УДК 517.95

Обратные задачи по отысканию множителей правой части телеграфного уравнения

Аннотация. Для телеграфного уравнения изучены обратные задачи по отысканию множителей правой части. Обратная задача по нахождению сомножителя правой части, зависящей от времени, эквивалентно редуцировано к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Из которого получена теорема об однозначной разрешимости этой обратной задачи. Решение обратной задачи по определению сомножителя правой части, зависящей от пространственной координаты, построено в виде ряда Фурье по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи; установлен критерий единственности и доказаны теоремы существования решения поставленной задачи.

Ключевые слова: телеграфное уравнение, обратные задачи, спектральный метод, интегральное уравнение, единственность, существование, малые знаменатели.

1. Постановка задач

Рассмотрим неоднородное телеграфное уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = F(x,t) \tag{1}$$

в области $Q = \{0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, где $b,\ l,\ T$ — заданные положительные действительные числа и поставим следующие задачи.

Задача 1 (Первая начально–граничная задача). Найти в области Q функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C^2(Q) \cap C^1(\overline{Q}); \tag{2}$$

$$Lu \equiv F(x,t),\ (x,t) \in Q; \tag{3}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{5}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{6}$$

где $F(x,t),\ \varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции.

На основе этой прямой задачи для уравнения (1) рассмотрим следующие обратные задачи.

Задача 2. Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$. Найти функции $u(x,t)$ и $g(t)$, удовлетворяющие условиям (2) – (6), и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x_0,t) = h(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

где x_0 — заданная фиксированная точка отрезка $[0,l]$, $\varphi(x),\ \psi(x),\ h(t)$ и $f(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(x_0) = h(0)$.

Задача 3. Пусть $F(x,t) = f(x)g(t)$. Найти функции $u(x,t)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям (2) – (6), и, кроме того, дополнительному условию

$$u(x,t_0) = \widetilde{\varphi}(x),\ 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{8}$$

где t_0 — заданная фиксированная точка отрезка $(0,T]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\widetilde{\varphi}(x)$ и $g(t)$ — заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что данная статья является продолжением исследований работ [1], [2], где были изучены обратные задачи по нахождению начальных условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в начально–граничной задаче (2) – (6) с дополнительным условием (8). Здесь ставятся обратные задачи по отысканию правой части $F(x,t)$ телеграфного уравнения (1).

Аналогичные обратные задачи для уравнения теплопроводности изучались в работах [3, с. 118 – 120] [4, с. 248 – 252], [5]. В работе [3, с. 123 – 126] для одномерного уравнения теплопроводности

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x)g(t),\ 0 < x < l,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

с граничными и начальным условиями

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ u(x,0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l,$$

изучены обратные задачи по отысканию множителей $g(t)$ и $f(x)$ правой части с заданием дополнительного условия

$$u(x_0,t) = h(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ x_0 \in [0,l]. \tag{9}$$

Для обратной задачи по определению функций $u(x,t)$ и $g(t)$ доказана теорема единственности и существования решения, когда $f(x_0) \neq 0$.

В работе [5] для уравнения теплопроводности изучены обратные задачи по отысканию начального условия и правой части. Установлен критерий единственности решения обратной задачи по определению начального условия. Обратная задача по нахождению сомножителя правой части, зависящей от времени, эквивалентно редуцировано к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. В силу однозначной разрешимости которого в классе непрерывных функций получены теоремы однозначной разрешимости этой обратной задачи. Решение обратной задачи по определению сомножителя правой части, зависящей от пространственной координаты, построено в виде ряда Фурье по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи; установлен критерий единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решения поставленной задачи.

В работах [6] и [7] для общих параболических уравнений

$$u_t - Lu = f(t)g(x,t) + g_0(x,t),$$

где L — равномерный эллиптический оператор, исследована обратная задача по определению пары функций $u(x,t)$ и $f(t)$ с заданием начально–граничных условий и дополнительного требования типа (9), и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решения при $|g(x_0,t)| \geqslant g_0 = const > 0$.

В работе [8] для общего параболического уравнения исследуется обратная задача восстановления источника — правой части $F(x,t) = h(x,t)f(x)$, где неизвестной является функция $f(x)$. Для нахождения функций $u(x,t)$ и $f(x)$, помимо начально–граничных условий, задается дополнительное условие нелокального наблюдения вида $\int\limits_0^T u(x,t)d\mu(t) = \chi(x)$. Для поставленной задачи доказано свойство фредгольмовости, получены достаточные условия существования и единственности ее решения.

Отметим также работы [9], [10], где для абстрактного дифференциального уравнения первого порядка

$$u'(t) = Au(t) + \varphi(t)p + f(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

в банаховом пространстве E изучена обратная задача по отысканию пары $u(t)$ и $p \in E$ с заданием условий $u(0) = u_0,\ u(T) = u_1$, где A — линейный замкнутый оператор. В [9] указаны достаточные условия на функции $\varphi(t)$ и $f(t)$, которые обеспечивают существование единственного решения поставленной задачи. А в [10] найдены минимальные условия на функцию $\varphi(t)$ $(f(t) = 0)$, при которых установлен критерий единственности решения обратной задачи в терминах собственных значений оператора A.

Отметим также работы [3, с. 159 – 161], [12], [13, с. 70 – 93], [14], где изучены обратные задачи по определению коэффициента при неизвестной функции телеграфного уравнения.

2. Исследование обратной задачи 2

Теперь на основе прямой задачи (2) – (6) изучим обратную задачу по определению пары функций $u(x,t)$ и $g(t)$. Для этого приведем результаты по построению решения задачи (2) – (6) в виде суммы ряда Фурье [1] и оно имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)X_k(x),\ k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

где

$$u_k(t) = \varphi_k \cos\lambda_k t + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t + \frac{f_k}{\lambda_k}\int_0^t g(s)\sin[\lambda_k(t-s)]ds, \tag{11}$$

$$\lambda_k = \sqrt{b^2 + \mu_k^2},$$

$$X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\mu_k x,\ \mu_k = \frac{\pi k}{l},\ k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$f_k = \int\limits_0^l f(x)X_k(x)dx, \tag{13}$$

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x)X_k(x)dx, \tag{14}$$

$$\psi_k = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx, \tag{15}$$

и доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $\varphi(x) \in C^3[0,l],\ \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,\ \psi(x) \in C^2[0,l],\ \psi(0) = \psi(l) = 0,\ f(x) \in C^2[0,l],\ f(0) = f(l) = 0,\ g(t) \in C[0,T]$, *то существует единственное решение задачи* (2) – (6) *и оно определяется в виде суммы ряда* (10).

При условии существования функции $g(t)$ решение задачи (2) – (6) определяется формулой (10). Положив в этой формуле $x = x_0$ и, поменяв местами операции интегрирования и суммирования, получим для искомой функции $g(t)$ интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^t K(t,\tau) g(\tau) d\tau = \widetilde{h}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{16}$$

с ядром

$$K(t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} \sin[\lambda_k(t-\tau)] X_k(x_0),\ 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T, \tag{17}$$

$$\lambda_k = \sqrt{b^2 + \mu_k^2},\ \mu_k = \frac{\pi k}{l},\ k \in \mathbb{N},$$

и правой частью

$$\widetilde{h}(t) = h(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \lambda_k t - \frac{\psi_k}{\lambda_k} \sin \lambda_k t \right) X_k(x_0),\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{18}$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x),\ f(x) \in C^3[0,l],\ \varphi(0) = \varphi(l) = \varphi'(0) = \varphi'(l) = 0,\ f(0) = f(l) = f'(0) = f'(l) = 0,\ \psi(x) \in C^2[0,l],\ \psi(0) = \psi(l) = 0,\ h(t) \in C^2[0,T]$. *Тогда, если* $f(x_0) \neq 0$, *уравнение* (16) *имеет единственное решение* $g(t)$ *в классе функций* $C[0,T]$.

Доказательство. Прежде всего обоснуем равномерную сходимость рядов (17) и (18) на указанных замкнутых областях и возможность их почленного дифференцирования по переменной t дважды. Для этого найдем скорость убывания коэффициентов $\varphi_k,\ f_k$ и ψ_k при $k \to \infty$. В интегралах формул (15), (13) при $k \geqslant 1$ проинтегрировав по частям три раза, в интеграле формулы (14) — два раза, получим

$$\begin{aligned} \varphi_k &= -\frac{1}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi^{(3)}(x) \cos \mu_k x dx = -\frac{\varphi_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \\ f_k &= -\frac{1}{\mu_k^3}\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f^{(3)}(x,t) \cos \mu_k x dx = -\frac{f_k^{(3)}}{\mu_k^3}, \\ \psi_k &= -\frac{1}{\mu_k^2}\sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi^{(2)}(x) \sin \mu_k x dx = -\frac{\psi_k^{(2)}}{\mu_k^2}, \end{aligned} \tag{19}$$

причем в силу неравенства Бесселя ряды из квадратов $|\varphi_k^{(3)}|^2,\ |f_k^{(3)}|^2$ и $|\psi_k^{(2)}|^2$ сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k^{(3)}|^2 \leqslant |||\varphi^{(3)}||^2_{L_2[0,l]},\ \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^{(3)}|^2 \leqslant ||f^{(3)}||^2_{L_2[0,l]},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(2)}|^2 \leqslant ||\psi^{(2)}||^2_{L_2[0,l]}.$$

Тогда ряды

$$K_t''(t,\tau) = -\sum_{k=1}^{\infty} f_k\lambda_k^2 \sin[(\lambda_k(t-\tau))]X_k(x_0), \tag{20}$$

$$\widetilde{h}''(t) - h''(t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k\lambda_k^2\cos\lambda_k t - \psi_k\lambda_k \sin\lambda_k t\right)X_k(x) \tag{21}$$

с учетом представлений (19) мажорируются соответственно сходящимися числовыми рядами

$$C_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|f_k^{(3)}|}{k},\ C_2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|\varphi_k^{(3)}|}{k}+\frac{|\psi_k^{(2)}|}{k}\right).$$

Поэтому ряды (17) и (18) сходятся равномерно и допускают почленное дифференцирование по t дважды соответственно при $0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T$ и на $[0,T]$. Тогда функции $K_t'(t,\tau)$, $K_t''(t,\tau)$ и $\widetilde{h}'(t)$, $\widetilde{h}''(t)$ непрерывны на указанных множествах. Дифференцируя уравнение (16) по t дважды, учитывая, что $K(t,t)=0$, имеем

$$K_t'(t,t)g(t) + \int\limits_0^t K_t''(t,\tau)g(\tau)d\tau = \widetilde{h}''(t),\ 0\leqslant t\leqslant T, \tag{22}$$

где

$$K_t'(t,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x_0) = f(x_0), \tag{23}$$

т.е. правая часть равенства (23) представляет собой разложение в ряд Фурье по системе $X_k(x)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$. По условию $f(x_0)\neq 0$, следовательно, уравнение (16) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра второго рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью, а значит, оно имеет единственное решение $g(t)$ в классе непрерывных на $[0,T]$ функций. ■

Теперь покажем, что условие $f(x_0)\neq 0$ является существенным для единственности решения обратной задачи. Пусть для некоторых $k=m$ и $x_0\in[0,l]$ выражение $\sin\mu_k x_0 = 0$. Тогда существует функция $f(x) = \sin\mu_k x$, такая, что $f(x_0) = \sin\mu_k x_0 = 0$. Для такой функции при любой функции $g(t)\in C[0,T]$ существует ненулевое решение обратной задачи 2 (где $\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0,\ h(t)\equiv 0$)

$$u(x,t) = \frac{\sin\mu_k x}{\lambda_k}\int\limits_0^t g(s)\sin[\lambda_k(t-s)]ds.$$

Возникает вопрос о существовании корней уравнения

$$\sin\frac{\pi m_0}{l}x_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_0}{l} = \frac{k}{m_0},\ k\in\mathbb{N},$$

т.е. когда отношение x_0/l принимает рациональные значения, нарушается единственность решения обратной задачи при указанном выборе функции $f(x)$.

Таким образом, если выполнены условия теоремы 2, то единственным образом находится функция $g(t)$ из класса $C[0,T]$. Тогда будут выполнены все условия теоремы 1, в силу которой функция $u(x,t)$ единственным образом определяется рядом (10) как решение прямой задачи (2) – (6).

3. Исследование обратной задачи 3

3.1. Случай, когда $g(t)\equiv 1$

Единственность решения. Пусть $u(x,t)$ и $f(x)$ — решение задачи (2) – (6), (8). Следуя [15] введем функции

$$u_k(t)=\int\limits_0^l u(x,t)X_k(x)dx, \tag{24}$$

где система функций $X_k(x)$ определяется по формуле (12), $k\in\mathbb{N}$. На основании (24) рассмотрим функции

$$v_\varepsilon(t)=u_k^\varepsilon(t)=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,t)X_k(x)dx, \tag{25}$$

где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число. Дифференцируя равенство (25) по t два раза и учитывая уравнение (1), получим

$$\begin{gathered}v_\varepsilon''(t)=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{tt}X_k(x)dx=\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}(u_{xx}-b^2u+f(x))X_k(x)dx=\\ =-b^2v_\varepsilon(t)+\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}u_{xx}X_k(x)dx+\int_\varepsilon^{l-\varepsilon}f(x)X_k(x)dx.\end{gathered} \tag{26}$$

В правой части равенства (26) интегрируя по частям два раза и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$ с учетом условий (5) получим уравнение

$$u_k''(t)+\lambda_k^2u_k(t)=f_k, \tag{27}$$

где $\lambda_k^2=\mu_k^2+b^2$,

$$f_k=\int_0^l f(x)X_k(x)dx,\ k\in\mathbb{N}. \tag{28}$$

Общим решением уравнения (27) является функция

$$u_k(t)=a_k\cos\lambda_kt+b_k\sin\lambda_kt+\frac{f_k}{\lambda_k^2}(1-\cos\lambda_kt),\ k\in\mathbb{N}, \tag{29}$$

$a_k,\ b_k$ — произвольные постоянные.

Для определения коэффициентов $a_k,\ b_k$ и f_k удовлетворим функцию (24) условиям (5), (6) и (8):

$$u_k(0)=\int_0^l u(x,0)X_k(x)dx=\int_0^l\varphi(x)X_k(x)dx=\varphi_k, \tag{30}$$

$$u_k'(0) = \int_0^l u_t(x,0)X_k(x)dx = \int_0^l \psi(x)X_k(x)dx = \psi_k. \tag{31}$$

$$u_k(t_0) = \int_0^l u(x,t_0)X_k(x)dx = \int_0^l \widetilde{\varphi}(x)X_k(x)dx = \widetilde{\varphi}_k. \tag{32}$$

Далее подчинив в общее решение (29), получим систему.

$$\begin{cases} a_k = \varphi_k, \\ b_k\lambda_k = \psi_k, \\ a_k \cos\lambda_k t_0 + b_k \sin\lambda_k t_0 + \dfrac{f_k}{\lambda_k^2}(1-\cos\lambda_k t_0) = \widetilde{\varphi}_k. \end{cases} \tag{33}$$

Из системы (33) найдем

$$a_k = \varphi_k,\ b_k = \frac{\psi_k}{\lambda_k}, \tag{34}$$

$$f_k = \frac{\lambda_k^2\left(\widetilde{\varphi}_k - \varphi_k\cos\lambda_k t_0 - \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t_0\right)}{1-\cos\lambda_k t_0}, \tag{35}$$

при условии, что при всех $k \in \mathbb{N}$

$$\delta(k) = 1-\cos\lambda_k t_0 \neq 0. \tag{36}$$

Подставив (34) и (35) в (29), получим окончательный вид функций

$$\begin{gathered} u_k(t) = \varphi_k\cos\lambda_k t + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t + \\ + \left(\widetilde{\varphi}_k - \varphi_k\cos\lambda_k t_0 - \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t_0\right)\frac{1-\cos\lambda_k t}{1-\cos\lambda_k t_0} = \\ = \varphi_k\frac{\cos\lambda_k t - \cos\lambda_k t_0}{1-\cos\lambda_k t_0} + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\frac{\sin\lambda_k t - \sin\lambda_k t_0 - \sin\lambda_k(t-t_0)}{1-\cos\lambda_k t_0} + \\ + \widetilde{\varphi}_k\frac{1-\cos\lambda_k t}{1-\cos\lambda_k t_0}. \end{gathered} \tag{37}$$

Пусть $\varphi(x) = \psi(x) = \widetilde{\varphi}(x) \equiv 0$. Тогда все $\varphi_k = \psi_k = \widetilde{\varphi}_k \equiv 0$ и из равенств (37), (35), (28) и (24) имеем

$$\int_0^l u(x,t)X_k(x)dx = 0,\ \int_0^l f(x)X_k(x)dx = 0,$$

при любом $k \in \mathbb{N}$ и $t \in [0,T]$. Отсюда в силу полноты системы $X_k(x)$ в $L_2[0,l]$ следует, что $u(x,t) = 0,\ f(x) = 0$ почти всюду на $[0,l]$ при любом $t \in [0,T]$. Поскольку в силу (2) функции $u(x,t)$ и $f(x)$ непрерывны на $\overline{Q}$ и $[0,l]$ соответственно, то $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{Q}$ и $f(x) \equiv 0$ на $[0,l]$.

Пусть теперь при некоторых t_0 и $k = p \in \mathbb{N}$ нарушено условие (36), т.е. $\delta(p) = 0$, тогда однородная задача (2) – (6), (8) (где $\psi(x) = \varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x) \equiv 0$) имеет нетривиальное решение

$$u(x,t) = \sin\lambda_p t X_p(x),\ f(x) = f_p\sin\mu_p x.$$

Выражение $\delta(k)=0$ относительно t_0 только в том случае, когда

$$t_0=\frac{2\pi m}{\lambda_k},\ k,\, m\in\mathbb{N}. \tag{38}$$

Отсюда следует, когда t_0 принимает значения, заданные по формуле (38), нарушается единственность решения задачи (2) – (6), (8). Следовательно, нами установлен критерий единственности решения.

Теорема 3. *Если существует решение задачи* (2) – (6), (8)*, то оно единственно только тогда, когда при всех $k\in\mathbb{N}$ выполнены условия* (36)*.*

Существование решения. Решение задачи (2) – (6), (8) при условии (36) формально определяется в виде сумм рядов

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x), \tag{39}$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_kX_k(x), \tag{40}$$

где $u_k(t)$ определяются по формуле (37), а f_k — по формуле (35).

Поскольку выражение $\delta(k)$ является знаменателем коэффициентов $u_k(t)$ и f_k и $\delta(k)$ при значениях t_0, заданных по формуле (38), имеет счетное множество нулей с точкой сгущения на бесконечности, то возникнет проблема "малых знаменателей"[5], [15] – [18], [19], [20], [21, с. 347], [22, с. 114]. В связи с этим надо показать существование чисел t_0 и l, при которых выражение $\delta(k)$ отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Выражение для $\delta(k)$ представим в следующем виде:

$$\delta(k)=1-\cos\lambda_kt_0=2\sin^2\frac{\lambda_kt_0}{2}=2\sin^2\pi k\widetilde{t_0}\widetilde{\lambda}_k\neq 0,$$

где $\widetilde{t_0}=\frac{t_0}{2l}$, $\widetilde{\lambda}_k=\sqrt{1+(bl/\pi k)^2}$.

Пусть

$$\widetilde{\delta}(k)=\sin\pi k\widetilde{t_0}\widetilde{\lambda}_k. \tag{41}$$

Лемма 1. *Если $\widetilde{t_0}=p/q$ является произвольным рациональным числом, где $p/q\notin\mathbb{N}$, $(p,q)=1$, то существуют положительные постоянные C_0 и k_0, ($k_0\in\mathbb{N}$), такие, что при всех $k>k_0$ справедлива оценка*

$$|\delta(k)|\geqslant\frac{C_1}{k^2}>0. \tag{42}$$

Доказательство проведем следуя работам [1] и [2]. В случае $b>0$ выражение $\widetilde{\lambda}_k$, которое зависит от $b\,l$, при условии

$$k>k_1=\begin{cases}[bl/\pi],\ \text{если}\ \dfrac{bl}{\pi}\geqslant 1,\\[2mm] 1,\ \text{если}\ \dfrac{bl}{\pi}<1,\end{cases} \tag{43}$$

можно представить в виде:

$$\widetilde{\lambda}_k = \left[1 + \left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2\right]^{1/2} = 1 + \theta_k, \tag{44}$$

при этом для θ_k справедлива оценка [23, с. 62]

$$\frac{3}{8}\left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2 < \theta_k < \frac{1}{2}\left(\frac{b\,l}{\pi k}\right)^2. \tag{45}$$

Тогда соотношение (41) с учетом (44) принимает вид

$$\widetilde{\delta}(k) = \sin\left(\pi k\,\widetilde{t_0} + \widetilde{t_0}\ \widetilde{\theta}_k\right), \quad \widetilde{\theta}_k = \pi k \theta_k. \tag{46}$$

Пусть $\widetilde{\alpha} = p/q$, $(p,q) = 1$. Разделив kp на q с остатком $kp = sq + r$, s, $r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq r < q$, представлению (46) придадим вид

$$\widetilde{\delta}(k) = (-1)^s \sin\left(\frac{\pi r}{q} + \widetilde{t_0}\ \widetilde{\theta}_k\right). \tag{47}$$

Если $r = 0$, то из (47) имеем

$$|\widetilde{\delta}(k)| = \left|\sin\left(\widetilde{t_0}\ \widetilde{\theta}_k\right)\right|. \tag{48}$$

Поскольку последовательность $\widetilde{\theta}_k$ в силу оценки (45) является бесконечно малой при $k \to \infty$, то существует число $k_2 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_2$

$$0 < \widetilde{t_0}\ \widetilde{\theta}_k < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда в силу известного неравенства

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \tag{49}$$

на основании (48), (45) получим

$$|\widetilde{\delta}(k)| > \frac{2}{\pi}\left(\widetilde{t_0}\ \widetilde{\theta}_k\right) \geqslant \frac{2\widetilde{t_0}}{\pi}\frac{3}{8}\frac{(b\,l)^2}{\pi k} = \frac{C_2}{k} > 0 \tag{50}$$

при $k \geqslant \max\{k_1, k_2\}$.

Пусть теперь $r > 0$. Тогда ясно, что $1 \leqslant r \leqslant q-1$, $q \geqslant 2$. Поскольку выражение $|\widetilde{\delta}(k)| = |\sin(\pi r/q + \widetilde{t_0}\ \widetilde{\theta}_k)|$ имеет конечный нижний предел при $k \to \infty$, то существует число $k_3 \in \mathbb{N}$, такое, что при всех $k > k_3$ из представления (47) будем иметь

$$|\widetilde{\delta}(k)| \geqslant \frac{1}{2}\left|\sin\frac{\pi r}{q}\right| = C_3 \geqslant \frac{C_3}{k} > 0. \tag{51}$$

Тогда из неравенств (50) и (51) следует справедливость оценки (42), где $C_1 = \min\{C_2, C_3\}$ при всех $k > k_0 = \max\{k_1, k_2, k_3\}$.$\blacksquare$

Теперь рассмотрим случай, когда $\widetilde{t_0}$ является иррациональным числом. Следуя [1], [2], представим соотношение (46) в виде

$$\widetilde{\delta}(k) = (-1)^n \sin\left[\pi k\left(\widetilde{t_0} - \frac{n}{k}\right) + \widetilde{t_0}\ \widetilde{\theta}_k\right],\ n \in \mathbb{N}. \tag{52}$$

Как известно [24], что для всякого $k \in \mathbb{N}$ существует $n \in \mathbb{N}$, такое, что

$$\left|\widetilde{t_0} - \frac{n}{k}\right| < \frac{1}{2k}. \tag{53}$$

Число n возьмем таким, что в силу неравенства (53) выполнялось неравенство

$$\left|\pi k\left(\widetilde{t_0} - \frac{n}{k}\right)\right| < \frac{\pi}{2}. \tag{54}$$

Если $\widetilde{t_0}$ является иррациональным алгебраическим числом степени два, т. е. является квадратическим иррациональным числом, то в силу теоремы Лиувилля [25, с. 60] существует положительное число δ, такое, что при любых целых n и k, $k > 0$, выполняется неравенство

$$\left|\widetilde{t_0} - \frac{n}{k}\right| > \frac{\delta}{k^2}. \tag{55}$$

Если потребуем, чтобы постоянные t_0, l, b и δ удовлетворяли неравенству

$$\delta - \frac{\widetilde{t_0}}{2}\left(\frac{bl}{\pi}\right)^2 - \frac{l}{2\pi} > 0, \tag{56}$$

то рассуждая аналогично работам [16], [23, с. 65] на основании соотношений (52) – (56) получим оценку (42) с другой постоянной при всех $k \in \mathbb{N}$, т.е. справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\widetilde{t_0}$ *— иррациональное алгебраическое число степени два,* $bl < \pi$ *и выполнено условие* (56). *Тогда существует положительная постоянная* C_6*, зависящая от* t_0, l *и* b*, такая, что при всех* $k \in \mathbb{N}$ *имеет место оценка*

$$|\delta(k)| > \frac{C_4}{k^2}. \tag{57}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1*, тогда при всех* $k \geqslant k_0$ *и при любом* $t \in [0, T]$ *справедливы оценки:*

$$
\begin{aligned}
|u_k(t)| &\leqslant C_5\left(k^2|\varphi_k| + k|\psi_k| + k^2|\widetilde{\varphi}_k|\right),\\
|u_k'(t)| &\leqslant C_6\left(k^3|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k^3|\widetilde{\varphi}_k|\right),\\
|u_k''(t)| &\leqslant C_7\left(k^4|\varphi_k| + k^3|\psi_k| + k^4|\widetilde{\varphi}_k|\right),\\
|f_k(t)| &\leqslant C_8\left(k^4|\varphi_k| + k^3|\psi_k| + k^4|\widetilde{\varphi}_k|\right).
\end{aligned}
$$

Доказательство следует непосредственно из формул (35), (37) и оценки (42).

Отметим, что при выполнении условий леммы 2 указанные в лемме 3 оценки верны при всех $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 4. *Если* $\varphi(x) \in C^5[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0$, $\psi(x) \in C^4[0, l]$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = 0$, $\widetilde{\varphi}(x) \in C^5[0, l]$, $\widetilde{\varphi}(0) = \widetilde{\varphi}(l) = \widetilde{\varphi}''(0) = \widetilde{\varphi}''(l) = \widetilde{\varphi}^{(4)}(0) = \widetilde{\varphi}^{(4)}(l) = 0$, *то справедливы представления*

$$\varphi_k = \frac{\varphi_k^{(5)}}{\mu_k^5},\ \psi_k = \frac{\psi_k^{(4)}}{\mu_k^4},\ \widetilde{\varphi}_k = \frac{\widetilde{\varphi}_k^{(5)}}{\mu_k^5},$$

где $\psi_k^{(4)}$, $\widetilde{\varphi}_k^{(5)}$ *и* $\varphi_k^{(5)}$ *— коэффициенты разложений функций* $\psi^{(4)}(x)$, $\widetilde{\varphi}^{(5)}(x)$, $\varphi^{(5)}(x)$ *в ряд по системам функций* (12) *и* $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x\right\}$, *при этом справедливы оценки*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(5)}|^2 \leqslant ||\varphi^{(5)}(x)||^2_{L_2[0,l]},\ \sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(4)}|^2 \leqslant ||\psi^{(4)}(x)||^2_{L_2[0,l]},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}|\widetilde{\varphi}_k^{(5)}|^2 \leqslant ||\widetilde{\varphi}^{(5)}(x)||^2_{L_2[0,l]}. \tag{58}$$

Доказательство. Интегрируя по частям в интегралах формул (30) – (32) с учетом условий на функции $\widetilde{\varphi}(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, получим

$$\varphi_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi^{(5)}(x)\cos\mu_k x dx,\ \psi_k^{(4)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi^{(4)}(x)\sin\mu_k x dx,$$

$$\widetilde{\varphi}_k^{(5)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \widetilde{\varphi}^{(5)}(x)\cos\mu_k x dx.$$

Оценки (58) являются неравенствами Бесселя по ортонормированным системам (12) и $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x\right\}$. ■

Из ряда (39) почленным дифференцированием составим ряды

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^2 u_k(t)X_k(x),\ u_{tt}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k''(t)X_k(x). \tag{59}$$

На основании лемм 3 и 4 ряды (39), (40) и (59) мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_9\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(|\varphi_k^{(5)}| + |\psi_k^{(4)}| + |\widetilde{\varphi}_k^{(5)}|\right). \tag{60}$$

В силу этого ряды (39), (40) и (59) сходятся равномерно на $\overline{Q}$. Тогда функции $u(x,t)$ и $f(x)$, определенные соответственно рядами (39) и (40), удовлетворяют условиям (2) и (3).

Если для чисел $\widetilde{t_0}$ из леммы 1 при некоторых $k = p = k_1, k_2, \ldots, k_m$, где $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m \le k_0$, k_i, $i = \overline{1,m}$, m – заданные натуральные числа, $\delta(p) = 0$, тогда из системы (33) следует, что для разрешимости задачи (2) – (4), (8) необходимо и достаточно, чтобы

$$\widetilde{\varphi}_p - \varphi_p\cos\lambda_p t_0 - \frac{\psi_p}{\lambda_p}\sin\lambda_p t_0 = 0,\ p = k_1, k_2,\ \ldots\ , k_m. \tag{61}$$

В этом случае решение задачи (2) – (6), (8) определяется в виде сумм рядов

$$u(x,t) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)u_k(t)X_k(x) +$$
$$+\sum_p A_p u_p(t)X_p(x), \tag{62}$$

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \ldots + \sum_{k=k_{m-1}+1}^{k_m-1} + \sum_{k=k_m+1}^{+\infty}\right)f_k X_k(x), \tag{63}$$

где в сумме (62) индекс p принимает значения $k_1, k_2 \ldots, k_m$, A_p — произвольные постоянные,

$$u_p(t) = \varphi_p \cos\lambda_p t + \frac{\psi_p}{\lambda_p}\sin\lambda_p t;$$

если в конечных суммах в правых частях (62) и (63) верхний предел меньше нижнего, то их следует считать нулями.

Следовательно, нами доказана справедливость следующего утверждения.

Теорема 4. *Если число $\widetilde{t}_0$ удовлетворяет условиям леммы 2, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\widetilde{\varphi}(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4, то существует единственное решение задачи (2) – (6), (8) и оно определяется в виде суммы рядов (39) и (40).*

Если $\widetilde{t}_0$ является рациональным числом, функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $\widetilde{\varphi}(x)$ удовлетворяют условиям леммы 4. Тогда, если $\delta(k) \neq 0$ при $k = \overline{1, k_0}$, то существует единственное решение задачи (2) – (4), (8) и это решение определяется рядами (39) и (40); если $\delta(k) = 0$ при некоторых $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leq k_0$, то задача (2) – (6), (8) разрешима только тогда, когда выполнены условия (61) и решение в этом случае определяется в виде сумм рядов (62) и (63).

3.2. Случай, когда $g(t) \not\equiv 1$

Рассуждая аналогично п. 3.1 введем функции (24) и для них получим уравнение

$$u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = f_k g(t). \tag{64}$$

Общее решение уравнения (64) определяется по формуле

$$u_k(t) = a_k \cos\lambda_k t + b_k \sin\lambda_k t + \frac{f_k g_k(t)}{\lambda_k}, \tag{65}$$

где

$$g_k(t) = \int_0^t g(s)\sin[\lambda_k(t-s)]ds,\ k \in \mathbb{N}. \tag{66}$$

Удовлетворив функцию (65) граничным условиям (5), (6) и (8), найдем неизвестные постоянные a_k, b_k и f_k:

$$a_k = \varphi_k,\ b_k = \frac{\psi_k}{\lambda_k}, \tag{67}$$

$$f_k = \frac{\lambda_k}{g_k(t_0)}\left(\widetilde{\varphi}_k - \varphi_k\cos\lambda_k t_0 - \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t_0\right) \tag{68}$$

при условии, когда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$g_k(t_0) \neq 0. \tag{69}$$

Подставляя (67) и (68) в (64) построим в явном виде функции

$$
\begin{gathered}
u_k(t) = \varphi_k \cos\lambda_k t + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t + \\
+\left(\widetilde{\varphi}_k - \varphi_k\cos\lambda_k t_0 - \frac{\psi_k}{\lambda_k}\sin\lambda_k t_0\right)\frac{g_k(t)}{g_k(t_0)} = \\
= \varphi_k\left(\cos\lambda_k t - \frac{g_k(t)\cos\lambda_k t_0}{g_k(t_0)}\right) + \frac{\psi_k}{\lambda_k}\left(\sin\lambda_k t - \frac{g_k(t)\sin\lambda_k t_0}{g_k(t_0)}\right) + \\
+\widetilde{\varphi}_k\frac{g_k(t)}{g_k(t_0)}.
\end{gathered}
\tag{70}
$$

Аналогично пункту выше исходя из равенств (70) и (68) на основании полноты системы $X_k(x)$ доказывается единственность решения обратной задачи 2 при произвольной непрерывной функции $g(t)$ и выполнении условий (69) при всех $k \in \mathbb{N}_0$.

Если при некоторых t_0 и $k = p$ выражение $g_p(t_0) = 0$, то однородная задача 2 (где $\varphi(x) = \psi(x) = \widetilde{\varphi}(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$
u(x,t) = f_p g_p(t)\sin\mu_p x,\ \ f(x) = f_p\sin\mu_p x,
$$

здесь $f_p \neq 0$ — произвольная постоянная.

В силу работы [26] выражение $g_k(t_0)$ имеет счетное множество нулей, т.е. возникает проблема малых знаменателей, а значит, необходимо установить оценки величин $g_k(t_0)$, гарантирующие их отделённость от нуля. Пусть функция $g(t)$ монотонна на $[0, t_0]$. Тогда на основании второй теоремы о среднем для некоторой точки $\xi \in [0, t_0]$ справедливо равенство

$$
\begin{gathered}
g_k(t_0) = g(0)\int_0^{\xi}\sin[\lambda_k(t_0 - s)]ds + g(t_0)\int_{\xi}^{t_0}\sin[\lambda_k(t_0 - s)]ds = \\
= \frac{g(0)}{\lambda_k}(\cos[\lambda_k(t_0-\xi)] - \cos\lambda_k t_0) + \frac{g(t_0)}{\lambda_k}(1 - \cos[\lambda_k(t_0-\xi)]) = \\
= \frac{\cos[\lambda_k(t_0-\xi)]}{\lambda_k}(g(0) - g(t_0)) + \frac{g(t_0)}{\lambda_k} - \frac{g(0)}{\lambda_k}\cos\lambda_k t_0,\ \ 0 < \xi < t_0.
\end{gathered}
\tag{71}
$$

Пусть монотонная на отрезке $[0, t_0]$ функция $g(t)$ является возрастающей и неотрицательной. Тогда

$$
g(t_0) = g(0) + \beta,\ \ \beta \geqslant 0,
$$

и вследствие равенства (71) получаем, что

$$
\begin{gathered}
g_k(t_0) = \frac{g(0)}{\lambda_k}(1 - \cos\lambda_k t_0) + \frac{\beta}{\lambda_k}(1 - \cos[\lambda_k(t_0-\xi)]) \geqslant \\
\geqslant \frac{g(0)}{\lambda_k}(1 - \cos\lambda_k t_0) = \frac{2g(0)}{\lambda_k}\sin^2\frac{\lambda_k t_0}{2} = \frac{2g(0)}{\lambda_k}\sin^2\pi k\widetilde{\lambda}_k\widetilde{t}_0.
\end{gathered}
\tag{72}
$$

Отсюда при $g(t) = const \neq 0$ равенство $g_k(t_0) = 0$ возможно только тогда, когда $\pi k\widetilde{\lambda}_k\widetilde{t}_0 = \pi n$, где $n \in \mathbb{N}$, т.е., когда $d = \widetilde{\lambda}_k\widetilde{t}_0 = n/k,\ n \in \mathbb{N}$. В частности при рациональных значениях d единственность решения обратной задачи 3 нарушается.

Следовательно, нами установлен критерий единственности решения задачи .

Теорема 5. *Если существует решение задачи* 3, *то оно единственно тогда и только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнены условия* (69).

Лемма 5. *Если* $g(t)$ *монотонная возрастающая и положительная на* $[0,T]$, *и выполнены условия леммы* 1, *то существуют постоянная* $C_{10} > 0$, *такая, что при всех* $k > k_0$

$$|g_k(t_0)| \geqslant \frac{C_{10}}{k^3} > 0. \tag{73}$$

Доказательство следует из неравенства (72) и оценки (42).

Лемма 6. *Если* $g(t)$ *монотонная возрастающая и неотрицательная на* $[0,T]$, *и выполнены условия леммы* 2, *то существуют постоянная* $C_{11} > 0$, *такая, что при всех* $k \in N$

$$|g_k(t_0)| > \frac{C_{11}}{k^3}. \tag{74}$$

Доказательство следует из неравенства (72) и оценки (57).

Лемма 7. *Пусть выполнены условия леммы* 5, *тогда при всех* $k \geqslant k_0$ *и при любом* $t \in [0,T]$ *справедливы оценки:*

$$|u_k(t)| \leqslant C_{12}\left(k^3|\varphi_k| + k^2|\psi_k| + k^3|\widetilde{\varphi}_k|\right),$$
$$|u_k'(t)| \leqslant C_{13}\left(k^4|\varphi_k| + k^3|\psi_k| + k^4|\widetilde{\varphi}_k|\right),$$
$$|u_k''(t)| \leqslant C_{14}\left(k^5|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^5|\widetilde{\varphi}_k|\right),$$
$$|f_k(t)| \leqslant C_{15}\left(k^5|\varphi_k| + k^4|\psi_k| + k^5|\widetilde{\varphi}_k|\right).$$

Доказательство следует непосредственно из формул (70), (68) и оценок (73) и (74).

Лемма 8. *Если* $\varphi(x) \in C^6[0,l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(4)}(l) = 0$, $\psi(x) \in C^5[0,l]$, $\psi(0) = \psi(l) = \psi''(0) = \psi''(l) = \psi^{(4)}(0) = \psi^{(4)}(l) = 0$, $\widetilde{\varphi}(x) \in C^6[0,l]$, $\widetilde{\varphi}(0) = \widetilde{\varphi}(l) = \widetilde{\varphi}''(0) = \widetilde{\varphi}''(l) = \widetilde{\varphi}^{(4)}(0) = \widetilde{\varphi}^{(4)}(l) = 0$, *то справедливы представления*

$$\varphi_k = -\frac{\varphi_k^{(6)}}{\mu_k^6},\ \psi_k = \frac{\psi_k^{(5)}}{\mu_k^5},\ \widetilde{\varphi}_k = -\frac{\widetilde{\varphi}_k^{(6)}}{\mu_k^6},$$

где $\psi_k^{(5)}$, $\widetilde{\varphi}_k^{(6)}$ *и* $\varphi_k^{(6)}$ — *коэффициенты разложений функций* $\psi^{(5)}(x)$, $\widetilde{\varphi}^{(6)}(x)$, $\varphi^{(6)}(x)$ *в ряд по системам функций* $\left\{\frac{1}{\sqrt{l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\mu_k x\right\}$ *и* (12), *при этом справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k^{(6)}|^2 \leqslant ||\varphi^{(6)}(x)||^2_{L_2[0,l]},\ \sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k^{(5)}|^2 \leqslant ||\psi^{(5)}(x)||^2_{L_2[0,l]},\\ \sum_{k=1}^{\infty}|\widetilde{\varphi}_k^{(6)}|^2 \leqslant ||\widetilde{\varphi}^{(6)}(x)||^2_{L_2[0,l]}.\end{gathered} \tag{75}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4.

На основании лемм 7 и 8 ряды (39), (40), (59) мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C_{16} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(|\varphi_k^{(6)}| + |\psi_k^{(5)}| + |\widetilde{\varphi}_k^{(6)}| \right). \tag{76}$$

В силу этого ряды (39), (40), (59) сходятся равномерно на $\overline{Q}$. Тогда функции $u(x,t)$ и $f(x)$, определенные соответственно рядами (39) и (40), удовлетворяют условиям (2) и (3).

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Если выполнены условия лемм* 8 *и* 6*, то существует единственное решение задачи* (2) – (6), (8) *и оно определяется в виде суммы рядов* (39) *и* (40)*, где коэффициенты определяются по формулам* (70), (68).

Пусть выполнены условия лемм 8 *и* 5*. Тогда, если* $g_k(t_0) \neq 0$ *при* $k = \overline{1, k_0}$*, то существует единственное решение задачи* (2) – (6), (8) *и это решение определяется рядами* (39) *и* (40)*; если* $g_k(t_0) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots, k_m \leq k_0$*, то задача* (2) – (6), (8) *разрешима только тогда, когда выполнены условия* (61) *и решение в этом случае определяется в виде сумм рядов* (62) *и* (63)*, где коэффициенты определяются по формулам* (70), (68).

Список литературы

[1] *Сабитов К.Б., Зайнуллов А.Р.* Обратные задачи по определению начальных условий в смешанной задаче для телеграфного уравнения. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. 2017. Том 141. С. 111 – 133.

[2] *Sabitov K.B., Zaynullov A.R.* Inverse problems for initial conditions of the mixed problem for the telegraph equation. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 241, No. 5, 2019, p. 622 – 645.

[3] *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд–во МГУ, 1994. — 208 с.

[4] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. — 457 с.

[5] *Сабитов К.Б., Зайнуллов А.Р.* Обратные задачи для уравнения теплопроводности по отысканию начального условия и правой части // Учен. зап. Казан. ун-та. Физ.–мат. науки. 2019. Т. 161. Кн. 2. С. 271 – 291.

[6] Прилепко А.И., Соловьев В.В. *Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I; II*, Дифференц. уравнения. **23** (10), 1791 – 1799 ; **23** (11), 1971 – 1980 (1987).

[7] Соловьев В.В. *Определение источника и коэффициентов в параболическом уравнении в многомерном случае*, Дифференц. уравнения. **31** (6), 1060 – 1069 (1995).

[8] Костин А.Б. *Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условию нелокального наблюдения*, Математический сборник. **204** (10), 3 – 46 (2013).

[9] Орловский Д.Г. *К задаче определения параметра эволюционного уравнения*, Дифференц. уравнения. **26** (9), 1614–1621 (1990).

[10] Тихонов И.В., Эйдельман Ю.С. *Критерий единственности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения с нестационарным неоднородным слагаемым*, Матем. заметки. **77** (2), 273–290 (2005).

[11] *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984. — 264 с.

[12] *Романов В.Г.* Одномерная обратная задача для телеграфного уравнения // Диффер. уравнения. 1968. Том 4. № 1. С. 87 – 101.

[13] *Романов В.Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, СО, 1972. — 164 с.

[14] *Кожанов А.И., Сафиуллова Р.Р.* Определение параметров в телеграфном уравнении // Уфимский матем. журнал. 2017. Т. 9. № 1. С. 63 – 74.

[15] *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения параболо–гиперболического типа в прямоугольной области // ДАН. 2009. Т. 429. № 4. С. 451 – 454.

[16] *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо–гиперболического типа // Математические заметки. 2010. Т. 87. № 6. С. 907 – 918.

[17] *Сабитов К.Б., Сафин Э.М.* Обратная задача для уравнения смешанного параболо–гиперболического типа в прямоугольной области // Известия вузов. Математика. 2010. № 4. С. 55 – 62.

[18] Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области*, Докл. РАН. **413** (1), 23 – 26 (2007).

[19] *Арнольд В.И.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. 1963. Том 18. № 6(114). С. 91 – 192.

[20] *Арнольд В.И.* Малые знаменатели // Известия РАН. Серия математическая. 1961. Вып. 25. С. 21 – 86.

[21] *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: МГУ, 2011. 456 с.

[22] *Сабитов К.Б.* Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 352 с.

[23] *Сабитов К.Б.* Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо–гиперболического типа. М.: Наука, 2016. — 272 с.

[24] *Галочкин А.И., Нестеренко Ю.В., Шидловский А.Б.* Введение в теорию чисел. М.: МГУ, 1995. 168 с.

[25] *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. М.: Наука, 1978. 112 с.

[26] *Сабитов К.Б.* Обратные задачи для уравнения колебания балки по определению правой части и начальных условий // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 6. С. 773 – 785.

Зайнуллов Артур Рашитович – аспирант кафедры математического анализа, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

Республика Башкортостан, г. Стерлитамак, у. Проспект Ленина, 49

E-mail: *arturzayn@mail.ru*

8-909-353-11-69

Inverse problems of finding the factors of the right-hand side of the telegraph equation

Annotation. For the telegraph equation, the inverse problems of finding factors of the right side. The inverse problem of finding the factor of the right-hand side, time-dependent, is equivalently reduced to the Volterra integral equation of the second kind. From which a theorem was obtained on the unique solvability of this inverse tasks. Solution of the inverse problem of determining the factor of the right-hand side depending on on the spatial coordinate, built in the form of a Fourier series according to the system of proper functions of the corresponding one-dimensional spectral problem; established a criterion for a single existence theorems for the solution of the problem posed.

Key words: telegraph equation, inverse problems, spectral method, integral equation, uniqueness, existence, small denominators.