 460], что если дан обыкновенный граф Γ с множеством вершин $V\Gamma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то можно определить свободную частично коммутативную полугруппу, как полугруппу $S(\Gamma)$, заданную множеством $\{a_1, \ldots, a_n\}$ образующих элементов и множеством определяющих соотношений вида $a_i a_j = a_j a_i$ для тех и только тех a_i и a_j, которые соединены ребром в графе Γ.

В следующей теореме описывается влияние графа коммутативности множества образующих элементов частично коммутативной свободной полугруппы на внешнепланарность графа Кэли последней. Как оказалось, существенной является валентность вершин графа коммутативности, то есть не только число элементов множества образующих, но и количество коммутирующих пар влияет на внешнепланарность графа Кэли полугруппы.

Теорема 2.4.7 ([80, Теорема 6.1]). *Граф Кэли частично коммутативной свободной полугруппы* $S(\Gamma)$, *соответствующей графу коммутативности* Γ *множества образующих её элементов, внешнепланарен тогда и только тогда, когда степень любой вершины в графе* Γ *равна нулю, то есть полугруппа* $S(\Gamma)$ *некоммутативная.*

Перейдем теперь к n-веерным полурешёткам. Напомним, что полурешёткой называется коммутативная полугруппа идемпотентов [67, с. 31].

Будем называть *n-веерной* полурешётку S_k^n с нулем, для $1 \le n \le k$, заданную копредставлением

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \mid a_i^2 = a_i, a_i a_j = a_j a_i, a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} = 0 \rangle,$$

где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – пробегают все размещения без повторений из k элементов $1, 2, \ldots, k$ по n, а i, j принимают всевозможные значения от 1 до k. Следующая теорема выделяет в классе таких полугрупп все допускающие внешнепланарные графы Кэли полугруппы, на языке ограничений количества элементов фиксированной длины.

Теорема 2.4.8 ([80, Теорема 6.2])**.** *n-веерная полурешётка $S = S_k^n$ допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $n \le 2$.*

Для сравнения, приведем полученные в [76] аналогичные характеристические свойства свободных частично коммутативных полугрупп и n-веерных полурешёток с планарными графами Кэли. Приводим этот результат в разделе посвященном внешнепланарности отчасти выбиваясь из общей канвы повествования потому, что с одной стороны, он не относится ни к одной из выше выделенных категорий полугрупп с планарными графами Кэли, но с другой – не упомянуть его нельзя, результат интересен оригинальностью доказательства, там есть свежие идеи, связанные с появлением фрактальных графов.

Теорема 2.4.9 ([76, Теорема 1])**.** *Граф Кэли частично коммутативной свободной полугруппы $S(\Gamma)$, соответствующей графу коммутативности Γ множества образующих её элементов, планарен тогда и только тогда, когда степень любой вершины в графе Γ не превосходит единицы.*

Теорема 2.4.10 ([76, Теорема 2])**.** *n-веерная полурешётка $S = S_k^n$ допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $|S^{(2)}| \le 3$, где $S^{(2)}$ – множество всех ненулевых слов полугруппы S вида $a_i a_j$, $i \ne j$.*

При изучении вопросов планарности важную роль играют графы K_5 и $K_{3,3}$. Ранее [69] было доказано, что если $Cay(S, E)$ – граф Кэли конечной полугруппы S, то $Cay(S, E)$:

1) не изоморфен полному двудольному графу $K_{3,3}$ с любой ориентацией и раскраской (разметкой) ребер;

2) изоморфен полному графу K_5 с единственной ориентацией ребер тогда и только тогда, когда S имеет копредставление:
$S = \langle a, b \mid ab = ba, a = b^2 = a^3 b, a^2 = ab^2, b = a^3 = a^2 b^2 \rangle$.

Продолжая обзор исследований в данном направлении, заметим, что при изучении вопросов внешнепланарности, на основании критерия Чартрэнда–Харари, ключевая роль отводится графам K_4 и $K_{2,3}$. В теореме ниже показано, что не существует полугрупп, графы Кэли которых изоморфны полному графу K_4 или полному двудольному графу $K_{2,3}$ с некоторой ориентацией и раскраской ребер.

Теорема 2.4.11 ([80, Теорема 7.1])**.** *Если $Cay(S, E)$ – граф Кэли конечной полугруппы S, то $Cay(S, E)$:*

1) *не изоморфен полному графу K_4 с любой ориентацией и раскраской ребер;*

2) *не изоморфен полному двудольному графу $K_{2,3}$ с любой ориентацией и раскраской ребер.*

Таков список основных результатов, полученных в ходе исследования полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли.

2.5. О полугруппах с обобщенными внешнепланарными графами Кэли

Напомним, что *обобщенным внешнепланарным графом* называется планарный граф, который можно уложить на плоскости таким образом, что каждое ребро обладает хотя бы одной концевой вершиной на границе внешней грани. Необходимо отметить, что обобщенные внешнепланарные графы впервые ввел в рассмотрение Иржи Седлачек [66]. Данное понятие сыграло важную роль при изучении локальных свойств графов. Кроме того, Седлачек нашел характеризацию обобщенных внешнепланарных графов в терминах запрещенных подграфов.

Статья [50] открыла цикл работ, посвященных перечислению полугрупп, допускающих обобщенные внешнепланарные графы Кэли. Первым результатом статьи является теорема, содержащая характеристическое свойство конечных свободных коммутативных полугрупп, графы Кэли которых являются обобщенно внешнепланарными.

Теорема 2.5.1 ([50, Теорема 1]). *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих обобщенно внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1) $S = \langle a \mid a^{r+m} = a^r \rangle$, *где r и m – любые натуральные числа;*

2) $S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h \rangle$, *где для натуральных r, m, h, t выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) $h = 1,\ t = 1,\ m \le 2$; *или* $r = 1,\ m = 1,\ t \le 2$;

б) $((h \le 2,\ t = 2)$ *или* $(h \le 3,\ t = 1))$, *при* $r + m = 3$; *или*
$((r \le 2,\ m = 2)$ *или* $(r \le 3,\ m = 1))$, *при* $h + t = 3$;

3) $S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^2 = c \rangle$.

Заметим, что условие данной теоремы содержит все конечные свободные коммутативные полугруппы, допускающие внешнепланарные графы Кэли согласно теореме 2.1 из [80]. Более того, свободными коммутативными полугруппами, допускающими обобщенно внешнепланарные графы Кэли, но не допускающими внешнепланарные графы Кэли являются полугруппы, имеющие копредставления

$$S = \langle a,\ b \mid ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^{h+t} = b^h \rangle,$$

где $((h = 2,\ t = 2)$ или $(h = 3,\ t = 1))$, при $r + m = 3$; либо $((r = 2,\ m = 2)$ или $(r = 3,\ m = 1))$, при $h + t = 3$; или

$$S = \langle a,\ b,\ c \mid ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c^2 = c \rangle$$

и только они.

Далее, под циклической полугруппой с нулём понимается любой гомоморфный образ свободной однопорождённой полугруппы с нулём. Очевидно, что любая циклическая полугруппа с нулём изоморфна либо циклической нильполугруппе, либо получена из циклической полугруппы внешним присоединением нуля. Конечная полугруппа с нулём называется свободной коммутативной, если она является коммутативно-свободным произведением циклических полугрупп с нулём.

Следующая теорема содержит характеристическое свойство конечных свободных коммутативных полугрупп с нулём, графы Кэли которых являются обобщенно внешнепланарными.

Теорема 2.5.2 ([50, Теорема 2]). *Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём 0 относительно множества свободных образующих обобщенно внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:*

1) $S = \langle a \mid a^r = 0\rangle$, *где r – любое натуральное число;*

2) $S = \big\langle a, b \bigm| ab = ba,\ a^r = 0,\ b^h = 0\big\rangle$, *где r,h – натуральные числа, причем $r = 1$ или $h = 1$ или $r + h \le 5$;*

3) $S = \big\langle a,\ b \bigm| ab = ba,\ a^{r+m} = a^r,\ b^h = 0\big\rangle$, *где для натуральных r, m, h выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

а) *при $m = 1$ имеем $h = 1$; или $r = 1$; или $r + h \le 5$;*

б) *при $m = 2$ имеем $h = 1$; или $r + h \le 4$;*

в) *при $m = 3$ имеем $h = 1$;*

г) *при $m \ge 4$ имеем $r = 1$ и $h = 1$;*

4) $S = \big\langle a,\ b,\ c \bigm| ab = ba,\ ac = ca,\ bc = cb,\ a^2 = a,\ b^2 = b,\ c = 0\big\rangle$.

Ниже перечислены все конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли.

Теорема 2.5.3 ([51, Теорема 2]). *Граф Кэли конечного свободного коммутативного моноида S обобщенно внешнепланарен тогда и только тогда, когда S в классе всех коммутативных моноидов имеет копредставление одного из следующих видов:*

1) $S = \langle a \mid a^m = 1\rangle$, *где m - любое натуральное число;*

2) $S = \langle a, b \mid a^{r+m} = a^r,\ b^t = 1\rangle$, *либо* $S = \langle a, b \mid a^m = 1,\ b^t = 1\rangle$, *где для натуральных r, m, t выполнено одно из следующих ограничений:*

а) *$t = 1$;* б) *$m \le 2,\ t = 2$;*

3) $S = \big\langle a, b, c \bigm| a^{r+m} = a^r,\ b^2 = b,\ c = 1\big\rangle$, *где r и m – натуральные числа, причем $m \le 2$.*

В предыдущих параграфах приводились условия, при которых рассыпчатые полугруппы допускают планарные и, в частности, внешнепланарные графы Кэли. Следующая теорема характеризует рассыпчатые полугруппы, допускающие обобщенные внешнепланарные графы Кэли.

Теорема 2.5.4 ([52, Теорема 1]). *Пусть S – рассыпчатая полугруппа и $S = \bigcup_{e\in P} S_e$ соответствующая ординальная сумма сингулярных полугрупп. Тогда S допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) $|P| = 1$ *и (($|S| < 5$, если S – полугруппа правых нулей) или (S – полугруппа левых нулей));*

2) $|P| = 2$ *и выполнено одно из условий:*

а) *обе компоненты являются полугруппами правых нулей $|S| < 5$;*

б) *только одна из компонент S_e является полугруппой правых нулей и $|S_e| \le 3$, а другая компонента одноэлементная (при $|S_e| = 3$);*

в) *обе компоненты – полугруппы левых нулей и одна из них содержит менее трех элементов;*

3) $|P| = 3$ *и выполнено одно из условий:*

а) *все компоненты – полугруппы правых нулей и* $|S| < 5$*;*

б) *две из компонент содержат по одному элементу, а третья компонента – полугруппа левых нулей;*

в) *все компоненты являются полугруппами левых нулей и* $|S| \leq 5$*;*

4) $|P| = 4$ *и* $|S| = 4$.

2.6. **О гиперграфах полугрупп**

На пути исследования вопросов планарности графов Кэли полугрупп могут появляться комбинаторные проблемы, например, имеет место

Гипотеза 1 ([81, Гипотеза]). *Граф Кэли мультипликативной полугруппы кольца вычетов по модулю n, планарен тогда и только тогда, когда $n < 9$ или n - простое число.*

В то же время, подобные утверждения носят частный характер, поэтому удобнее распространить известное понятие графов Кэли до гиперграфов алгебр. В частности, всякой модели оказалось возможным сопоставить гиперграф, множеством вершин которого служит основное множество модели, а гиперрёбрами - элементы (кортежи) отношений модели [10].

Так как всякая n-местная алгебраическая операция представляется $(n + 1)$-местным отношением, то данное определение применимо и для алгебр [97], более того, установлен механизм структурного описания моделей теорий по семействам гиперграфов простых моделей произвольной малой теории [90]; поэтому, направление видится весьма перспективным. Кёнигово представление гиперграфов [98, с. 93] алгебр, при таком подходе, является двудольным графом, следовательно, более доступно для изучения свойств ацикличности и внешнепланарности. Особый же интерес вызывают гиперграфы полугрупп, обладающие ниже перечисленными свойствами 1°-3°, отражающими тесную их связь с графами Кэли. Необходимый минимум понятий теории гиперграфов можно почерпнуть из [98].

Дадим конструктивное определение гиперграфа полугруппы S, относительно множества образующих её элементов X: каждой полугруппе сопоставлен гиперграф $HCay(S, X)$, множеством вершин которого служит основное множество элементов полугруппы S, а гиперрёбрами – всевозможные тройки вида (a, x, b), где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$.

Некоторые свойства гиперграфа устанавливаются через одноименные свойства кёнигова представления. Напомним, что кёниговым представлением гиперграфа называется двудольный граф, отражающий отношение инцидентности элементов гиперграфа. Этот граф несет полную информацию о гиперграфе и однозначно его определяет. Поэтому вполне естественно называть гиперграф плоским или планарным, если его кёнигово представление является планарным графом.

Таким образом, *гиперграф $HCay(S, X)$ полугруппы S*, относительно множества образующих её элементов X, представляется кёниговым двудольным графом, у которого множество вершин одной из долей является основным множеством элементов s_i полугруппы S, а множество вершин другой доли исчерпывается всевозможными тройками $e_j = (a_j, x_j, b_j)$, где $a_j, b_j \in S$, $x_j \in X$ и $a_j x_j = b_j$; при этом, вершина s_i соединена дугой с вершиной $e_j = (a_j, x_j, b_j)$

тогда и только тогда, когда $s_i \in (a_j, x_j, b_j)$, то есть гипервершина s_i принадлежит гиперребру e_j в гиперграфе $HCay(S, X)$. Для удобства восприятия, дуга $(s_i;\ e_j)$ помечается порядковым номером компоненты s_i в упорядоченной тройке e_j. *Основой* данного ориентированного помеченного мультиграфа мы называем обыкновенный граф, полученный из данного графа удалением меток, петель и заменой всех дуг, соединяющих две вершины одним ребром, соединяющим эти вершины.

1°) Гиперграф моногенной полугруппы планарен.

2°) Существуют полугруппы, допускающие планарный граф Кэли, но не допускающие планарный гиперграф.

Примером может служить мультипликативная полугруппа кольца вычетов по модулю 8, порождаемая тремя элементами $Z_8 = \langle 2,\ 3,\ 5 \rangle$ и допускающая планарный граф Кэли, в то время как её гиперграф планарным не является, в силу теоремы о них.

3°) Если гиперграф полугруппы планарен, то её граф Кэли планарен.

В самом деле, каждому ребру графа Кэли соответствует подграф кёнигова представления гиперграфа. Следовательно, если в кёниговом представлении гиперграфа отсутствовал подграф, гомеоморфный K_5 или $K_{3,3}$, то он не обнаружится и в графе Кэли, то есть планарность наследуется.

Таким образом, полугруппы с планарными гиперграфами образуют класс более узкий, чем полугруппы, допускающие планарные графы Кэли. Более того, имеет место следующая

Теорема 2.6.1 ([81, Теорема]). *Гиперграф мультипликативной полугруппы Z_n кольца вычетов по модулю n планарен тогда и только тогда, когда $n = 1$ или $Z_n = \left\langle a,\ b \middle|\, a^l = 0,\ b^k = 1,\ ab = a \right\rangle$, $l,\ k \in N$.*

Заметим, что примером допускающей планарный гиперграф 2-порожденной мультипликативной полугруппы кольца вычетов по модулю n, порождающие элементы $\{a,\ b\}$ которой удовлетворяют равенству $ab = a$, служит $Z_4 = \langle 2,\ 3 \rangle$. Кроме того, условие теоремы выполнено когда n - простое число, так как $0\beta = 0$ и $Z_p = \langle 0,\ \beta \rangle$ для любого простого p, где β - первообразный корень сравнения $\beta^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Следствие 2 ([81, Следствие]). *Гиперграф мультипликативной полугруппы кольца вычетов по модулю n внешнепланарен тогда и только тогда, когда $n < 3$.*

2.7. О других полугруппах с планарными графами Кэли

В [83] изучаются свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы, допускающие планарные графы Кэли. Если дан обыкновенный граф Γ с множеством вершин $V\Gamma = \{a_1,\ \ldots,\ a_t\}$, то можно определить свободную частично коммутативную полугруппу как полугруппу $S(\Gamma)$, заданную множеством $\{a_1,\ \ldots,\ a_t\}$ образующих элементов и множеством определяющих соотношений вида $a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i$ для тех и только тех a_i и a_j, которые соединены ребром в графе Γ. Для любого натурального числа n факторполугруппу Риса

$S(\Gamma)/S^n$ назовем свободной частично коммутативной n–нильпотентной полугруппой, определяемой графом Γ порядка t; условимся обозначать эту полугруппу через $S_t^n(\Gamma)$. Как оказалось, справедлива следующая теорема, приближающая нас к исследованию вопросов планарности графов Кэли свободных полугрупп квазимногообразий.

Теорема 2.7.1 ([83, Теорема 1]). *Полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает планарный граф Кэли, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) Γ – *пустой граф;*

2) *связными компонентами графа Γ являются паросочетания или изолированные вершины, а $n \leq 5$;*

3) *связными компонентами графа Γ являются цепи или изолированные вершины, а $n \leq 4$;*

4) *связными компонентами графа Γ являются «деревья» из простых циклов (кактусы) или изолированные вершины, а $n \leq 3$;*

5) Γ – *любой граф, а $n \leq 2$, либо $n > 2$ и $t \leq 2$.*

Для полноты картины о разнообразии результатов в данной области и в качестве иллюстрации к вариациям на тему основного определения графа Кэли полугруппы, приведем следующую теорему.

Теорема 2.7.2 ([74, Теорема]). *Нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением и с тождеством, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она антиизоморфна одной из полугрупп: $S_1 = \langle a, b \mid ab = ba\rangle$, $S_{2,k} = \left\langle a, b \mid ab = b^k\right\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, $S_3 = \langle a, b \mid aba = ba\rangle$, $S_4 = \langle a, b \mid aba = b\rangle$, $S_5 = \left\langle a, b \mid a^2 = b^2\right\rangle$, $S_6 = \left\langle a, b \mid aba^2 = ba\right\rangle$; или изоморфна одной из полугрупп: S_1, $S_{2,1}$, S_4, S_5.*

Как было изложено выше, при исследовании вопроса планарности графов важную роль играют не планарные графы K_5 или $K_{3,3}$. С другой стороны, максимальными плоскими графами (графами, которые перестают быть плоскими при добавлении любого ребра) являются плоские триангуляции (графы, каждая грань которых – треугольник). Поэтому, при изучении конечных полугрупп со свойством планарности графов Кэли возникает задача перечисления всех полугрупп, графы Кэли которых являются вышеупомянутыми с некоторой ориентаций ребер.

В [69], в частности, решена задача о допустимости графов $K_{3,3}$, K_5 и плоских триангуляций в качестве графов Кэли конечных полугрупп.

Теорема 2.7.3 ([69, Теорема]). *Если $Cay(S, X)$ – граф Кэли конечной полугруппы S, то $Cay(S, X)$:*

1) *не изоморфен полному двудольному графу $K_{3,3}$ с любой ориентацией и пометкой ребер;*

2) *изоморфен плоской триангуляции с единственной ориентацией ребер тогда и только тогда, когда S имеет копредставление*

$$S = \left\langle a \mid a^4 = a\right\rangle;$$

3) *изоморфен полному графу K_5 с единственной ориентацией ребер тогда и только тогда, когда S имеет копредставление*

$$S = \left\langle a,\ b \mid ab = ba,\ a = b^2 = a^3 b,\ a^2 = ab^2,\ b = a^3 = a^2 b^2\right\rangle.$$

Заметим, что продолжая начатое в [69] исследование вопроса о допустимости некоторых графов в качестве графов Кэли полугрупп, в [75] было показано, что графом Кэли полугруппы S является плоская триангуляция, изоморфная графу октаэдра, с некоторой (не единственной) ориентацией и пометкой ребер, тогда и только тогда, когда полугруппа S является циклической полугруппой $S \cong \langle a \mid a^7 = a \rangle$, относительно множества образующих элементов $\{a,\ a^2\}$ или $\{a,\ a^4\}$, либо полугруппой $S \cong \langle a, b \mid a^4 = a,\ b^4 = b,\ a^2 = ba,\ b^2 = ab \rangle$.

Кроме того, полугруппа S, указанная в условии 3) этой теоремы, на самом деле является циклической группой порядка 5 (при выборе одного образующего она имеет копредставление $S = \langle a \mid a^6 = a \rangle$) и поэтому допускает планарный граф Кэли. Данное замечание иллюстрирует известный факт, что свойство планарности графа Кэли полугруппы существенно зависит от выбора множества образующих. В связи с этим естественно рассматривать графы относительно минимального по включению множества образующих.

Изучению свойства планарности графов Кэли в классе полугрупп, совпадающих с любым своим минимальным множеством образующих посвящена статья [70]. Нетрудно показать, что этот класс совпадает с классом всех рассыпчатых полугрупп, то есть таких полугрупп S, в которых для любых элементов a, b из S выполняется $ab = a$ или $ab = b$. Известно, что любая рассыпчатая полугруппа является ординальной суммой сингулярных полугрупп [67, с. 50]. Напомним, что *ординальной суммой* попарно непересекающихся полугрупп S_e, где e пробегает цепь P, называется полугруппа $S = \bigcup_{e \in P} S_e$, в которой при $e < f$ для любых $a \in S_e$ и $b \in S_f$ действует правило умножения $a \cdot b = b \cdot a = a$. Полугруппа называется *сингулярной*, если она является полугруппой левых или правых нулей.

Соответствующим результатом из данной серии является

Теорема 2.7.4 ([70, Теорема 1]). *Пусть S – рассыпчатая полугруппа и $S = \bigcup_{e \in P} S_e$ – соответствующая ординальная сумма сингулярных полугрупп. Тогда S допускает планарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:*

1) $|P| = 1$ *и* $|S| < 5$, *если S – полугруппа правых нулей;*

2) $|P| = 2$ *и выполнено одно из условий:*

а) *обе компоненты – полугруппы правых нулей и* $|S| < 5$*;*

б) *только одна из компонент S_e является полугруппой правых нулей и $|S_e| \leq 3$, а другая компонента содержит менее трех элементов (при $|S_e| = 3$);*

в) *обе компоненты – полугруппы левых нулей, и одна из них содержит менее трех элементов;*

3) $|P| = 3$ *и выполнено одно из условий:*

а) *все компоненты – полугруппы правых нулей и* $|S| < 5$*;*

б) *две из компонент содержат по одному элементу, а третья компонента – полугруппа левых нулей;*

в) *все компоненты являются полугруппами левых нулей и $|S| \leq 5$ или $|S_e| = 2$ для любого $e \in P$;*

4) $|P| = 4$ *и* $|S| \leq 5$.

Прежде чем привести заключительный результат данной серии, напомним, что *прямоугольной полугруппой* называется полугруппа, изоморфная прямому произведению $L \times R$, где L – левосингулярная полугруппа, а R – правосингулярная полугруппа.

Теорема 2.7.5 ([75, Теорема]). *Пусть S – ординальная сумма прямоугольных полугрупп. Тогда S допускает планарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:*

1) $|P| = 1$ *и* $S = (L_i \times R_j)$,*где* $1 \leq j < 5$, $i \geq 1$;

2) $|P| = 2$ *и выполнено хотя бы одно из условий:*

а) *одна из компонент –* R_1, *а другая –* $(L_i \times R_j)$, *где* $1 \leq j \leq 3$, $i \geq 1$;

б) *одна из компонент –* R_2, *а другая –* $(L_i \times R_j)$, *где* $1 \leq j \leq 2$, $i \geq 1$; *причем, если* R_2 *– большая, то возможно* $j = 3$, $i \geq 2$;

в) *одна из компонент –* L_2, *либо* $(L_2 \times R_2)$ *является меньшей, а другая –* $(L_i \times R_j)$, *где* $1 \leq j \leq 2$, $i \geq 1$, *либо* $j = 3$, $i = 1$; *причем, если* L_2 *– большая, то возможно* $j = 3$, $i \geq 2$;

г) *меньшая из компонент является произведением –* $(L_i \times R_j)$, *где* $1 \leq j \leq 4$, $i \geq 2$, *большая –* R_1, R_2 *либо* L_2;

3) $|P| = 3$ *и выполнено хотя бы одно из условий:*

а) *две из компонент одноэлементные, а третья –* $(L_i \times R_j)$, *где* $1 \leq j \leq 4$, $i \geq 2$, *для меньшей компоненты;* $1 \leq j \leq 3$, $i \geq 2$, *для средней;* $1 \leq j \leq 2$, $i \geq 1$, *для большей;*

б) *компонентами ординальной суммы одновременно являются* R_1, R_2 *(либо* L_2*) и* L_2; *причем, вместо* L_2 *меньшей или средней компонентой возможна* $(L_2 \times R_2)$;

в) *все компоненты –* L_2, *либо меньшая из них –* $(L_2 \times R_2)$;

4) $|P| = 4$ *и выполнено хотя бы одно из условий:*

а) *все компоненты – полугруппы левых нулей и* $|S| \leq 5$;

б) *три из компонент одноэлементные, а* $(L_2 \times R_2)$ *– не наибольшая.*

3. О спектрах рангов планарности многообразий полугрупп

Результаты этого раздела принадлежат исключительно автору.

За время всестороннего исследования понятия ранга планарности многообразия полугрупп было сделано много новых открытий, среди которых можно выделить следующие теориообразующие:

1) Описаны ранги планарности многообразий коммутативных моноидов и приведена классификация многообразий коммутативных моноидов по рангам планарности [82].

2) Найдены все планарные многообразия полугрупп и при этом, в частности, вычислены ранги планарности многообразий из решётки, порожденной негрупповыми атомами [85].

3) Описаны ранги планарности коммутативных полугрупп и вычислены ранги планарности некоторых серий многообразий коммутативных полугрупп [84, 86].

4) Найдены ранги планарности многообразия всех полугрупп идемпотентов и многообразий полугрупп, заданных перестановочным тождеством [87].

5) В классе многообразий нильполугрупп указана континуальная серия многообразий бесконечного ранга планарности и континуальная серия многообразий конечного ранга планарности [88].

6) Описаны ранги планарности многообразий полугрупп [89].

Определенный интерес представляет также вопрос о том, какие наборы значений составленные из натуральных чисел и символа ∞ могут быть наборами значений рангов планарности нетривиальных подмногообразий $\boldsymbol{X}$ произвольного многообразия $\boldsymbol{V}$ полугрупп. Л.М. Мартынов предложил называть этот вопрос «Проблема спектров рангов планарности многообразий полугрупп».

Например, в силу теоремы 3.2.6, спектр рангов планарности многообразия всех полугрупп является полным. Последнее открывает обширные горизонты для дальнейших исследований.

3.1. **Ранги планарности многообразий моноидов и абелевых полугрупп**

При доказательстве результатов данного подраздела использовались методы структурной теории полугрупп, теории многообразий и теории графов.

В частности, широко используется критерий Понтрягина-Куратовского. Первый эффективный алгоритм (линейной временной сложности) для проверки графа на планарность принадлежит Хопкрофту и Тарьяну [26], и как рисовать планарные графы за линейное время известно давно [13].

Нами же был первым получен результат касающийся моноидов.

Формулировке соответствующего результата предпошлем некоторые обозначения из [82]:

$\mathbf{M}$ – многообразие всех коммутативных моноидов;

$\mathbf{A}_m = \mathrm{var}\{x^m \approx 1\}$ – многообразие всех абелевых групп экспоненты m, являющееся подмногообразием многообразия $\mathbf{M}$;

$\mathbf{S}^1_{i,m} = \mathrm{var}\{x^{i+m} \approx x^i\}$ – многообразие коммутативных моноидов типа (i, m), являющееся подмногообразием многообразия $\mathbf{M}$.

Используя развитый в [71] инструментарий, в [82] доказана следующая

Теорема 3.1.1 ([82, Теорема]). *Пусть $\boldsymbol{V}$ – нетривиальное многообразие коммутативных моноидов, $r_\pi(\boldsymbol{V})$ – его ранг планарности. Тогда $r_\pi(\boldsymbol{V}) \leq 3$. Более того:*

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}_m$ *или* $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S}^1_{i,m}$, *где* $m > 2$, $i \geq 1$, $n > 2$*;*

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}$, *или* $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S}^1_{i_1,1}$, *или* $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S}^1_{i_2,2}$, *где* $i_1 \geq 2$, $i_2 \geq 1$*;*

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}_2$ *или* $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{S}^1_{1,1}$.

Таким образом, из теоремы 3.1.1 вытекает, что $Spec_{r\pi}(\mathbf{M}) = \{0, 1, 2, 3\}$. Эта теорема не только решает проблему рангов планарности для многообразий коммутативных моноидов [25], но и приводит классификацию многообразий коммутативных моноидов по рангам планарности.

Следующая теорема посвящена указанию рангов планарности некоторых многообразий коммутативных полугрупп. Для формулировки результата приведем следующие обозначения:

$\mathbf{C} = \mathrm{var}\{xy \approx yx\}$ – многообразие всех коммутативных полугрупп;

$\mathbf{A}_n = \mathrm{var}\{x^n y \approx y, xy \approx yx\}$ – многообразие всех абелевых групп экспоненты $n > 1$;

$\mathbf{CB}_{r,m} = \mathrm{var}\{x^{r+m} \approx x^r, xy \approx yx\}$ – многообразие всех коммутативных полугрупп бернсайдовского типа, где $r > 0$, $m > 0$;

$\mathbf{CN}_s = \mathrm{var}\{x_1x_2 \ldots x_s y \approx x_1x_2 \ldots x_s, xy \approx yx\}$ – многообразие коммутативных нильпотентных полугруппы ступени $s > 1$;

$\mathbf{CNil}_r = \mathrm{var}\{x^r y \approx x^r, xy \approx yx\}$ – многообразие всех коммутативных нильполугрупп индекса $r > 1$.

Справедлива доказанная в [84, 86]

Теорема 3.1.2 ([84, 86, Теорема 1])**.** *Нетривиальное многообразие коммутативных полугрупп либо имеет бесконечный ранг планарности и при этом совпадает с многообразием полугрупп с нулевым умножением, либо имеет ранг планарности 1, 2 или 3.*

1) $r_\pi(\boldsymbol{C}) = 2$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{A}_2) = 3$ *и* $r_\pi(\boldsymbol{A}_n) = 1$ *при* $n > 2$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{CB}_{1,1}) = 3$, $r_\pi(\boldsymbol{CB}_{r,m}) = 1$ *при* $r > 0$, $m > 2$, *и* $r_\pi(\boldsymbol{CB}_{r,m}) = \infty$ *в остальных случаях;*

4) $r_\pi(\boldsymbol{CN}_2) = \infty$, $r_\pi(\boldsymbol{CN}_3) = 3$, $r_\pi(\boldsymbol{CN}_s) = 2$ *при* $s > 3$;

5) $r_\pi(\boldsymbol{CNil}_r) = 2$ *при любом* $r > 1$.

Дабы разнообразить изложение, приведем несколько конфигураций, возникающих в процессе доказательства теоремы 3.1.2. Условимся обозначать свободную n-порожденную полугруппу многообразия $\boldsymbol{V}$ над n-элементным множеством образующих $X \subseteq \{x, y, z, t, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, являющимся подмножеством бесконечного счётного алфавита, как $F_{\boldsymbol{V}}\langle X\rangle$. Граф Кэли свободной полугруппы многообразия $\mathrm{var}\big\{xy \approx yx, x^{1+m} \approx x^1\big\}$ с тремя образующими содержит изображённый на рис. 1 подграф, основа которого гомеоморфна графу $K_{3,3}$. Следовательно, этот граф не является планарным, а ранг планарности такого многообразия не превышает 2 и тем более 3.

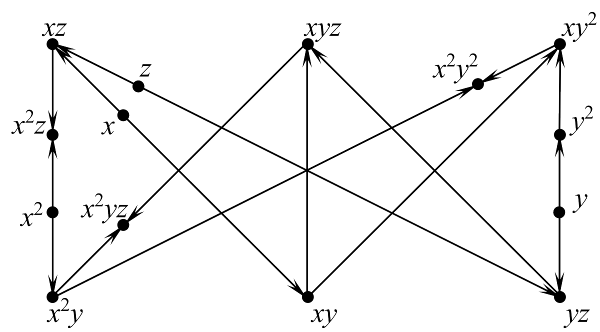

Рис. 1. Подграф графа Кэли свободной 3-порожденной полугруппы $F_{\boldsymbol{V}}\langle\{x, y, z\}\rangle$ коммутативного многообразия $\boldsymbol{V} = \mathrm{var}\big\{xy \approx yx, x^{1+m} \approx x^1\big\}$ при $m > 1$

Выполнение хотя бы одного из следующих соотношений: $x^2z = z$, $x^2y = y$, $x = xy^2$, приводит к тому, что выполнено тождество $x^2y = y$, из которого следует $x^2z = z$, что приводит к $x^2 = xxy^2 = x^2yy = y^2$ — многообразию полугрупп, задаваемых системой тождеств $\mathrm{var}\{xy \approx yx, x^{1+m} \approx x, x^2 \approx y^2\}$, ранг планарности которого ограничен 3, согласно рис. 2, на котором изображен подграф, основа которого гомеоморфна графу K_5.

При доказательстве теоремы 3.1.2 существенным образом использовались результаты из [82].

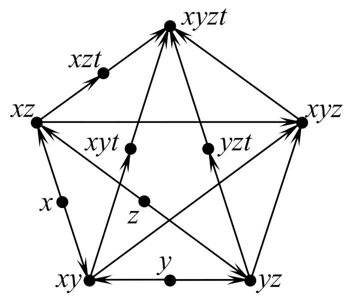

Рис. 2. Подграф графа Кэли свободной 4-порожденной полугруппы $F_{\boldsymbol{V}}\langle\{x,y,z,t\}\rangle$ коммутативного многообразия $\boldsymbol{V} = \mathrm{var}\{xy \approx yx, x^{1+m} \approx x^1\}$ при $m \geq 1$

Следующая теорема из [87] посвящена нахождению рангов планарности многообразий полугрупп идемпотентов, нильполугрупп и полугрупп с перестановочным тождеством.

Теорема 3.1.3 ([87, Теорема]). *Ранг планарности многообразия всех полугрупп идемпотентов равен 3; ранг планарности многообразия нильполугрупп заданного тождеством $w \approx 0$, равен бесконечности; ранг планарности любого перестановочного многообразия полугрупп равен 1 или 2.*

Позже был получен более общий результат о нильмногообразиях, приведем его в следующем подразделе.

В случае же многообразий всех нильпотентных полугрупп $\mathbf{N}_l$ данной ступени нильпотентности l легко видеть, что $Spec_{r\pi}(\mathbf{N}_2) = \{0, \infty\}$, так как многообразие $\mathbf{N}_2$ является планарным и является атомом решётки многообразий полугрупп (аналогично $Spec_{r\pi}(\mathbf{L}_0) = \{0, \infty\}$, $Spec_{r\pi}(\mathbf{R}_0) = \{0, 4\}$, $Spec_{r\pi}(\mathbf{A}_2) = \{0, 3\}$, $Spec_{r\pi}(\mathbf{A}_{p>2}) = \{0, 1\}$).

Кроме того, $Spec_{r\pi}(\mathbf{N}_3) = \{0, 3, \infty\}$, так как не 0-приведённые подмногообразия многообразия $\mathbf{N}_3$ исчерпываются многообразиями: $\mathbf{CN}_3 = \mathrm{var}\{xyz \approx 0; xy \approx yx\}$ всех коммутативных нильпотентных полугрупп ступени 3, для которого ранг планарности $r_\pi(\mathbf{CN}_3) = 3$, и многообразием $\mathrm{var}\{xyz \approx 0; x^2 \approx 0; xy \approx yx\}$, ранг планарности которого так же равен 3; а каждое из оставшихся 0-приведённых подмногообразий многообразия $\mathbf{N}_3$ имеет бесконечный ранг планарности.

Напомним, что разнообразие ситуации с рангами демонстрирует упомянутая нами теорема 3.1.2 о том, что ранги планарности нетривиального многообразия коммутативных полугрупп могут быть 1, 2, 3, либо ∞; другими словами, $Spec_{r\pi}(\mathbf{C}) = \{0, 1, 2, 3, \infty\}$.

3.2. **О рангах планарности нильмногообразий**

В следующем утверждении из [88] была приведена бесконечная серия многообразий нильполугрупп бесконечного ранга планарности и бесконечная серия многообразий нильполугрупп конечного ранга планарности.

Теорема 3.2.1 ([88, Теорема]). *Ранг планарности 0-приведённого многообразия нильполугрупп бесконечен. Кроме того, если система тождеств, определяющая многообразие нильполугрупп, среди тождеств не эквивалентных системе 0-приведённых тождеств имеет только одно минимальной длины вида $u_1xu_2yu_3 \approx v_1yv_2xv_3$, где слова u_i, v_j – не обязательно различные, допустимо пустые для некоторых многообразий, а u_1v_1 не содержит символы x и y, то ранг планарности такого многообразия конечен.*

Доказательство теоремы 3.2.1 опирается на следующие утверждения:

Лемма 3.2 ([88, Лемма 1]). *Фактор-полугруппа Риса свободной полугруппы по любому идеалу допускает планарный граф Кэли.*

Следствие 3 ([88, Следствие 1]). *Ранг планарности любого 0-приведенного многообразия равен бесконечности.*

Как отмечалось ранее, множество 0-приведённых многообразий имеет мощность континуума, поэтому справедливо

Следствие 4 ([88, Следствие 2]). *Множество полугрупповых многообразий бесконечного ранга планарности имеет континуальную мощность.*

Кроме того, из теоремы 3.2.1 вытекает и обслуживаемое одной конфигурацией следующее следствие.

Следствие 5 ([88, Следствие 3]). *Множество полугрупповых нильмногообразий конечного ранга планарности имеет континуальную мощность.*

Заметим, что бесконечного ранга есть и не 0-приведённые многообразия нильполугрупп, например такое, как $r_\pi(\mathrm{var}\{xyy \approx xyx, x^m \approx 0\}) = \infty$, где $m > 2$. Однако до настоящего времени не было известно ни одного многообразия полугрупп с конечным рангом планарности более чем 4. Тем неожиданнее оказалась справедливость опубликованного в [89] результата автора, из которого вытекает существование полугрупповых многообразий любого наперёд заданного конечного ранга планарности, что вместе с предыдущими результатами автора решает упомянутую проблему Л.М. Мартынова описания рангов планарности многообразия полугрупп:

Теорема 3.2.6 ([89, Теорема]). *Ранг планарности любого многообразия полугрупп либо бесконечен, либо может быть любым натуральным числом.*

Из теоремы 3.2.6 в частности вытекает, что спектр рангов планарности многообразий всех полугрупп является полным, то есть $Spec_{r\pi}(\mathbf{S}) = \mathbb{N}^\infty$, где $\mathbf{S}$ это многообразие всех полугрупп.

Многообразие всех нильполугрупп данного конечного ниль-индекса k с одним перестановочным тождеством длины n, переставляющим элементы в позициях i, j, обозначим через $\mathbf{Nil}_k\mathbf{P}_n^{(i;j)}$. Тогда из того, что при доказательстве предыдущей теоремы 3.2.1 обнаруживаются конфигурации, содержащие вхождения элементов в степени не выше 4, вытекает

Следствие 7 ([89, Следствие 1]). *При $k > 4$ существуют подмногообразия многообразия всех нильполугрупп $\boldsymbol{Nil}_k$ ранга планарности 1 и 2, примеры которых доставляют многообразия $\boldsymbol{Nil}_k\boldsymbol{P}_3^{(1;2)}$ и $\boldsymbol{Nil}_k\boldsymbol{P}_3^{(2;3)}$ с соответствующим перестановочным тождеством.*

В качестве комментария к теореме 3.2.6 напомним, что многообразия бесконечного ранга планарности присутствуют почти в каждой из упомянутых теорем 3.2.1 и 3.2.6. И конечные ранги планарности 1, 2, 3 многообразий полугрупп содержат предыдущие результаты автора. Решающее значение дают следующие многообразия полугрупп

$$\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(1;2)} = \mathrm{var}\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0, x_1x_2x_3x_4\dots x_n \approx x_2x_1x_3x_4\dots x_n\}$$

при каждом $n > 3$, имеющие ранг планарности $n-1$.

Плоская укладка основы графа Кэли свободной $(n-1)$-порожденной полугруппы этого многообразия получается следующим образом: отправной точкой берется лес, как для всякого 0-приведённого многообразия; в силу внешнепланарности леса можно добавить к нему изолированную вершину – 0 и все остальные вершины леса соединить ребром с 0 так, чтобы планарность сохранилась [80]. Теперь рассмотрим свободную n-порожденную полугруппу многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(1;2)}$. При достаточном количестве образующих начинает работать тождество вида $x_1x_2x_3x_4\dots x_n \approx x_2x_1x_3x_4\dots x_n$, которое в случае $(n-1)$-порожденной полугруппы вырождалось, поскольку в любой $(n-1)$-порожденной полугруппе многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(1;2)}$ любое слово длины n равно 0. В результате образуется достаточно склеек слов длины n в свободной n-порожденной полугруппе $F_n(\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(1;2)})$ многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(1;2)}$ при натуральном $n > 3$ приводящих к появлению в основе графа Кэли этой полугруппы относительно множества образующих $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ подграфа гомеоморфного полному двудольному графу $K_{3,3}$.

Непосредственно из доказательства последней теоремы 3.2.6 вытекает

Следствие 8 ([89, Следствие 2]). *Натуральные числа $n \geq 3$ и ∞ могут быть рангами планарности подмногообразий многообразия $\boldsymbol{Nil}_k = \mathrm{var}\{x^k \approx 0\}$ всех нильполугрупп данного конечного ниль-индекса k, при любом $k \geq 2$.*

Ввиду следствия 8 из нашей теоремы 3.2.6 и того факта, что примеры обеспечивающие ранги планарности 1 и 2 описаны в следствии 7 из теоремы 3.1.3, спектр рангов планарности многообразий всех нильполугрупп $\mathbf{Nil}_k$ данного конечного ниль-индекса $k > 4$ будет полным, то есть $Spec_{r\pi}(\mathbf{Nil}_k) = \mathbb{N}^\infty$.

Отметим, что многообразия $\mathbf{Nil}_2\mathbf{P}_n^{(1;2)}$ при $n > 3$ не единственны в своём роде. Примеры иных серий полугрупповых многообразий конечного наперёд заданного ранга планарности получаются по аналогии добавлением к тождествам $x^2 \approx 0$, $xyx \approx 0$ других перестановочных тождеств фиксированного порядка $n > 3$ и их наборов. А именно, справедливо

Предложение 3.9 ([89, Предложение]). *Для любого натурального числа $n > 3$ справедливы следующие утверждения:*

1) *ранг планарности многообразия $\boldsymbol{Nil}_2\boldsymbol{P}_n^{(n-1;n)}$ полугрупп, заданного системой тождеств*

$$\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0, x_1\dots x_{n-2}x_{n-1}x_n \approx x_1\dots x_{n-2}x_nx_{n-1}\}$$

равен n;

2) *ранг планарности многообразия $\boldsymbol{Nil}_2\boldsymbol{P}_n^{(i;j)}$ полугрупп, заданного системой тождеств*

$$\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0,$$
$$x_1\dots x_{i-1}x_ix_{i+1}\dots x_{j-1}x_j\dots x_n \approx x_1\dots x_{i-1}x_jx_{i+1}\dots x_{j-1}x_i\dots x_n\}$$

при $i+1 \neq n$*, равен* $n-1$*;*

3) *ранг планарности многообразия* $\boldsymbol{Nil_2 P}_n^{(i;j)}$ *полугрупп, заданного системой тождеств*

$$\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0,$$
$$x_1 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_{j-1} x_j \dots x_n \approx x_1 \dots x_{i-1} x_j x_{i+1} \dots x_{j-1} x_i \dots x_n\}$$

при $j \neq n$*, равен* $n-1$*;*

4) *ранг планарности многообразия* $\boldsymbol{Nil_2 P}_n^{S_{n-1}}$ *полугрупп, заданного системой тождеств*

$$\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \approx x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(n-1)} x_n \mid \pi \in S_{n-1}\},$$

где S_{n-1} *– симметрическая группа подстановок на* $(n-1)$*-элементном множестве, равен* $n-1$*;*

5) *ранг планарности многообразия* $\boldsymbol{Nil_2 P}_n^{S_n}$ *полугрупп, заданного системой тождеств*

$$\{x^2 \approx 0, xyx \approx 0, x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n \approx x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \dots x_{\pi(n-1)} x_{\pi(n)} \mid \pi \in S_n\},$$

где S_n *– симметрическая группа подстановок на* n*-элементном множестве, равен* $n-1$*.*

В связи с результатами данного предложения еще более актуальной становится проблема классификации многообразий полугрупп по рангам планарности, в частности, задача описания многообразий полугрупп бесконечного ранга планарности.

3.3. О рангах планарности других многообразий полугрупп

Позднее всех стали известны планарные многообразия полугрупп [85].

Теорема 3.3.1 ([85, Теорема 1]). *Нетривиальные планарные многообразия полугрупп исчерпываются:*

- *многообразием полугрупп левых нулей* $\boldsymbol{L}_0 = \mathrm{var}\{xy \approx x\}$*;*
- *многообразием полугрупп с нулевым умножением* $\boldsymbol{N}_2 = \mathrm{var}\{xy \approx zt\}$*;*
- *и их покрывающим многообразием* $\boldsymbol{L}_0 \vee \boldsymbol{N}_2 = \mathrm{var}\{xy \approx xz\}$*.*

Как следствие из данной теоремы легко вытекает перечисление всех планарных многообразий коммутативных полугрупп.

Следствие 2 ([84, Теорема 1]). *Единственным нетривиальным планарным многообразием коммутативных полугрупп является многообразие полугрупп с нулевым умножением.*

При доказательстве теоремы 3.3.1 мы нашли многообразия полугрупп бесконечного ранга планарности и ранга 2, 3, 4 (приведены в статье [85] на примере известной решётки из [19], порожденной негрупповыми атомами). И в завершение, как было анонсировано во введении, приведем новый результат, полученный в процессе написания обзора.

Теорема 3.3.3. $Spec_{r\pi}(\mathrm{var}\{x^2 = x\}) = \{0, 2, 3, 4, \infty\}$.

Не смотря на столь краткую формулировку, нижеприведённое доказательство теоремы 3.3.3 показательно тем, что опирается на обширные результаты прежних исследований и в процессе поиска этого доказательства были существенно задействованы машинные вычисления, согласно описанной в [3] общей методологии.

Доказательство. В [22] приведено такое множество $\mathcal{G}$, которое содержит все тождества многообразий связок с точностью до эквивалентности, при этом каждое тождество из $\mathcal{G}$ неприводимо (то есть любое тождество из $\mathcal{G}$ не эквивалентно некоторому тождеству от меньшего числа переменных), и каждое многообразие связок задается системой тождеств, образованной тождеством $x^2 = x$ и одним из тождеств множества $\mathcal{G}$. Данное множество $\mathcal{G} = \cup_{i=1}^4(\mathscr{a}_i \cup \overline{\mathscr{a}_i} \cup \mathscr{b}_i \cup \overline{\mathscr{b}_i}) \cup \mathscr{c} \cup \mathscr{d}$ является дизъюнктным объединением нижеперечисленных подмножеств, состоящих из тождеств, в словах которых d это переменная, отличная от переменных a, x, y, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$:
$\mathscr{a}_1 = \{R_n = Q_n \mid n = 3, 5, ...\}$, $\mathscr{a}_2 = \{R_n = S_n \mid n = 3, 5, ...\}$,
$\mathscr{a}_3 = \{R_n = Q_n \mid n = 4, 6, ...\}$, $\mathscr{a}_4 = \{R_n = S_n \mid n = 4, 6, ...\}$,
$\mathscr{b}_1 = \{R_n d x_n R_{n-1} = Q_n d x_n S_{n-1} \mid n = 5, 7, ...\}$,
$\mathscr{b}_2 = \{R_n d\overline{R_n} = S_n d\overline{Q_n} \mid n = 3, 5, ...\}$,
$\mathscr{b}_3 = \{\overline{R_n} d x_n \overline{R_{n-1}} = \overline{Q_n} d x_n \overline{S_{n-1}} \mid n = 4, 6, ...\}$,
$\mathscr{b}_4 = \{\overline{R_n} d R_n = \overline{S_n} d Q_n \mid n = 4, 6, ...\}$,
$\mathscr{c} = \{A d\overline{A} = B d\overline{B} \mid A = B \in \mathscr{a}_1 \cup \mathscr{a}_2 \cup \overline{\mathscr{a}_3} \cup \overline{\mathscr{a}_4}\} \cup$
$\cup\{R_3 d R_2 = Q_3 d S_2, \overline{R_2} d\overline{R_3} = \overline{S_2} d\overline{Q_3}\}$,
$\mathscr{d} = \{x = y, ax = a, xa = a, axya = ayxa, R_2 = Q_2, \overline{R_2} = \overline{Q_2}, ax = axa,$
$axya = axaya, xa = axa, a = a, R_2 = S_2, \overline{R_2} = \overline{S_2}, xy = yx, a = axa\}$,
где

$$R_n = \begin{cases} x_3x_2x_1 & \text{при } n = 2 \\ x_1x_2x_3 & \text{при } n = 3 \\ R_{n-1}x_n & \text{при } n = 4, 6, ... \\ x_nR_{n-1} & \text{при } n = 5, 7, ... \end{cases}; \quad Q_n = \begin{cases} x_2x_3x_1 & \text{при } n = 2 \\ x_1x_2x_3x_1x_3 & \text{при } n = 3 \\ Q_{n-1}x_nR_n & \text{при } n = 4, 6, ... \\ R_nx_nQ_{n-1} & \text{при } n = 5, 7, ... \end{cases};$$

$$S_n = \begin{cases} x_3x_1x_2x_1 & \text{при } n = 2 \\ x_1x_2x_3x_1x_3x_2x_3 & \text{при } n = 3 \\ S_{n-1}x_nR_n & \text{при } n = 4, 6, ... \\ R_nx_nS_{n-1} & \text{при } n = 5, 7, ... \end{cases};$$

а слово $\bar{A}$ обозначает зеркальное отражение (то есть результат записи букв исходного слова, записанного слева направо, в обратной последовательности – справа налево) из слова $A \in \{R_n, Q_n, S_n \mid n = 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}$, полагая, что для каждого множества тождеств $\mathscr{f} \in \cup_{i=1}^4\{\mathscr{a}_i, \mathscr{b}_i\}$ однозначно определено соответствующее множество зеркальных тождеств $\overline{\mathscr{f}} = \{\overline{P} = \overline{Q} \mid P = Q \in \mathscr{f}\}$.

Таким образом, многообразия связок формируют решётку счётного порядка. Для полноты картины приведем её на рис. 3, следуя обозначениям из [22], с указанием рангов планарности соответствующих многообразий. Ранги планарности восьми многообразий нижних этажей данной решётки и самого верхнего вычислены в [85] и [87] соответственно. Ранги планарности этих многообразий принимают все возможные значения из множества значений $\{0, 3, 4, \infty\}$. Кроме того, не трудно убедиться в том, что в классе многообразий связок $r_\pi(\mathrm{var}\{xa \approx axa\}) = r_\pi(\mathrm{var}\{R_2 \approx S_2\}) = r_\pi(\mathrm{var}\{\overline{R_3} \approx \overline{Q_3}\}) = 2$, $r_\pi(\mathrm{var}\{axya \approx axaya\}) = r_\pi(\mathrm{var}\{R_3 \approx S_3\}) = r_\pi(\mathrm{var}\{\overline{R_3} \approx \overline{S_3}\}) = 3$, $r_\pi(\mathrm{var}\{\overline{R_2} \approx \overline{S_2}\}) = r_\pi(\mathrm{var}\{R_3 \approx Q_3\}) = 4$, а $r_\pi(\mathrm{var}\{ax \approx axa\}) = \infty$ (так как основа графа Кэли свободной полугруппы данного многообразия относительно любого числа образующих является лесом). Следовательно, каждое из значений рангов планарности во множестве $\{0, 2, 3, 4, \infty\}$ достижимо.

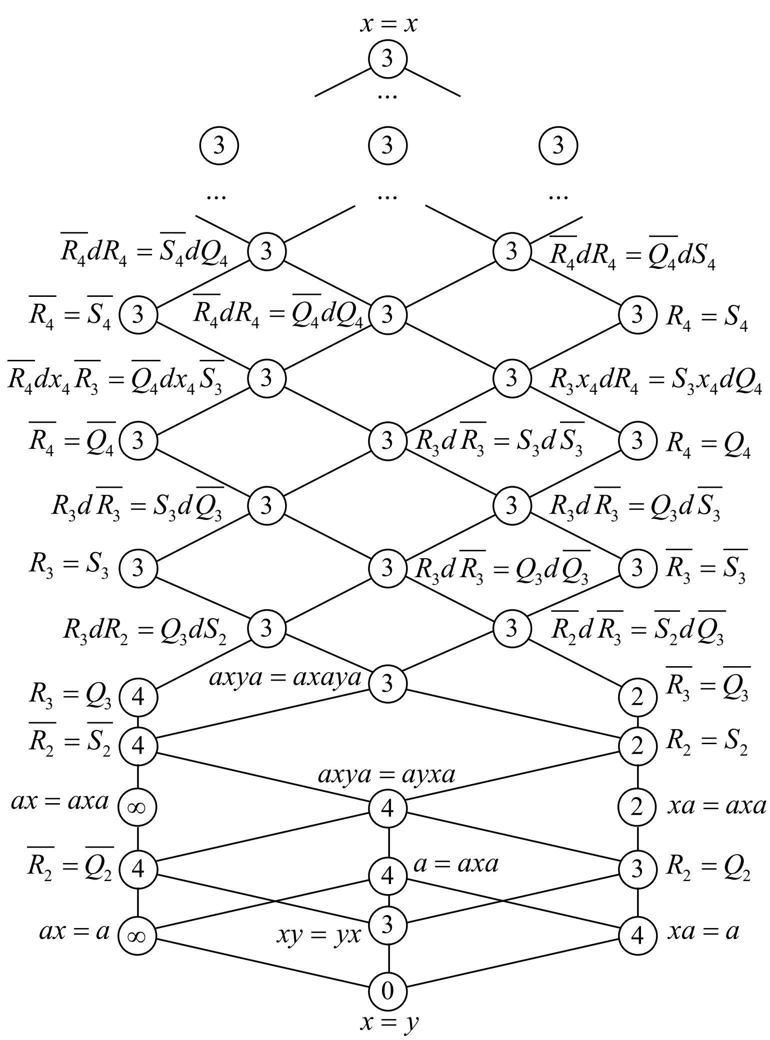

Рис. 3. Бесконечная счётная решётка всех многообразий связок с указанием в кружочках значений их рангов планарности, нижние 8 из которых и 1 верхнее были вычислены ранее в [85] и в [87] соответственно

Заметим, что длина отождествляемых слов в свободной полугруппе вышеуказанных многообразий не превосходит восьми. Остается показать, что ранги планарности оставшихся из ранее не исследованных на предмет значения рангов планарности многообразий связок (длина отождествляемых слов в свободной полугруппе которых более восьми) принимают значения из множества $\{2, 3, 4, \infty\}$, а именно, равны 3. В самом деле, плоская укладка графа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы каждого из этих многообразий совпадает с приведённой в [87] плоской укладкой графа Кэли 3-порожденной свободной полугруппы многообразия $\mathrm{var}\{a \approx a\}$ в классе многообразий связок, поскольку каждый из 159 элементов этой полугруппы является словом имеющим длину не превышающую восьми.

При выборе 4 и большего числа образующих свободная полугруппа каждого из анализируемых многообразий не допускает плоской укладки по теореме Понтрягина–Куратовского, так как в основе её графа Кэли содержится подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$, содержащий в одной из долей вершины $xyzuxyz$, $xyzuy$, $xyzuzy$, а в другой доле вершины $xyzu$, $xyzuyu$, $xyzuyz$, соединенные следующими непересекающимися маршрутами: $xyzuxyz$–$xyzu$, $xyzuxyz$–$xyzuxy$–$xyzuxyux$–$xyzuyuxz$–$xyzuyux$–$xyzuyu$, $xyzuxyz$–$xyzuxyzx$–$xyzuyzxu$–$xyzuyzx$–$xyzuyz$, $xyzuy$–$xyzu$, $xyzuy$–$xyzuyu$, $xyzuy$–$xyzuyz$, $xyzuzy$–$xyzuz$–$xyzu$, $xyzuzy$–$xyzuyuz$–$xyzuyu$, $xyzuzy$–$xyzuzyu$–$xyzuyzy$–$xyzuyz$. Принципиальное значение имеет тот факт, что каждая из вершин данного графа является словом, длина которого не превосходит восьми.

Для того, чтобы прочувствовать хотя бы малую толику колоссальных трудностей, с которыми пришлось столкнуться в поисках вышеуказанной минимальной конфигурации $K_{3,3}$, одной из многих, что лежали в фундаменте результатов настоящего обзора, отметим, что подробное доказательство равенства слов $xyzuxyuxz = xyzuyuxz$ в свободной полугруппе многообразия, заданного тождеством $x^2 \approx x$, используемого для обоснования существования ребра $xyzuxyux$–$xyzuyuxz$ помеченного элементом z в графе Кэли свободной полугруппы данного многообразия, представляет собой 320 тождественных преобразований. А именно, равенство оказалось верно, так как, если взять в качестве отправной точки $(((((((xy)z)u)x)y)u)x)z = ((((((xy)z)u)y)u)x)z$, - доказываемое тождество, выполняемое для всех допустимых значений пропозициональных переменных x, y, z, u; $x^2 = x$, - исходное тождество идемпотентности; $(xy)z = x(yz)$, - исходное тождество ассоциативности; и предположить, что $(((((((c_1c_2)c_3)c_4)c_1)c_2)c_4)c_1)c_3 \neq ((((((c_1c_2)c_3)c_4)c_2)c_4)c_1)c_3$, - противное к доказываемому, что существуют такие константы c_1, c_2, c_3, c_4, для которых интересуемое нас тождество не верно; то в результате серии тождественных преобразований будет получено противоречие. Следовательно, предположение не верно. Что и требовалось доказать.

И наконец, при доказательстве неравенств, необходимых для обоснования того факта, что все вершины найденной конфигурации различны в исследуемом многообразии, строятся конкретные модели эквациональной логики первого порядка. Все их приводить не будем за необходимостью не загромождать изложение, но в качестве типового нетривиального примера покажем, что $xyzuyux \neq xyzuxyux$ в свободной полугруппе многообразия, заданного тождеством $x^2 \approx x$, для обоснования существования двух различных вершин $xyzuyux$, $xyzuxyux$ в графе Кэли свободной полугруппы данного многообразия.

В самом деле, равенство $xyzuyux = xyzuxyux$ не выполняется в свободной полугруппе исследуемого многообразия связок, возможно удовлетворяющей тождеству не эквивалентному тождеству идемпотентности, но отождествляющее слово из более чем восьми символов с любым другим словом, так как оно обращается в ложное, при интерпретации умножения прилагаемой справа таблицей Кэли.

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	2	0	4	5
1	1	1	2	1	4	5
2	4	5	2	2	4	5
3	0	1	2	3	4	5
4	4	4	2	4	4	5
5	5	5	2	5	4	5

Для такого умножения выполнены тождества идемпотентности и ассоциативности, последнее эффективно проверяется тестом ассоциативности по Лайту впервые опубликованном в [62], но взяв $x := 0$, $y := 1$, $z := 2$, $u := 3$, получим противоречие $xyzuyux := 0123130 = 023130 = 23130 = 2130 = 530 = 50 = 5$ с $xyzuxyux := 01230130 = 0230130 = 230130 = 20130 = 4130 = 430 = 40 = 4$. Что и требовалось доказать.

□

Заключение

Подводя итоги, приведём некоторые открытые проблемы, постановка которых принадлежит Л.М. Мартынову, и укажем на перспективы развития проблематики. В связи с результатами проделанной работы актуальной становится, по-видимому, весьма трудная следующая проблема.

Проблема 1. Описать многообразия полугрупп, имеющие бесконечный ранг планарности.

На подступах решения этой проблемы интересно получить ответы на следующие два вопроса.

Вопрос 1. Какие из тождеств определяют многообразия полугрупп, имеющие бесконечный ранг планарности?

Вопрос 2. Какие системы из двух тождеств определяют многообразия полугрупп, имеющие бесконечный ранг планарности?

Дело в том, что некоторые ключевые многообразия полугрупп задаются именно двумя тождествами в полугрупповой сигнатуре, соответствующие примеры можно найти среди многообразий групп и 0-приведенных многообразий.

Первую задачу можно свести к не менее трудной проблеме задания матрицы смежности основы графа Кэли соответствующей свободной полугруппы. А именно, опираясь на доказанное в [91], имеет место эквивалентность $r_\pi(\boldsymbol{V}) = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(SCay(F_n(\boldsymbol{V}))) \le 3$, где μ – инвариант Колен де Вердьера. Напомним, если $G = (V, E)$ – неориентированный граф, положим (не теряя общности), что $V = \{1, \ldots, n\}$, то $\mu(G)$ является наибольшим корангом (дефектом) такой матрицы $M = (M_{i,j}) \in R^{(n)}$, для которой выполнены следующие три условия: 1) для всех i, j при $i \ne j$ имеет место неравенство $M_{i,j} < 0$, если i и j являются смежными, и равенство $M_{i,j} = 0$ в противном случае; 2) M имеет ровно одно отрицательное собственное значение кратности 1; 3) не существует ненулевой матрицы $X = (X_{i,j}) \in R^{(n)}$ такой, что $MX = 0$, в которой $X_{i,j} = 0$, когда $i = j$ или $M_{i,j} \ne 0$ (то есть вершины i и j являются смежными). Данную эквивалентность можно раскрыть, используя методы из [28], развитые в работе [21].

На примере многообразия полугрупп правых нулей $\mathbf{R}_0 = \mathrm{var}\{xy \approx y\}$ имеет место неравенство $\lim_{n\to\infty} \mu(SCay(F_n(\mathbf{R}_0))) = \lim_{n\to\infty}(n-1) = \infty > 3$. В самом деле, $F_n(\mathbf{R}_0) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid xy \approx y \rangle$, $SCay(F_n(\mathbf{R}_0)) = K_n$, $\mu(K_n) = n-1$. Следовательно, данное многообразие имеет конечный ранг планарности.

Для многообразия полугрупп с нулевым умножением $\mathbf{N}_2 = \mathrm{var}\{xy \approx zt\}$ имеет место неравенство $\lim_{n\to\infty} \mu(SCay(F_n(\mathbf{N}_2))) = \lim_{n\to\infty}(2) = 2 \leq 3$. В самом деле, $F_n(\mathbf{N}_2) = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid xy \approx zt \rangle$, $SCay(F_n(\mathbf{N}_2)) = K_{1,n}$, $\mu(K_{1,n}) = \min\{1, n\} + 1 = 2$ при $n \geq 4$. Следовательно, данное многообразие имеет бесконечный ранг планарности.

Определённый интерес представляет ещё более трудная проблема классификации многообразий полугрупп по рангам планарности.

Проблема 2. Описать многообразия полугрупп, имеющих ранг планарности r, где r – фиксированный элемент из $\mathbb{N}^\infty$.

На сегодняшний день классифицированы по рангам планарности лишь многообразия коммутативных моноидов (теорема 3.1.1) и многообразия связок (рис. 3). Кроме того, отдельный интерес представляет также проблема спектров рангов планарности многообразий полугрупп.

Проблема 3. Описать спектры рангов планарности многообразий полугрупп.

Решение этого вопроса вызовет к жизни более трудную проблему классификации многообразий полугрупп по спектрам рангов планарности.

Проблема 4. Описать многообразия полугрупп, имеющих данный спектр рангов планарности S, где S – фиксированное подмножество множества $\mathbb{N}^\infty$.

Отдельный интерес представляет здесь следующий вопрос.

Вопрос 3. Для каких многообразий полугрупп спектр рангов планарности является полным?

Конкретные примеры многообразий полного спектра рангов планарности были представлены в обзоре. Ранее отмечалось (теорема 3.2.6), что спектр рангов планарности многообразия всех полугрупп полный, кроме того, обнаружена бесконечная серия многообразий нильполугрупп с полным спектром рангов планарности (следствие 8).

При этом из групповых многообразий в обзоре охватывались только многообразия абелевых групп. Тем интереснее адресовать проблему 1 к произвольным многообразиям клиффордовых полугрупп, то есть являющихся объединением своих подгрупп, не обязательно абелевых. Напомним, что как хорошо известно, любая клиффордова полугруппа является полурешеткой прямоугольных связок групп. Легко понять, что в таком многообразии выполняется тождество $x^n \approx x$ для некоторого натурального числа $n > 1$. Ясно, что любое многообразие связок является многообразием клиффордовых полугрупп. Среди многообразий связок согласно tереме 3.3.3 лишь два многообразия $\mathrm{var}\{x^2 \approx x; xy \approx x\}$ и $\mathrm{var}\{x^2 \approx x; xy \approx xyx\}$ имеют бесконечный ранг планарности. Примеры других многообразий клиффордовых полугрупп бесконечного ранга планарности нам неизвестны. В связи с этим интересно получить ответ на следующий вопрос.

Вопрос 4. Имеется ли многообразие клиффордовых полугрупп бесконечного ранга планарности содержащее неодноэлементную группу?

На подступах к решению этого вопроса интересно получить ответ на более частный вопрос, представляющий самостоятельный интерес.

Вопрос 5. Конечен ли ранг планарности любого нетривиального многообразия групп, в частности, любого локально конечного многообразия групп?

При решении этого вопроса для локально конечных многообразий групп будет уместным использование теоремы Машке, которая представлена теоремой 2.3.1 в нашей нумерации, описывающей конечные группы с планарными графами Кэли. Дело в том, что если мы найдём в таком многообразии свободную группу некоторого конечного ранга (она будет конечной), которая не попадает в список групп из теоремы Машке, то ранг планарности этого многообразия будет конечным.

Автор выражает глубокую признательность научному консультанту профессору Л. М. Мартынову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и полезные обсуждения результатов, а также профессору М.В. Волкову за конструктивные критические замечания, высказанные после доклада автора на екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы».

References

[1] http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?presentid=12900 — New problems of algebra and logic. Jubilee 900th meeting of the seminar: Omsk Algebraic Seminar, November 12, 2015 (in Russian).

[2] S.I. Adian, *On algorithmic problems in effectively complete classes of groups*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **123** (1958), 13–16 (in Russian).

[3] R. Arthan, P. Oliva, *Studying Algebraic Structures using Prover9 and Mace4*, Chapter 5 in "Proof Technology in Mathematics Research and Teaching", Mathematics Education in the Digital Era, edited by G. Hanna et al. (eds.), Published by Springer International Publishing, January, 2020.

[4] D.A. Bader, S.A. Sreshta, *New Parallel Algorithm for Planarity Testing*, Electrical and Computer Engineering Department University of State New Mexico, place City Albuquerque, State N M Postal Code 87131, 2003.

[5] Zh.T. Belenkova, *Plane Cayley graphs*, PhD Thesis, Omsk, OmSU Publ., 1998 (in Russian).

[6] Zh.T. Belenkova, V.A. Roman'kov, *Regular Cayley Graphs*, Dep. VINITI, 1997, no.802-V97 (in Russian).

[7] N. Biggs, *Algebraic graph theory, second edition*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[8] G. Birkhoff, *On the Structure of Abstract Algebras*, Proc. Camb. Phil. Soc. **31** (1935), 433–454.

[9] J. Bosák, *The graphs of semigroups*, Theory of graphs and its applications, Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963, Praha, 1964.

[10] A.A. Bulatov, *Algebraic methods in the study of combinatorial problems*, Dissertation of the doctor of Physico-Mathematical Sciences, Yekaterinburg, 2008 (in Russian).

[11] A. Cayley, *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\theta^n = 1$, Phil. Mag., **7:4** (1854), 40–47.

[12] A. Cayley, *The Theory of Groups: Graphical Representation*, Amer. J. Math., v.**1** (1878), 174–176.

[13] N. Chiba, T. Yamanouchi, T. Nishizeki, *Linear algorithms for convex drawings of planar graphs*, Progress in graph theory, (1982), 153–173.

[14] G. Czédli, *One Hundred Twenty-Seven Subsemilattices and Planarity*, Order, (2019), 1–11.

[15] V. Diekert, Y. Métivier, *Partial commutation and traces*, Handbook of formal languages. Berlin, Springer-Verl. **3** (1997), 457–533.

[16] C. Droms, B. Servatius, H. Servatius, *Connectivity and Planarity of Cayley Graphs*, Beiträge zur Algebra und Geometrie Contributions to Algebra and Geometry. **39:2** (1998), 269–282.

[17] C. Droms, *Infinite-ended groups with planar Cayley graphs*, Department of Mathematics & Statistics James Madison University, Harrisonburg, 2006.

[18] C. Droms, B. Servatius, H. Servatius, *Planar Cayley Graphs*, http://www.scientificcommons.org/42335324, 2008.

[19] T. Evans, *The lattice of semigroup varieties*, Semigroup Forum, **2** (1971), 1–43.

[20] S. Fan, Y. Zeng, *On Cayley graphs of Bands*, Semigroup Forum, **74** (2007), 99–105.

[21] F.M. Fedorov, *On the theory of infinite systems of linear algebraic equations*, TWMS J. Pure Appl. Math., **6:2** (2015), 202–212.
[22] C. Fennemore, *All varieties of bands*, Semigroup Forum, **1** (1970), 172–179.
[23] A. Georgakopoulos, M. Hamann, *The Planar Cayley Graphs are Effectively Enumerable*, https://arxiv.org/abs/1506.03361, 2015.
[24] A. Georgakopoulos, *On planar Cayley graphs and Kleinian groups*, University of Warwick, 2019.
[25] T.J. Head, *The varieties of commutative monoids*, Nieuw Archief voor Wiskunde, **3:16** (1968), 203–206.
[26] J. Hopcroft, R. Tarjan, *Efficient Planarity Testing*, Journal of the ACM, **21:4** (1974), 549–568.
[27] M. Kambites, *The loop problem for Rees matrix semigroups*, Semigroup Forum, **76:2** (2008), 204–216.
[28] L.V. Kantorovich, V.I. Krylov, *Approximate Methods of Higher Analysis*, Translated from the 3rd Russian Edition by C. D. Benster, 1958.
[29] A.V. Kelarev, S.J. Quinn, *On complete and bipartite Cayley graphs*, Arbeitstagung Allgemeine Algebra **62**: Abstracts, June 14–17, 2001, Linz, Austria, 2001.
[30] A.V. Kelarev, S.J. Quinn, *A combinatorial property and Cayley graphs of semigroups*, Semigroup Forum **66:1** (2002), 89–96.
[31] A.V. Kelarev, *On undirected Cayley graphs*, Australasian Journal of Combinatorics. **25** (2002), 73–78.
[32] A.V. Kelarev, C.E. Praeger, *On transitive Cayley graphs of groups and semigroups*, European Journal of Combinatorics, **24** (2003), 59–72.
[33] A.V. Kelarev, *On Cayley Graphs of Inverse Semigroups*, Semigroup Forum, **72** (2006), 411–418.
[34] B. Khosravi, *Comparison of Cayley graphs of semigroups and Cayley graphs of groups*, Book of abstracts Caucasian Mathematics Conference CMC II, Turkish Mathematical Society, (2007), 18–19.
[35] B. Khosravi, *On Cayley graphs of left groups*, Houston Journal of Mathematics, **35:3**, (2009).
[36] Behnam Khosravi, Bahman Khosravi, *A characterization of Cayley graphs of Brandt semigroups*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, **2:2** (2012), 12–18.
[37] Behnam Khosravi, Bahman Khosravi, *On Cayley graphs of semilattices of semigroups*, Semigroup Forum, **86** (2013), 114–132.
[38] P. N. Klein, J. H. Reif, *An efficient parallel algorithm for planarity*, J. Computer and System Sciences, **37** (1988), 190–246.
[39] K. Knauer, U. Knauer, *Toroidal embeddings of right groups*, Thai J. Math., **8:3** (2010), 483–490.
[40] K. Knauer, U. Knauer, *On planar right groups*, Semigroup Forum, **92:1** (2016), 142–157.
[41] A. Lempel, S. Even, I. Cederbaum, *An algorithm for planarity testing of graphs*, In P. Rosenstiel, editor, Proc. Int'l Symp. Theory of Graphs, place State New York, (1967), 215–232.
[42] E.S. Ljapin, *Semigroups*, Am. Math. Soc., Third Edition, 1974.
[43] A.L. Makarjev, *Nilpotent semigroups whose Cayley graph base is a tree*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **5** (2006), 40–46 (in Russian).
[44] A.L. Makarjev, *About semigroups of idempotents with Cayley acyclic graphs*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **6** (2007), 26–34 (in Russian).
[45] A.L. Makarjev, *Ordinal sums of semigroups with Cayley acyclic graphs*, Herald of Omsk University, **4** (2008), 12–17 (in Russian).
[46] A.L. Makarjev, *Semilattices with Cayley acyclic graphs*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **7** (2008), 28–33 (in Russian).
[47] S.W. Margolis, J.C. Meakin, *E-unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group representation*, Journal of Pure and Applied Algebra, **58** (1989), 45–76.
[48] L.M. Martynov, *Completeness, reducibility, primarity and purity for algebras: results and problems*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **13** (2016), 181–241 (in Russian).
[49] L.M. Martynov, D.V. Solomatin, *Semigroups of residues with cyclic groups of invertible elements admitting planar Cayley graphs*, Herald of Omsk University, **2** (2012), 57–62 (in Russian).

[50] P.O. Martynov, D.V. Solomatin, *Finite free commutative semigroups and semigroups with zero how admitting generalized outerplanar Cayley graphs*, Herald of Omsk University, **3** (2014), 22–26 (in Russian).
[51] P.O. Martynov, *Finite free commutative monoids admits generalized outerplanar Cayley graphs*, Herald of Omsk University, **4** (2015), 6–9 (in Russian).
[52] P.O. Martynov, *Crisp semigroups admit generalized outerplanar Cayley graphs*, Herald of Omsk University, **3** (2018), 6–9 (in Russian).
[53] T.A. Martynova, *The groupoid of* 0*-reduced varieties of Semigroups*, Semigroup forum, **26** (1983), 249–274.
[54] H. Maschke, *The representation of finite groups, especially of the rotation groups of the regular bodies of three- and four-dimensional space, by Cayley's color diagrams*, Amer. J. Math., **18:2** (1896), 156–194.
[55] J. McCammond, J. Rhodes, B. Steinberg, *Geometric Semigroup Theory*, arXiv:1104.2301 [math.GR], 2011.
[56] W. McCune, *Solution of the Robbins problem*, J. Autom. Reasoning, **19:3** (1997), 263–276.
[57] A.N. Melikhov, L.S. Bershtein, V.M. Kureichik, *Application of Graphs in the Design of Discrete Devices*, Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
[58] V.A. Molchanov, *A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols*, Semigroup Forum, **82** (2011), 1–9.
[59] A.Yu. Ol'shanskii, *Geometry of Defining Relations in Groups*, Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
[60] A.B. Paalman - de Miranda, *Topological representation of semigroups*, General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra 1966. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, (1967), 276–282.
[61] L.Yu. Polyakova, *Resolutions of free partially commutative monoids*, Siberian Mathematical Journal, **48** (2007), 1295–1304 (in Russian).
[62] G. Preston, A. Clifford, *The Algebraic Theory of Semigroups*, American Mathematical Society, **1:1** (1961), 12–31.
[63] G. Preston, A. Cliffor, *The Algebraic Theory of Semigroups*, American Mathematical Society, **1:7** (1964), 169–174.
[64] M.O. Rabin, *Recursive unsolvability of group theoretic problems*, Ann. of Math., **67** (1958), 172–174.
[65] T. Sander, *Eigenspaces of Hamming graphs and unitary Cayley graphs*, ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA, **3** (2010), 13–19.
[66] J. Sedláček, *On a generalization of outerplanar graphs*, Časopis Pěst. Mat., **2:113** (1988), 213–218 (in Czech).
[67] L.N. Shevrin, *Semigroups*, Ch. IV in Algebra: ed. L.A. Skornyakov. Moscow, Nauka Publ., **2** (1991), 11–191 (in Russian).
[68] D.V. Solomatin, *Finite free commutative semigroups with planar Cayley graphs*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **3** (2003), 32–38 (in Russian).
[69] D.V. Solomatin, *On the admissibility of some graphs as Cayley graphs of semigroups*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **4** (2004), 32–34 (in Russian).
[70] D.V. Solomatin, *Crisp semigroups with planar Cayley graphs*, Herald of Volgograd State Pedagogical University, **4** (2005), 27–31 (in Russian).
[71] D.V. Solomatin, *Finite free commutative monoids admitting planar Cayley graph*, Herald of Omsk University, **4** (2005), 36–38 (in Russian).
[72] D.V. Solomatin, *Direct products of cyclic semigroups admitting a planar Caley graph*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **3** (2006), 238–252 (in Russian).
[73] D.V. Solomatin, *Direct products of cyclic monoids and semigroups with zero admitting planar Cayley graphs*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **5** (2006), 51–64 (in Russian).
[74] D.V. Solomatin, *Finitely generated semigroups with one defining relation and identity admitting planar Cayley graph*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **6** (2007), 42–48 (in Russian).
[75] D.V. Solomatin, *Ordinal sums of rectangular semigroups admitting a planar Cayley graph*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **7** (2008), 33–41 (in Russian).

[76] D.V. Solomatin, *Free partially commutative semigroups and the n-fan semilattices with planar Cayley graphs*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **8** (2009), 36–39 (in Russian).
[77] D.V. Solomatin, *Stochastic algorithm for search a homeomorphic subgraph*, Conference paper: Stochastic models in biology and limit algebras (Omsk, 2-7 August 2010), Sobolev Institute of Mathematics SB RAS (2010), 98–100 (in Russian).
[78] D.V. Solomatin, *A planarity criterion for Cayley graphs of* 0*-direct unions of nilpotent semigroups*, Conference paper: Maltsev Meeting 2010 (Novosibirsk, May 2-6, 2010), Sobolev Institute of Mathematics (2010), 144 (in Russian).
[79] D.V. Solomatin, *About the criteria of planarity for Cayley graphs of semigroups*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **9** (2010), 44–46 (in Russian).
[80] D.V. Solomatin, *Semigroups with outerplanar Cayley graphs*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **8** (2011), 191–212 (in Russian).
[81] D.V. Solomatin, *Planar hypergraphs of the multiplicative semigroup of residues*, Mathematics and Computer Science: Science and Education, **10** (2011), 30–34 (in Russian).
[82] D.V. Solomatin, *Planarity ranks of the varieties of commutative monoids*, Herald of Omsk University, **4** (2012), 41–45 (in Russian).
[83] D.V. Solomatin, *Free partially commutative nilpotent semigroups with planar Cayley graphs*, Herald of Omsk University, **3** (2014), 28–36 (in Russian).
[84] D.V. Solomatin, *Planar varieties of commutative semigroups*, Herald of Omsk University, **2** (2015), 17–22 (in Russian).
[85] D.V. Solomatin, *Planar varieties of semigroups*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **12** (2015), 232–247 (in Russian).
[86] D.V. Solomatin, *The ranks of planarity for varieties of commutative semigroups*, Prikl. Diskr. Mat., **4:34** (2016), 50–64 (in Russian).
[87] D.V. Solomatin, *On ranks of the planarity of varieties of all idempotent semigroups, nilsemigroups, and semigroups with the permutation identity*, Herald of Omsk University, **4:86** (2017), 11–21 (in Russian).
[88] D.V. Solomatin, *On ranks of planarity of nil-semigroups varieties*, Herald of Omsk University, **2:24** (2019), 17–22 (in Russian).
[89] D.V. Solomatin, *The ranks of the planarity for varieties of semigroups*, Herald of Omsk University, **4** (2019), 9–15 (in Russian).
[90] S.V. Sudoplatov, *Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories*, Journal of Mathematical Sciences, **169:5** (2010), 680–695.
[91] Y.C. de Verdière, *Sur un Nouvel Invariant des Graphes et un Critère de Planarité* , Journal of Combinatorial Theory, Serias B., **50** (1990), 11–21.
[92] B. Zelinka, *The diameter of the graph of the system of proper semigroups of a commutative semigroup*, Mat.-Fyz. Cas. SAV. **15** (1965), 143–144.
[93] B. Zelinka, *Graphs of semigroups*, Cas. Pest. Mat., (1981), 407–408.
[94] B. Zelinka, J. Nieminen, I. Chajda, *Tolerances and orderings on semilattices*, Arch. Math., Brno., **19** (1983), 125–131.
[95] X. Zhang, *Clifford semigroups with genus zero*, Proc. Intern. Conf. Semigroups, Acts and Categories with Applications to Graphs, University of Tartu, June 27–30, 2007. Tartu: EMS. (2008), 151–160.
[96] H. Zieschang, E. Vogt, H.-D. Coldewey, *Surfaces and planar discontinuous groups* Berlin: Springer-Verlag, 1980.
[97] G.W. Zinbiel, *Encyclopedia of types of algebras 2010*, arXiv:1101.0267v1, 2010.
[98] A.A. Zykov, *Hypergraphs*, Uspekhi Mat. Nauk, **29:6(180)** (1974), 89–154 (in Russian).

Denis Vladimirovich Solomatin
Omsk State Pedagogical University,
14, Naberezhnaya Tukhachevskogo,
644099, Omsk, Russia
Email address: `denis_2001j@bk.ru`