S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 738–752 (2020) УДК 519.633

DOI 10.33048/semi.2020.17.053 MSC 65M12

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ ТРЕТЬЮ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

А.К. БАЗЗАЕВ

Abstract. In this work a difference schemes of higher order approximation are constructed for the generalized diffusion equation of fractional order with the Robin boundary value conditions. Using the maximum principle, we obtain a priori estimates and prove the stability and the uniform convergence of difference schemes.

Keywords: fractional derivative, Caputo fractional derivative, difference schemes, Robin boundary value conditions, maximum principle, convergence and stability.

Введение

Интегралы и производные нецелого порядка и дробные интегро-дифференциальные уравнения находят множество применений в современных исследованиях в теоретической физике, механике и прикладной математике. Дробное математическое исчисление является мощным инструментом для описания физических систем, которые обладают памятью и нелокальностью. Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью и характеризуются долгосрочной памятью. Дробные интегральные и дробные дифференциальные операторы позволяют описывать некоторые из этих характеристик. Использование

Bazzaev, A.K., On the stability and convergence of difference schemes for the generalized fractional diffusion equation with Robin boundary value conditions.

Поступила 28 августа 2019 г., опубликована 4 июня 2020 г.

дробного математического анализа может быть полезным для получения динамических моделей, в которых интегро-дифференциальные операторы по времени и координатам описывают степенную долгосрочную память и пространственную нелокальность сложных сред и процессов [1].

Математический аппарат интегро-дифференцирования дробного порядка позволяет описывать процессы в системах, для которых существенен учет нелокальных свойств по времени и пространству. Интерпретация производных дробного порядка как способ учета эффектов памяти (нелокальность по времени) и пространственных корреляций (нелокальность по координатам) привела к их широкому применению в естествознании [1]. Наличие в уравнениях дробной производной по времени интерпретируется как отражение особого свойства описываемого процесса–памяти, или в случае стохастического процесса–немарковости. Дробная производная по координатам обычно отражает самоподобную неоднородность структуры или среды, в которой развивается процесс. Такие структуры называют фракталами. При этом порядок дробной производной определяется размерностью фрактала. Простые формулы, связывающие размерность фрактала d_f с порядком дробной производной получены в работе [2]. В настоящее время в качестве математических моделей физических процессов рассматривают дифференциальные уравнения в частных производных дробных порядков по времени и по пространству [3]–[6].

Для описания структуры неупорядоченных сред и протекающих в них процессов широко используется теория фракталов (см. [7] – [11]). Примерами неупорядоченных сред являются пористые тела. При этом фракталами могут быть поровое пространство, скелет породы, поверхность скелета породы и т.д. В случае когда трещины и сплошные пористые блоки представляются однородными взаимопроникновении континуумами, для описания фильтрации однородной жидкости обычно используется модель Баренблатта-Желтова (см. [12]). В случае, когда пространство представляет собой фрактал с размерностью Хаусдорфа-Безиковича d_f, погруженный в сплошную среду с размерностью d $(d > d_f,\ d = 2, 3)$, для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется дифференциальное уравнение дробного порядка (см. [13]). Дробно-дифференциальное уравнение возникает также при изучении физических процессов стохастического переноса (см. [8]).

Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают при изучении многих физических процессов [14] – [15], при изучении фильтрации жидкости в сильно-пористой (фрактальной) среде [16].

Перенос, описываемый оператором с дробными производными на больших расстояниях от источников, приводит к иному поведению относительно малых концентраций по сравнению с классической диффузией. Эти малые концентрации или "далекие хвосты распределений" при дробной производной подчинены степенному закону убывания, что заставляет пересмотреть существующие представления о безопасности, базирующиеся на представлениях об экспоненциальной скорости затухания (см. [17], [18]). Как отмечено в [19], дробное исчисление в теории фракталов и систем с памятью приобретает такое же важное значение, как и классический анализ в механике сплошных сред.

Существует достаточно много подтверждений тому, что для диффузионного процесса характерно нелинейное нарастание среднего квадратичного отклонения [20]. Нарушения проявляются во многих ситуациях, в том числе при движении частиц в плазме [21], турбулентной диффузии частиц [22]. В качестве математических моделей подобных процессов рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных дробных порядков по пространству и времени [3]–[5].

В экономике производные дробного порядка могут применяться для описания экономических процессов с динамической памятью [23], [24]. Используя левосторонние производные Капуто, можно определить обобщение понятий предельных и средних величин, которое позволит учитывать эффекты памяти в экономических процессах [23], [24]. Производную нецелого порядка можно интерпретировать как предельную (маржинальную) величину экономического показателя в экономическом процессе с памятью. Впервые предельные (маржинальные) величины нецелого порядка для экономических процессов с памятью были предложены в работах [25]–[27]. При этом производные нецелого порядка имеют различную интерпретацию в микроэкономике и макроэкономике. Макроэкономическая интерпретация производных и интегралов нецелого порядка связана с обобщениями понятий акселератора и мультипликатора, предложенными в [28]–[30] для описания макроэкономических процессов со степенной памятью [31]–[35].

В работе [36] предложены условия, при которых интегральный оператор можно считать оператором дробной производной.

Работы [37]–[40] посвящены теоретическим результатам о существовании и единственности решений дифференциальных уравнений дробного порядка α, $0 < \alpha < 2$. В работах [37] – [39] сформулированы условия существования и единственности решения задач с начальными и краевыми условиями для уравнений

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = F(t, u(t)\varepsilon(0, T)), T < \infty,$$

или

$$D_{0t}^{\alpha} u = F(t, u(t)\varepsilon(0, T)), T < \infty,$$

для $0 < \alpha < 2$, где $\partial_{0t}^{\alpha} u$, $D_{0t}^{\alpha} u$ – производные дробного порядка Капуто и Римана-Лиувилля соответственно. Показано, что кроме того, что функция F непрерывна, она должна удовлетворять определенным условиям, являющимся аналогом классического условия Липшица.

Аналогичные результаты получены в [40] для системы дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, в том числе и производной Римана-Лиувилля.

Большое количество работ посвящено численным методам решения дифференциальных уравнений дробного порядка.

В работе [6] для численного моделирования аномальной диффузии в многомерной области применяется метод приближенной факторизации. Для первой начально-краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными дробных порядков по пространству и времени изучена чисто неявная схема на основе метода приближенной факторизации, доказана устойчивость схемы для рассматриваемого класса задач.

В [41] предложен численный алгоритм для решения уравнения дробной конвекции - диффузии по временной переменной. В [42] для решения дробного дифференциала уравнения используется преобразование Лапласа.

В [43] для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных с дробной производной Капуто порядка $1 < \alpha \leq 2$ использованы итерационные методы.

В [44] представлены некоторые численные методы решения различных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, экспериментально проверенные на различных примерах. В работах [45], [46] представлен обзор численных методов решения дифференциальных уравнений дробного порядка.

В работе [47] рассматривается специальная полудискретная схема на основе метода Галеркина, а также полностью дискретная схема, основанная на методе Кранка-Николсона для первой начально-краевой задачи для одномерного уравнения параболического типа с дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (1, 2)$ по пространственной переменной:

$$u_t - \mathcal{D}_x^{\alpha} u = f,\ x \in D = (0, 1),\ 0 < t \leq T,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,\ 0 < t \leq T,$$

$$u(x, 0) = v,\ x \in D.$$

Получены оценки для погрешности в нормах $L_2(D)$ и $H^{\alpha/2}(D)$ для полудискретной схемы и в норме $L_2(D)$ для полностью дискретной схемы.

Вариационная формулировка типа Петрова-Галеркина для одномерных краевых задач с дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in (3/2, 2)$ рассматривается в работе [48].

В работе [49] рассматривается уравнение с производной дробного порядка по времени с граничными условиями первого рода

$$\partial_{0t}^{\alpha} u - \Delta u = f,\ x \in \Omega,\ 0 < t \leq T,\ 0 < \alpha < 1,$$

$$u\big|_{\Gamma} = 0,\ 0 < t \leq T, \Omega + \Gamma = \overline{\Omega},$$

$$u(x, 0) = v,\ x \in \Omega.$$

Здесь получен дискретный аналог дробной производной по времени порядка аппроксимации $O(\tau^{2-\alpha})$. Доказана сходимость построенной схемы в норме $L_2(\Omega)$.

В работах [50] и [51] были рассмотрены локально-одномерные схемы (ЛОС) для уравнения диффузии дробного порядка в p-мерном параллелепипеде с краевыми условиями первого и третьего рода соответственно, а в [52] для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью. В этих работах была доказана сходимость ЛОС в равномерной метрике при $1/2 < \alpha \leq 1$. В работе [53] построены многомерные разностные схемы для уравнения диффузии дробного порядка и доказана сходимость разностных схем при всех $\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$. Работа [54] посвящена рассмотрению локально-одномерных разностных схем для уравнения диффузии дробного порядка с переменными коэффициентами в области сложной формы. Доказаны устойчивость и равномерная сходимость локально-одномерных схем для рассматриваемой задачи.

В [55] показано, что для получения априорных оценок при численном решении уравнения диффузии дробного порядка можно применять метод энергетических неравенств.

В работе [56] рассмотрено уравнение диффузии дробно-переменного порядка в конечной области. Для рассматриваемой задачи построена конечно-разностная схема. Устойчивость и сходимость разностных схем доказывается с помощью математической индукции. Приведены некоторые численные эксперименты, подтверждающие эффективность предложенных разностных схем.

В работе [57] предложен алгоритм экстраполяционного типа для численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка, основанный на том, что последовательность приближенных решений обладает асимптотическим разложением по отношению к размеру шагу.

Работа [58] посвящена исследованию существования, единственности и устойчивости решения нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка по времени.

В работах [59]–[60] рассматриваются дифференциальные уравнения теплопроводности дробного порядка с краевыми условиями третьего рода.

Работа [61] посвящена численному методу второго порядка точности решения дробного дифференциального уравнения диффузии. Алгоритм численного решения, предложенный в данной работе, основан на классическом методе Кранка-Николсона. Доказывается сходимость предложенного метода.

Принцип максимума для дифференциальной задачи в случае, когда рассматривается уравнение диффузии с дробной производной по времени установлен в работах Ю. Лучко [62]–[65]. Результаты этих работ использованы в работах [66], [67] для доказательства принципа максимума для дифференциального уравнения дробного (multi-term) порядка.

В работе [68] построены разностные схемы для дифференциальных уравнений в частных производных дробных порядков по времени и по пространству в одномерном и многомерном случаях. В многомерном случае для рассматриваемых задач строятся локально-одномерные схемы. С помощью принципа максимума получены априорные оценки в равномерной метрике, откуда следует сходимость разностных схем.

В работе [69] рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными дробного порядка:

$$\partial_{0t}^{\beta} u = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $a > 0$, $0 < \beta \leq 2$, $x \in S \subset \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R} > 0$, x, t–пространственная и временная переменные.

Это уравнение получено из классического волнового уравнения заменой производной по времени второго порядка дробной производной Капуто порядка $\beta \in (0, 2]$. В работе показано, что для $1 < \beta < 2$ поведение фундаментального решения оказывается промежуточным между диффузией (для вязкой жидкости) и распространением волны (для упругого твердого тела).

В [70] предложен другой подход для решения дробного волнового уравнения (1). Для $0 < \beta < 1$ используется метод разделения переменных. Следует отметить, что для случая $0 < \beta < 1$ для уравнения (1) в работе [71] получен дискретный аналог дробной производной по времени

$$\partial_{0t_j}^{\alpha} u = \Delta_{0t_j}^{\alpha} u + O(\tau), \tag{2}$$

$$\Delta_{0t_j}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) u_t^s, \ u_t^s = \frac{u^{s+1}-u^s}{\tau}.$$

В работе [72] показано, что если функция $v(t) \in C^3[0,T]$, то имеет место равенство

$$\partial_{0t_{j+1}}^{\alpha} v = \Delta_{0t_{j+1}}^{\alpha} v + O(\tau^{2-\alpha}), \ 0 < \alpha < 1.$$

В работе [73] по аналогии с [71] получен разностный аналог дробной производной Капуто порядка β, $1 < \beta \le 2$ по пространственной переменной, а также показано, что если функция $v(x) \in C^3[0,\ell]$, то имеет место равенство

$$\partial_{0x_i}^{\beta} v = \Delta_{0x_i}^{\beta} v + O(h),$$

где

$$\Delta_{0x_i}^{\beta} v = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{s=1}^{i} \left(x_{i-k+1}^{2-\beta} - x_{i-k}^{2-\beta}\right) v_{\overline{x}x,k}, \ v_{\overline{x}x,k} = \frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}.$$

Данная работа посвящена исследованию разностных схем повышенного порядка аппроксимации для третьей краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка с дробными производными порядка $\alpha\,, 0 < \alpha \leqslant 1$, по времени t, по пространственной переменной x порядка $\beta\,, 1 < \beta \leqslant 2$ и порядка $\gamma\,, 0 < \gamma \leqslant 1$ в младших членах. С помощью принципа максимума получена априорная оценка для приближенного решения, а также по аналогии с [72] доказана равномерная сходимость разностного решения к решению дифференциальной задачи со скоростью $O(h + \tau^{2-\alpha})$.

1. Постановка задачи

В прямоугольнике $\overline{Q}_T = [0 \leqslant x \leqslant \ell] \times [0 \leqslant t \leqslant T]$ рассматривается третья начально-краевая задача для уравнения диффузии дробного порядка с дробной производной по пространственной переменной x порядка $\beta\,, 1 < \beta \leqslant 2$ и дробной производной по пространственной переменной x порядка $\gamma\,, 0 < \gamma \leqslant 1$ в младших членах:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \partial_{0x}^{\beta} u + r(x,t)\partial_{0x}^{\gamma} u - q(x,t)u(x,t) + f(x,t), \ (x,t) \in Q_T, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \varkappa_-(0,t)u - \mu_-(0,t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varkappa_+(\ell,t)u - \mu_+(\ell,t), \ 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases} \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ 0 < x < \ell, \tag{5}$$

где

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}, \partial_{0x}^{\beta} u = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int_0^x \frac{u_{\xi\xi}(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^{\beta-1}}, \partial_{0x}^{\gamma} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \cdot$$

$\int\limits_0^x \dfrac{u_\xi(\xi,t)d\xi}{(x-\xi)^{\gamma}}$ – соответственно дробные производные Капуто по времени порядка α, $0 < \alpha < 1$ и по пространственной координате x порядка β, $1 < \beta \leqslant 2$ и порядка γ, $0 < \gamma \leqslant 1$ в младших членах,

$$r \leqslant 0, \ |r| \leqslant r^*, \ q \geqslant q^* \geqslant 0, \ \varkappa_\pm \geqslant \varkappa_* > 0.$$

2. Разностная схема

Пространственную сетку выберем равномерной с шагом $h = \dfrac{\ell}{N}$:

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih : \ i = 0, 1 \ \ldots, N\}, \ \omega_h = \{x_i = ih : \ i = 1, 2, \ \ldots, N-1\}.$$

На отрезке $[0, T]$ также введем равномерную сетку

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau : \ j = 0, 1 \ \ldots, j_0\}$$

с шагом $\tau = \dfrac{T}{j_0}$.

Будем обозначать

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau.$$

Обозначим через y_i^j значение сеточной функции y в узле (x_i, t_j). Для написания разностной схемы используем дискретные аналоги производных дробного порядка [71], [73], [72].

По аналогии с [72], этот результат можно улучшить, если предположить, что функция $v(x) \in C^4[0, \ell]$. Справедлива

Лемма 1. *Для любой функции $v(x) \in C^4[0, \ell]$ справедливо равенство*

$$\partial_{0x_{i+1}}^\beta v = \Delta_{0x_{i+1}}^\beta v + O(h^{3-\beta}), \ 1 < \beta \leqslant 2. \tag{6}$$

Доказательство. Для $x = x_{i+1}, i = 0, 1, \ldots, N-1$, имеем

$$\partial_{0x_{i+1}}^\beta v = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^{x_{i+1}} \frac{v_{\xi\xi}(\xi) d\xi}{(x_i - \xi)^{\beta - 1}} = \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=0}^{i} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{u_{\xi\xi}(\xi) d\xi}{(x_{i+1} - \xi)^{\beta-1}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=0}^{i} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{v_{\xi\xi}(x_{k+1/2}) + u_{\xi\xi\xi}(x_{k+1/2})(\xi - x_{k+1/2}) + O((\xi - x_{k+1/2})^2)}{(x_{i+1} - \xi)^{\beta-1}} d\xi =$$

$$= \Delta_{0x_{i+1}}^\beta v + \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=0}^{i} v_{\xi\xi\xi}(x_{k+1/2}) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\xi - x_{k+1/2}}{(x_{i+1} - \xi)^{\beta-1}} d\xi + O(h^2).$$

Оценим величину

$$\left| \frac{1}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=0}^{i} v_{\xi\xi\xi}(x_{k+1/2}) \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\xi - x_{k+1/2}}{(x_{i+1} - \xi)^{\beta-1}} d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=0}^{i} \left| \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\xi - x_{k+1/2}}{(x_{i+1} - \xi)^{\beta-1}} d\xi \right| =$$

$$= \frac{M}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=0}^{i} \left| \int\limits_{x_{k+1/2}}^{x_{k+1}} \frac{\xi - x_{k+1/2}}{(x_{i+1} - \xi)^{\beta-1}} d\xi - \int\limits_{x_k}^{x_{k+1/2}} \frac{x_{k+1/2} - \xi}{(x_{i+1} - \xi)^{\beta-1}} d\xi \right| =$$

$$= \frac{2^\beta M h^{3-\beta}}{8\Gamma(2-\beta)} \sum_{k=0}^{i} \left(\int\limits_0^1 \frac{z dz}{(2(i-k) + 1 - z)^{\beta-1}} - \int\limits_0^1 \frac{z dz}{(2(i-k) + 1 + z)^{\beta-1}} \right) =$$

$$= \frac{2^\beta M h^{3-\beta}}{8\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^1 z \sum_{k=0}^{i} \left(\frac{1}{(2k+1-z)^{\beta-1}} - \int\limits_0^1 \frac{1}{(2k+1+z)^{\beta-1}} \right) dz =$$

$$= \frac{2^\beta M h^{3-\beta}}{8\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^1 \left(\frac{z}{(1-z)^{\beta-1}} - \frac{z}{(2k+1-z)^{\beta-1}} \right) dz -$$

$$- \frac{2^\beta M h^{3-\beta}}{8\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^1 z \sum_{k=1}^{i} \left(\frac{1}{(2k-1+z)^{\beta-1}} - \frac{1}{(2k+1-z)^{\beta-1}} \right) dz \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^\beta M h^{3-\beta}}{8\Gamma(2-\beta)} \int\limits_0^1 \frac{z}{(1-z)^{\beta-1}} dz = \frac{2^\beta M h^{3-\beta}}{8\Gamma(2-\beta)} \frac{1}{(2-\beta)(3-\beta)} = \frac{2^\beta M}{8\Gamma(4-\beta)} h^{3-\beta},$$

где $M = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \ell} |v'''(x)|$. □

Итак, дифференциальной задаче (3) – (5) поставим в соответствие разностную схему

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha} \right) y_t^s = \Lambda y^{(\sigma)} + \varphi, \tag{7}$$

где

$$\Lambda y^{(\sigma)} = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{k=1}^{i} \left(x_{i-k+1}^{2-\beta} - x_{i-k}^{2-\beta} \right) \left(\sigma \hat{y}_{\bar{x}x,k} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x,k} \right) +$$

$$+ \frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=1}^{i} \left(x_{i-k+1}^{1-\gamma} - x_{i-k}^{1-\gamma} \right) \left(\sigma \hat{y}_{x,k} + (1-\sigma) y_{x,k} \right) - d_i y^{(\sigma)} + \hat{\varphi},$$

$$\begin{cases} y_{x,0}^{(\sigma)} = \varkappa_- y_0^{(\sigma)} - \mu_-, \ x = 0, \\ -y_{\bar{x},N}^{(\sigma)} = \varkappa_+ y_N^{(\sigma)} - \mu_+, \ x = \ell, \end{cases} \tag{8}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{9}$$

где

$$y_{\bar{x}x,k} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2},$$
$$\hat{y} = y^{j+1}, \ y = y^j, y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1-\sigma) y.$$

Для простоты в дальнейшем будем рассматривать случай $\sigma = 1$:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha} \right) y_t^s = \Lambda \hat{y} + \hat{\varphi}, \tag{10}$$

где

$$\Lambda \hat{y} = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{k=1}^{i} \left(x_{i-k+1}^{2-\beta} - x_{i-k}^{2-\beta} \right) \hat{y}_{\bar{x}x,k} + \frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{i} \left(x_{i-k+1}^{1-\gamma} - x_{i-k}^{1-\gamma} \right) \hat{y}_{x,k} - d_i \hat{y},$$

$$\begin{cases} \hat{y}_{x,0} = \varkappa_- \hat{y}_0 - \mu_-, \ x = 0, \\ -\hat{y}_{\bar{x},N} = \varkappa_+ \hat{y}_N - \mu_+, \ x = \ell, \end{cases} \tag{11}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \tag{12}$$

где

$$\hat{y} = y^{j+1},\ y = y^j,\ \hat{y}_{\overline{x}x,k} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}.$$

3. Погрешность аппроксимации разностной схемы

Перейдем теперь к изучению погрешности аппроксимации разностной схемы.

Пусть $u = u(x,t)$–решение задачи (3) – (5), а y^{j+1}–решение разностной задачи (10)–(12).

Подставляя $y^{j+1} = z^{j+1} + u^{j+1}$ в разностное уравнение (10), получим

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) z_t^s = \Lambda z_i^{j+1} + \psi_i^{j+1}, \tag{13}$$

где

$$\Lambda z_i^{j+1} = \frac{1}{\Gamma(3-\beta)} \sum_{k=1}^{i} \left(x_{i-k+1}^{2-\beta} - x_{i-k}^{2-\beta}\right) \hat{z}_{\overline{x}x,k} + \frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{i} \left(x_{i-k+1}^{1-\gamma} - x_{i-k}^{1-\gamma}\right) \hat{z}_{x,k} - d_i \hat{z},$$

$$\psi^{j+1} = \Lambda u^{j+1} + \varphi^{j+1} - \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=0}^{j} \left(t_{j-s+1}^{1-\alpha} - t_{j-s}^{1-\alpha}\right) u_t^s. \tag{14}$$

Краевые условия (11) имеют первый порядок аппроксимации. Подставляя $y^{j+1} = z^{j+1} + u^{j+1}$ в разностные краевые условия (11), получим

$$\begin{cases} z_{x,0}^{j+1} = \varkappa_- z_0^{j+1} - \nu_-^{j+1},\ x = 0, \\ -z_{\overline{x},N}^{j+1} = \varkappa_+ z_N^{j+1} + \nu_+^{j+1},\ x = \ell, \end{cases} \tag{15}$$

$$\nu_- = a_1 u_{x,0} - (\varkappa_- u_0 - \mu_-) = \left(a_1 u_{x,0} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = O(h),$$

$$\nu_+ = -a_N u_{\overline{x},N} - (\varkappa_+ u_N - \mu_+) = \left(-a_N u_{\overline{x},N} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\ell} = O(h).$$

Таким образом, погрешность решения разностной краевой задачи (10) – (12) удовлетворяет уравнению (13), нулевому начальному условию $z(x,0) = 0$ и краевым условиям (15).

Итак, разностная схема (10) – (12) имеет порядок аппроксимации $O(h + \tau^{2-\alpha})$.

4. Устойчивость и равномерная сходимость разностной схемы

Чтобы получить оценку для решения разностной задачи (10) – (12), приведем уравнение и граничные условия к каноническому виду ([74], стр. 339):
(16)

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P),\ P \in \omega,$$

$$A(P) > 0,\ B(P,Q) > 0,\ D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geqslant 0 \text{ для всех } P \in \omega,$$

ω–множество узлов сетки в некоторой ограниченной области n-мерного евклидова пространства.

Разностную задачу (10) – (12) перепишем в виде:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j}\left(t_{j-s+1}^{1-\alpha}-t_{j-s}^{1-\alpha}\right)y_t^s=\frac{1}{\Gamma(3-\beta)}\sum_{k=1}^{i}\left(x_{i-k+1}^{2-\beta}-x_{i-k}^{2-\beta}\right)y_{\overline{x}x,k}^{j+1}+$$

$$+\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)}\sum_{k=1}^{i}\left(x_{i-k+1}^{1-\gamma}-x_{i-k}^{1-\gamma}\right)y_{x,k}^{j+1}-d_iy_i^{j+1}+\varphi_i^{j+1}, \tag{17}$$

$$\begin{cases} y_{x,0}^{j+1}=\varkappa_-y_0^{j+1}-\mu_-,\ x=0,\\ -y_{\overline{x},N}^{j+1}=\varkappa_+y_N^{j+1}-\mu_+,\ x=\ell, \end{cases} \tag{18}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h. \tag{19}$$

Получим для решения y задачи (10) – (12) с помощью принципа максимума априорную оценку. Для этого уравнение (12) приведем к канонической форме:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{3-2^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)h^\beta}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)}\frac{1}{h^\gamma}+d_i\right]y_i^{j+1}=\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^\beta}y_{i+1}^{j+1}+$$

$$+\left[\frac{3^{2-\beta}-3\cdot 2^{2-\beta}+3}{\Gamma(3-\beta)h^\beta}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)}\left(2-2^{1-\gamma}\right)\right]y_{i-1}^{j+1}+\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha}y_i^j+$$

$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-2}\left(-t_{j-s+1}^{1-\alpha}+2t_{j-s}^{1-\alpha}-t_{j-s-1}^{1-\alpha}\right)y_i^{s+1}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha})y_i^0+$$

$$-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\sum_{k=2}^{i-2}\left(-x_{i-k+1}^{1-\gamma}+2x_{i-k}^{1-\gamma}-x_{i-k-1}^{1-\gamma}\right)y_k^{j+1}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^2}\sum_{k=1}^{i-3}\left(x_{i-k+1}^{2-\beta}-3x_{i-k}^{2-\beta}+3x_{i-k-1}^{2-\beta}-x_{i-k-2}^{2-\beta}\right)y_{k+1}^{j+1}+$$

$$\left[-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\left(-x_i^{1-\gamma}+2x_{i-1}^{1-\gamma}-x_{i-2}^{1-\gamma}\right)+\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^2}\left(-2x_i^{2-\beta}+3x_{i-1}^{2-\beta}-x_{i-2}^{2-\beta}\right)\right]y_1^{j+1}+$$

$$+\left[\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^\beta}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\left(x_i^{1-\gamma}-x_{i-1}^{1-\gamma}\right)\right]y_0^{j+1}+\varphi_i^{j+1}. \tag{20}$$

Заметим, что [71]

$$-t_{j+1}^{1-\alpha}+2t_j^{1-\alpha}-t_{j-1}^{1-\alpha}>0,\ j\geqslant 1,$$

и все коэффициенты, стоящие перед $y_k^{j+1},\ k=2,3,\ldots,i+1$, положительны.

Отдельно остановимся на коэффициенте при y_1^{j+1}. При написании канонической формы (20) мы использовали разностный аналог граничного условия при $x=0$:

$$y_{x,0}=\varkappa_-y_0-\mu_-,$$

или что тоже самое

$$y_0=\frac{1}{1+h\varkappa_-}y_1+\frac{\mu_-h}{1+h\varkappa_-}.$$

С учетом граничного условия при $x=0$ каноническая форма уравнения примет вид:

$$\left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^\alpha}+\frac{3-2^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)h^\beta}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)}\frac{1}{h^\gamma}+d_i\right]y_i^{j+1}=\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^\beta}y_{i+1}^{j+1}+$$

$$+\left[\frac{3^{2-\beta}-3\cdot 2^{2-\beta}+3}{\Gamma(3-\beta)h^{\beta}}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)}\left(2-2^{1-\gamma}\right)\right]y_{i-1}^{j+1}+\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}}y_i^j+$$

$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=0}^{j-2}\left(-t_{j-s+1}^{1-\alpha}+2t_{j-s}^{1-\alpha}-t_{j-s-1}^{1-\alpha}\right)y_i^{s+1}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha})y_i^0+$$

$$-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\sum_{k=2}^{i-2}\left(-x_{i-k+1}^{1-\gamma}+2x_{i-k}^{1-\gamma}-x_{i-k-1}^{1-\gamma}\right)y_k^{j+1}+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^2}\sum_{k=1}^{i-3}\left(x_{i-k+1}^{2-\beta}-3x_{i-k}^{2-\beta}+3x_{i-k-1}^{2-\beta}-x_{i-k-2}^{2-\beta}\right)y_{k+1}^{j+1}+$$

$$+\Bigg[-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\left(-x_i^{1-\gamma}+2x_{i-1}^{1-\gamma}-x_{i-2}^{1-\gamma}\right)+\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^2}\left(-2x_i^{2-\beta}+3x_{i-1}^{2-\beta}-x_{i-2}^{2-\beta}\right)+$$

$$+\frac{1}{1+h\varkappa_-}\left[\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^{\beta}}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\left(x_i^{1-\gamma}-x_{i-1}^{1-\gamma}\right)\right]\Bigg]y_1^{j+1}+\widetilde{\varphi}_i^{j+1}, \tag{21}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_i^{j+1}=\varphi_i^{j+1}+\left[\frac{x_i^{2-\beta}-x_{i-1}^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)h}-\frac{r_i\left(x_{i+1}^{1-\gamma}-x_i^{1-\gamma}\right)}{\Gamma(2-\gamma)}\right]\frac{1}{1+h\varkappa_-}\mu_-.$$

Тогда коэффициенты

$$A(P)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}+\frac{3-2^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)h^{\beta}}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)}\frac{1}{h^{\gamma}}+d_i>0;$$

$$B(P,Q)=\Bigg\{\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^{\beta}};\left[\frac{3^{2-\beta}-3\cdot 2^{2-\beta}+3}{\Gamma(3-\beta)h^{\beta}}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)}\left(2-2^{1-\gamma}\right)\right];$$

$$\frac{2-2^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}};\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(-t_{j-s+1}^{1-\alpha}+2t_{j-s}^{1-\alpha}-t_{j-s-1}^{1-\alpha}\right),s=0,1,2,\dots j-2;$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}(t_{j+1}^{1-\alpha}-t_j^{1-\alpha});$$

$$-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\left(-x_{i-k+1}^{1-\gamma}+2x_{i-k}^{1-\gamma}-x_{i-k-1}^{1-\gamma}\right),k=2,3,\dots i-2;$$

$$\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^2}\left(x_{i-k+1}^{2-\beta}-3x_{i-k}^{2-\beta}+3x_{i-k-1}^{2-\beta}-x_{i-k-2}^{2-\beta}\right),k=1,2,3,\dots i-3;$$

$$\Bigg[-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\left(-x_i^{1-\gamma}+2x_{i-1}^{1-\gamma}-x_{i-2}^{1-\gamma}\right)+\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^2}\left(-2x_i^{2-\beta}+3x_{i-1}^{2-\beta}-x_{i-2}^{2-\beta}\right)+$$

$$+\frac{1}{1+h\varkappa_-}\left[\frac{1}{\Gamma(3-\beta)h^{\beta}}-\frac{r_i}{\Gamma(2-\gamma)h}\left(x_i^{1-\gamma}-x_{i-1}^{1-\gamma}\right)\right]\Bigg]\Bigg\}>0.$$

Тогда очевидно, что

$$D(P(x_i,t_{j+1}))=\frac{-r_i(x_{i+1}^{1-\gamma}-x_i^{1-\gamma})\varkappa_-}{(1+h\varkappa_-)\Gamma(2-\gamma)}+\frac{(x_i^{2-\beta}-x_{i-1}^{2-\beta})\varkappa_-}{(1+h\varkappa_-)\Gamma(3-\beta)h}+d_i>o,$$

$$D(P(0,t_{j+1}))=\varkappa_-\geqslant\varkappa_*>o,$$

$$D(P(\ell,t_{j+1}))=\varkappa_+\geqslant\varkappa_*>o.$$

Так как $D(P) > 0$ на всей сетке $\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$, то из принципа максимума следует оценка

$$\|y^{j+1}\|_{C_h} \leqslant \|u_0(x)\|_{C_h} + \frac{1}{\varkappa_*}\left(\max_{0\leqslant k\leqslant j}|\mu_-(t_k)| + \max_{0\leqslant k\leqslant j}|\mu_+(t_k)|\right) +$$

$$+\frac{1}{q^*}\max_{0<t'\leqslant(j+1)\tau}\|\varphi(x,t')\|_{C_h}, \tag{22}$$

где

$$\|y\|_{C_h} = \max_{x\in\omega_h}|y(x)|.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Разностная схема (10) – (12) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (10) – (12) справедлива оценка (22).*

Из теоремы 1 следует сходимость разностной схемы (10) – (12) к решению дифференциальной задачи (3)–(5) со скоростью $O(h+\tau^{2-\alpha})$ в равномерной метрике [75].

References

[1] V.E. Tarasov. *Models in theoretical physics with integro-differentiation of fractional order*, Izhevskij Inst. Komp. Issl., Izhevsk, 2011. (in Russian)

[2] V.Kh. Shogenov, A.A. Akhkubekov, R.A. Akhkubekov. *Method of fracional differentiation in theory of Brownian motion*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Sev.-Kavk. Reg., Estestv. Nauki 1, **125** (2004), 94–103. Zbl 1095.60507

[3] F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini, *The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation*, Fract. Calc. Appl. Anal., **4**:2 (2001), 153–192. Zbl 1054.35156

[4] E. Scalas, R. Gorenflo, F. Mainardi, *Uncoupled continuous-time random walks: solution and limiting behaviour of the master equation*, Phys. Rev. E., **69** (2004).

[5] Y. Zhang, D.A. Benson, M.M. Meerschaert, H.P. Scheffler, *On using random walks to solve the space fractional advectiona-dispersion equations*, J. Stst. Phys., **123**:1 (2006), 89–110. Zbl 1092.82038

[6] N.G. Abrashina-Zhadaeva, I.A. Timoshchenko, *Finite-difference schemes for a diffusion equation with fractional derivatives in a multidimensional domain*, Differ. Equ., **49**:7 (2013), 789–795. Zbl 1286.65094

[7] O.Yu. Dinariev. *Flow in a fractured medium with fractal fracture geometry*, Fluid Dyn., **25**:5 (1990), 704–708. Zbl 0729.76083

[8] V.L. Kobelev, E.P. Romanov, Ya.L. Kobelev, L.Ya. Kobelev, *Non-Debye relaxation and diffusion in a fractal space*, Dokl. Phys. **43**:8 (1998), 487–490. Zbl 1065.82505

[9] Ya.L. Kobelev, L.Ya. Kobelev, E.P. Romanov. *Self-maintained processes in the case of nonlinear fractal diffusion*, Dokl. Phys. **44**:11 (1999), 752–753. Zbl 1036.82515

[10] A.N. Kochubei. *Fractional-order diffusion*, Differ. Equations, **26**:4 (1990), 660–670. Zbl 0729.35064

[11] V.Kh. Shogenov, S.K. Kumykova, M. Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Generalized transport equation and fractional derivatives*, Dopov. Akad. Nauk Ukr., **1997**:12 (1997), 47–54. Zbl 0923.35073

[12] G.I. Barenblatt, Yu.P. Zheltov. *Fundamental equations of filtration of homogeneous liquids in fissured rocks*, Sov. Phys., Dokl. **5** (1960), 522–525. Zbl 0097.21303

[13] R.R. Nigmatullin, *The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry*, Phys. Status Solidi. B. **133**:1 (1986), 425–430.

[14] K.V. Chukbar, *Stochastic transport and fractional derivatives*, J. Exp. Theor. Phys., **81**:5 (1995), 1025–1029.

[15] V.M. Goloviznin, I.A. Korotkin, *Numerical methods for some one-dimensional equations with fractional derivatives*, Diff. Equat. **42**:7 (2006), 967–973. Zbl 1126.65119

[16] R.R. Nigmatullin, *Relaxation features of systems with residual memory*, Phys. Solid State., **27**:5 (1985), 1583–1585. (in Russian)
[17] V.M. Goloviznin, V.P. Kiselev, I.A. Korotkin, *Numerical methods of solving diffusion equation with a fractional derivative in one-dimensional case*, Preprint IBRAE-2003-12, IBRAE RAN, Moscow, 2003. (in Russian)
[18] V.M. Goloviznin, V.P. Kiselev, I.A. Korotkin, Yu.P. Yurkov, *Direct problems of classical transfer of radionuclides in geological formations*, Izv. RAN. Energ., **4** (2004), 121–130. (in Russian)
[19] A.M. Nakhushev, *Fractional calculus and its application*, Fizmatgiz, Moscow, 2003. Zbl 1066.26005
[20] V.V. Uchaikin, *Anomalous diffusion of particles with a finite free-motion velocity*, Theor. Math. Phys., **115**:1 (1998), 496–501. Zbl 1085.82506
[21] V.Yu. Zaburdaev, K.V. Chukbar, *Enhanced superdiffusion and finite velocity of Levy flights*, J. Exp. Theor. Phys., **94**:2 (2002), 252–259.
[22] J. Klafter, M.F. Shlesinger, G. Zumofen, *Beyond Brownian motion*, Phys. Today., **49**:2 (1996), 33–339.
[23] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Concept of dynamic memory in economics*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., **55** (2018), 127–145. MR3693376
[24] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Notion of dynamic memory in economic theory*, Journal of Economy and Entrepreneurship, **11**:6 (2017), 868–880.
[25] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Marginal utility for economic processes with memory*, Almanah Sovremennoj Nauki i Obrazovaniya, **7**:109 (2016), 108–113. (in Russian)
[26] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Economic indicator that generalizes average and marginal values*, Journal of Economy and Entrepreneurship, **10**:(11–1) (2016), 817–823. (in Russian)
[27] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Permanent low-level assistance in a wide range of ways*, Azimuth Scientific Research: Economics and Management, **3**:16 (2016), 197–201. (in Russian)
[28] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *A generalization of the concepts of the accelerator and multiplier to take into account of memory effects in macroeconomics*, Journal of Economy and Entrepreneurship, **10**:10–3 (2016), 1121–1129. (in Russian)
[29] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Economic accelerator with memory: discrete time approach*, Problems of Modern Science and Education, **78** (2016), 37–42.
[30] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Exact Discretization of an Economic Accelerator and Multiplier with Memory*, Journal of Economy and Entrepreneurship, **11**:7 (2017), 1063–1069. (in Russian)
[31] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Influence of memory effects on world economy and business*, Azimuth Scientific Research: Economics and Management, **5**:4 (2016), 369–372. (in Russian)
[32] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Fractional dynamics of natural growth and memory effect in economics*, European Research, **23** (2016), 30–37.
[33] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Memory effects in hereditary Keynesian model*, Problems of Modern Science and Education, **80** (2016), 55–60.
[34] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Dynamic intersectoral models with memory that generalize Leontief model*, Journal of Economy and Entrepreneurship, **11**:2-1(79) (2017), 913–924.
[35] V.V. Tarasova, V.E. Tarasov, *Dynamic intersectoral models with power-law memory*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **54** (2018), 100–117.
[36] M. Caputo, M. Fabrizio, On the notion of fractional derivative and applications to the hysteresis phenomena, Meccanica, **52**:13 (2017), 3043–3052. Zbl 1380.74098
[37] D. Baleanu, A. Rezapour, H. Mohammadi, *Some existence results on nonlinear fractional differential equations*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci., **371**:1990, Article ID 20120144 (2013). Zbl 1342.34009
[38] Baleanu D, Agarwal R, Mohammadi H, Rezapour S. *Some existence results for a nonlinear fractional differential equation on partially ordered Banach spaces*, Bound. Value Probl., **2013**:112 (2013), 1–8. Zbl 1301.34007
[39] S. Abbas, *Existence of solutions to fractional order ordinary and delay differential equations and applications*, Electron. J. Differ. Equ., **2011**:09 (2011) 1–11. Zbl 1211.34096
[40] K. Shah, Y. Li, *Existence theory of differential equations of arbitrary order*, In: *Differential Equations: Theory and Current Research ch 2*, IntechOpen, London, 2018, 35–55.
[41] J. Zhang, X. Zhang, B. Yang, *An approximation scheme for the time fractional convection–diffusion equation*, Appl. Math. Comput., **335** (2018), 305–312. Zbl 1427.65201

[42] S. Lin, C. Lu, *Laplace transform for solving some families of fractional differential equations and its applications*, Adv. Difference Equ., **137**, 2013. Zbl 1390.34025

[43] V. Turut, N. Guzel, *On solving partial differential equations of fractional oder by using the variational iteration method and multivariate Pade approximations*, Eur. J. Pure Appl. Math., **6**:2 (2013), 147–171. Zbl 1413.65401

[44] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999. Zbl 0924.34008

[45] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. Trujillo, *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*, Hackensack, NJ, 2012. Zbl 1248.26011

[46] A. Landy, *Fractional differential equations and numerical methods [Thesis]*, University of Chester, 2009.

[47] B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou, *A Petrov-Galerkin finite element method for fractional convection-diffusion equations*, SIAM J. Nummer. Anal., **54**:1 (2016), 481–503. Zbl 1335.65092

[48] B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou, *Error analysis of a finite element method for the space-fractional parabolic equation*, SIAM J. Nummer. Anal., **52**:5 (2016), 2272–2294. Zbl 1310.65126

[49] B. Jin, R. Lazarov, Z. Zhou, *An analysis of the L_1 scheme for the subdiffusion equation with nonsmooth data*, IMA J. Numer. Anal., **36**:1 (2015), 197–211. Zbl 1336.65150

[50] M.M. Lafisheva, M.K. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional difference schemes for the fractional order diffusion equation*, Comput. Math. Math. Phys., **48**:10 (2008), 1875–1884. Zbl 1177.76393

[51] A.K. Bazzaev, M.K. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional scheme for fractional diffusion equations with robin boundary conditions*, Comput. Math., Math. Phys., **50**:7 (2010), 1141–1149. Zbl 1224.65198

[52] A.K. Bazzaev, A.B. Mambetova, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional scheme for the heat equation of fractional order with concentrated heat capacity*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., **52**:9 (2012), 1656–1665. Zbl 1274.35154

[53] A.K. Bazzaev, *Finite-difference schemes for diffusion equation of fractional order with Robin boundary conditions in multidimensional domain*, Ufa Math. J., **5**:1 (2013), 11–16. MR3429947

[54] Bazzaev, A.K., Shkhanukov-Lafishev, M.K. *Locally one-dimensional schemes for the diffusion equation with a fractional time derivative in an arbitrary domain*, Comput. Math. and Math. Phys. **56** (2016), 106–115.

[55] A.A. Alikhanov, *Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings*, Appl. Math. Comput., **219**:8 (2012), 3938–3946. Zbl 1311.35332

[56] Tao Xu, Shujuan Lu, Wenping Chen, Hu Chen. *Finite difference scheme for multi-term variable-order fractional diffusion equation*, Adv. Difference Equ., **103**, 2018. Zbl 07003447

[57] K. Diethelm, G. Walz, *Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation*, Numer. Algorithms., **16**:3-4 (1997), 231–253. Zbl 0926.65070

[58] K. Diethelm, N.J. Ford, *Analysis of fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., **265**:2 (2002), 229–248. Zbl 1014.34003

[59] Yu. Povstenko, *Axisymmetric Solutions to Fractional Diffusion-Wave Equation in a Cylinder Under Robin Boundary Condition*, Eur. Phys. J.-Spec., **222**:8 (2013), 1767–1777.

[60] Yu. Povstenko, *Time-Fractional Heat Conduction in an Infinite Medium with a Spherical Hole Under Robin Boundary Condition. Fract*, Calc. Appl. Anal. **16**:2 (2013), 354–369. Zbl 1312.35186

[61] Ch. Tadjeran, M. Meerschaert, H. Scheffler, *A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation*, J. Comput. Phys. **213**:1 (2006), 205–213. Zbl 1089.65089

[62] Yu. Luchko, *Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation*, J. Math. Anal. Appl., **351**:1 (2009), 218–223. Zbl 1172.35341

[63] Yu. Luchko, *Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order*, Fract. Calc. Appl. Anal., **12**:4 (2009), 409–422. Zbl 1198.26012

[64] Yu. Luchko, *Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations*, Fract. Calc. Appl. Anal., **14**:1 (2011), 110–124. Zbl 1273.35297

[65] Yu. Luchko, *Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation*, Comput. Math. Appl., **59**:5 (2010), 1766–1772. Zbl 1189.35360

[66] Juan J. Nieto, *Maximum principles for fractional differential equations derived from Mittag–Leffler functions*, Appl. Math. Lett., **23**:10 (2010), 1248–1251. Zbl 1202.34019

[67] H. Ye, F. Liu, V. Anh, I. Turner, *Maximum principle and numerical method for the multi-term time-space Riesz-Caputo fractional differential equations*, Appl. Math. Comput., **227** (2014), 531–540. Zbl 1364.35428

[68] A.K. Bazzaev, M.K. Shkhanukov-Lafishev, *On the convergence of difference schemes for fractional differential equations with Robin boundary conditions*, Comput. Math. Math. Phys. **57**:1 (2017), 133–144. Zbl 1371.65095

[69] F. Mainardi, P. Paradisi, *Fractional diffusive waves*, J. Comput. Acoust., **9**:4 (2001), 1417–1436. Zbl 1360.76272

[70] H. Parsian, *Time fractional wave equation: Caputo sense*, Adv. Stud. Theor. Phys., **6**:1-4 (2012), 95–100. Zbl 1247.35191

[71] F.I. Taukenova, M.K. Shkhanukov-Lafishev, *Difference methods for solving boundary value problems for fractional differential equations*, Comput. Math. Math. Phys. **46**:10 (2006), 1785-–1795. MR2304042

[72] A.A. Alikhanov, *Stability and convergence of difference schemes for boundary value problems for the fractional-order diffusion equation*, Comput. Math. Math. Phys. **56**:4 (2016), 561–575. Zbl 1352.65287

[73] A.K. Bazzaev, M.K. Shkhanukov-Lafishev, *On the convergence of difference schemes for fractional differential equations with Robin boundary conditions*, Comput. Math. Math. Phys. **57**:1 (2017), 133–144. Zbl 1371.65095

[74] A.A. Samarskii, A.V. Gulin, *Stability of Difference Schemes*, Nauka, Moscow, 1973. Zbl 0304.65003

[75] A.A. Samarskii, *The Theory of Difference Schemes*, Marcel Dekker, New York, 2001. Zbl 0971.65076

Alexander K. Bazzaev
North-Ossetian State University,
44–46, Vatutina str.,
Vladikavkaz, 362025, Russia

Vladikavkaz Institute of Management,
14, Borodinskaya str.,
Vladikavkaz, 362025, Russia
E-mail address: al.bazzaev@gmail.com