

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)

УДК 517.946

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

MSC 35L80 35L25

НАЧАЛЬНО–КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ
ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.И. КОЖАНОВ

ABSTRACT. The aim of the paper is to study solvability of the main initial-boundary value problems for differential equations

$$u_{tt} - \varphi(t)Au + c(x, t)u = f(x, t)$$

in the Sobolev spaces. Here A is an elliptic operator acting in the spatial variables $x_1, \dots, x_n$ and $\varphi(t)$ is a non-negative function on the segment $[0, T]$. Existence and uniqueness theorems of regular solutions are proven. Some generalizations of the results are also described.

Keywords: hyperbolic equations, degeneration, initial - boundary value problems, regular solutions, existence.

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости в классах регулярных решений начально–краевых задач для линейных вырождающихся гиперболических уравнений (регулярными решениями называются решения, имеющие все необходимые в задаче обобщенные по Соболеву производные).

Вырождающиеся гиперболические уравнения изучались многими авторами.

Значительное число работ — см., например, работы [1]–[11], монографии [12], [13] и имеющуюся в них библиографию — посвящено исследованию разрешимости краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений в характеристических и близких к ним областях. Заметим, что зачастую изучение

KOZHANOV, A.I., INITIAL–BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DEGENERATE HYPERBOLIC EQUATIONS .

© 2015 Кожанов А.И.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН (проект № 0314-2019-0010).

Поступила июня 2020 г., опубликована 2020 г.

тех или иных задач для вырождающихся гиперболических уравнений объясняется их важностью для теории уравнений смешанного типа — см. монографии [14]–[19].

Теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений в цилиндрических областях также посвящено много работ.

Отметим прежде всего работы [20]–[23], в которых изучалась разрешимость краевых задач для некоторых специальных классов гиперболических уравнений с вырождением; используемая в этих работах техника основана на идеях, связанных с разделением переменных.

Более общие случаи вырождающихся гиперболических уравнений (а также уравнений смешанного типа) в цилиндрических областях изучались в работах [24]–[29]. Более точно, в этих работах изучались дифференциальные уравнения с вырождением келдышевского типа ([30]; см. также [12]), и при этом само вырождение могло происходить как в произвольных точках временного промежутка, так и на множествах ненулевой меры. Для рассматриваемых уравнений ставились краевые задачи как обычные, так и видоизмененные — с освобождением начальных многообразий от задания производной по времени, и доказывались теоремы существования и единственности регулярных решений.

В настоящей работе будут изучаться вырождающиеся гиперболические уравнения, характер вырождения в которых соответствует вырождению в уравнении Трикоми (см. [12]), и при этом само вырождение может происходить в произвольных точках временного промежутка. Для указанных уравнений будут доказаны теоремы существования регулярных решений естественных (для невырождающихся гиперболических уравнений) начально–краевых задач. Ранее подобные результаты известны не были.

Всюду в работе будут использоваться обычные пространства Лебега L_p , Соболева W_p^l , а также пространства $L_p(0, T; X)$. Определения и свойства этих пространств можно найти в монографиях [31], [32].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно–дифференцируемой) границей Γ , Q есть цилиндр $\Omega \times (0, T)$ переменных $x_1, \dots, x_n, t$ конечной высоты T . Далее, пусть $\varphi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, T]$, L есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$Lv = v_{tt} - \varphi(t)\Delta v + c(x, t)v$$

(Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \dots, x_n$).

Краевая задача: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$Lu = f(x, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega. \tag{3}$$

Данная краевая задача представляет собой обычную первую начально–краевую задачу для нестационарных дифференциальных уравнений второго порядка по

временной переменной. Именно для этой задачи будут доказаны теоремы существования регулярных решений. Для второй и третьей начально-краевых задач (в естественных постановках) нетрудно будет получить аналогичные результаты об их разрешимости в классах регулярных решений; ввиду очевидности обсуждать эти задачи мы не будем.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Доказательство основной теоремы будет проведено в следующем пункте с помощью трех предварительных результатов.

Утверждение 1. Пусть выполняются условия

I. $\varphi(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0, T]$, $\varphi(0) = 0$;

II. $c(x, t) \in C^1(\bar{Q})$, $\exists \delta_ \in (0, T]$: $c(x, t) \geq 0$, $c_t(x, t) \leq 0$ при $x \in \bar{\Omega}$, $0 \leq t \leq \delta_*$;*

III. $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)f(x, t) \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(\Omega))$.

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x, t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации.

Для положительного числа ε обозначим через $\varphi_\varepsilon(t)$ функцию $\varphi(t) + \varepsilon$, через L_ε — оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$L_\varepsilon v = v_{tt} - \varphi_\varepsilon(t)\Delta v + c(x, t)v - \varepsilon\Delta v_t.$$

Краевая задача с условиями (2) и (3) для уравнения

$$L_\varepsilon u = f(x, t)$$

имеет решение $u^\varepsilon(x, t)$ такое, что $u^\varepsilon(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_t^\varepsilon(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}^\varepsilon(x, t) \in L_2(Q)$ — см. [33]–[35]. Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x, t)\}_{\varepsilon > 0}$ имеют место равномерные по ε априорные оценки.

Индекс " ε " при получении оценок опустим.

Вследствие условия I существует положительное число t_* такое, что $t_* \leq \delta_*$, $\varphi'(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_*]$.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} L_\varepsilon u u_\tau dx d\tau = \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} f u_\tau dx d\tau$$

вначале при $t \in [0, t_*]$. Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\varphi_\varepsilon(t)} \int_\Omega u_t^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \frac{\varphi'}{\varphi_\varepsilon^2} u_\tau^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega \frac{c\varphi' - c_\tau\varphi_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} u^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{c(x, t)}{\varphi_\varepsilon(t)} u^2(x, t) dx + \\ & + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} u_{x_i\tau}^2 dx d\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{\varphi_{\varepsilon}(\tau)} f u_{\tau} dx d\tau.$$

Условия I и II означают, что все слагаемые левой части этого равенства неотрицательны. Применяя в правой части неравенство Юнга, учитывая условие III и далее используя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (1_{ε}) , (2), (3) выполняется оценка

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi_{\varepsilon}(t)} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, t) dx + \\ & + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{\varphi_{\varepsilon}(\tau)} u_{x_i \tau}^2 dx d\tau \leq N_1 \end{aligned} \quad (4)$$

с постоянной N_1 , определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$ и $f(x, t)$, а также числом T .

Рассмотрим равенство

$$- \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{\varphi_{\varepsilon}(\tau)} L_{\varepsilon} u \Delta u_{\tau} dx d\tau = - \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{\varphi_{\varepsilon}(\tau)} f \Delta u_{\tau} dx d\tau$$

(вновь при $t \in [0, t_*)$). После интегрирования по частям, использования условий I–III, применения неравенства Юнга и леммы Гронуолла получим, что при $t \in [0, t_*]$ для решений $u(x, t)$ краевой задачи (1_{ε}) , (2), (3) выполняется вторая априорная оценка

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi_{\varepsilon}(t)} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx + \int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx + \\ & + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau \leq N_2, \end{aligned} \quad (5)$$

постоянная N_2 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$, а также числом T .

Пусть теперь $t \in [t_*, T]$. Анализируя последовательно равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} L_{\varepsilon} u u_{\tau} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f u_{\tau} dx d\tau, \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} L_{\varepsilon} u \Delta u_{\tau} dx d\tau = - \int_0^t \int_{\Omega} f \Delta u_{\tau} dx d\tau, \\ & \int_0^t \int_{\Omega} L_{\varepsilon} u u_{\tau \tau} dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f u_{\tau \tau} dx d\tau \end{aligned}$$

— интегрируя по частям, используя положительность функции $\varphi(t)$ на отрезке $[t_*, T]$, учитывая оценки (4) и (5) и применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи (1_ε) , (2), (3) справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, t) dx + \int_{\Omega} [\Delta u(x, t)]^2 dx + \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} u_{\tau\tau}^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{\tau})^2 dx d\tau \leq N_3, \end{aligned} \quad (6)$$

постоянная N_3 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$, а также числом T .

Оценки (6) уже вполне достаточно для предельного перехода в уравнении (1_ε) .

Пусть $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ есть последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, $u_m(x, t)$ есть решение краевой задачи (1_{ε_m}) , (2), (3). Из оценки (6) и из свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существуют последовательности $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ натуральных чисел, $\{u_{m_k}(x, t)\}_{k=1}^\infty$ решений краевых задач $(1_{\varepsilon_{m_k}})$, (2), (3), а также функция $u(x, t)$ такие, что при $k \rightarrow \infty$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} u_{m_k}(x, t) & \rightarrow u(x, t) \text{ слабо в } W_2^2(Q), \\ \varepsilon_{m_k} \Delta u_{m_k}(x, t) & \rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2(Q). \end{aligned}$$

Из этих сходимостей очевидным образом вытекает, что предельная функция $u(x, t)$ будет решением краевой задачи (1)–(3). Поскольку оценка (6) с $\varepsilon = 0$ для предельной функции $u(x, t)$ сохранится, то функция $u(x, t)$ будет принадлежать требуемому классу.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. Пусть выполняются условия

IV. $\varphi(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi(t) > 0$ при $t \in [0, T)$, $\varphi(T) = 0$;

V. $c(x, t) \in C^2(\bar{Q})$, $\exists \delta^* \in [0, T)$: $c(x, t) \geq 0$, $c_t(x, t) \leq 0$ при $x \in \bar{\Omega}$, $\delta^* \leq t \leq T$;

VI. $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$.

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_t(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x, t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации.

Пусть ε есть положительное число, $\tilde{L}_\varepsilon$ есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x, t)$ определяется равенством

$$\tilde{L}_\varepsilon v = Lv + \varepsilon \Delta^2 v_t.$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$\tilde{L}_\varepsilon u = f(x, t) \quad (\tilde{1}_\varepsilon)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$\Delta u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0. \quad (7)$$

При фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x, t)$ пространству $L_2(Q)$ эта задача имеет решение $u^\varepsilon(x, t)$ такое, что $u^\varepsilon(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^4(\Omega))$, $u_t^\varepsilon(x, t) \in L_2(0, T; W_2^4(\Omega))$, $u_{tt}^\varepsilon(x, t) \in L_2(Q)$ — см. [33]

(нетрудно доказать существование указанного решения и непосредственно — с помощью классического метода Галеркина с выбором специального базиса [36]). Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x, t)\}_{\varepsilon > 0}$ при выполнении условий IV–VI имеют место равномерные по ε априорные оценки.

Индекс " ε " при получении оценок вновь опустим.

Вследствие условия IV существует положительное число t^* такое, что $\delta^* \leq t^* \leq T$, $\varphi'(t) \leq 0$ при $t \in [t^*, T]$.

Пусть $t \in [0, t^*]$. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_{\Omega} L_\varepsilon u u_\tau dx d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f u_\tau dx d\tau. \quad (8)$$

Интегрируя по частям, учитывая, что $t \leq t^*$ выполняется неравенство $\varphi(t) \geq k_0 > 0$, а также применяя лемму Гронуолла, получим, что следствием равенства (8) будет оценка

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, t) dx + \\ + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_\tau)^2 dx d\tau \leq N_4 \end{aligned}$$

с постоянной N_4 , определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$ и $f(x, t)$, числами t^* и T .

Рассмотрим теперь равенство (8) в случае $t \in [t^*, T]$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} L_\varepsilon u u_\tau dx d\tau &= \int_0^{t^*} \int_{\Omega} L_\varepsilon u u_\tau dx d\tau + \int_{t^*}^t \int_{\Omega} L_\varepsilon u u_\tau dx d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{t^*} \int_{\Omega} \varphi' u_{x_i}^2 dx d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \int_{\Omega} c_\tau u^2 dx d\tau + \varepsilon \int_0^{t^*} \int_{\Omega} (\Delta u_\tau)^2 dx d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t^*}^t \int_{\Omega} \varphi' u_{x_i}^2 dx d\tau + \\ &\quad + \frac{\varphi(t)}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} c(x, t) u^2(x, t) dx - \frac{1}{2} \int_{t^*}^t \int_{\Omega} c_\tau u^2 dx d\tau + \\ &\quad + \varepsilon \int_{t^*}^t \int_{\Omega} (\Delta u_\tau)^2 dx d\tau = \int_0^{t^*} \int_{\Omega} f u_\tau dx d\tau + \int_{t^*}^t \int_{\Omega} f u_\tau dx d\tau. \end{aligned}$$

В последнем равенстве первые три слагаемых левой части и первое слагаемое правой в сумме дают равномерно по ε ограниченную величину. Далее, все остальные слагаемые левой части неотрицательны. Используя неравенство

Юнга и далее применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи $(\tilde{1}_\varepsilon)$, (2), (3), (7) при $t \in [t^*, T]$ выполняется оценка

$$\int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \varepsilon \int_{t^*}^t \int_{\Omega} (\Delta u_\tau)^2 dx d\tau \leq N_5,$$

постоянная N_5 в которой определяется лишь функциями $\varphi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$, а также числами t^* и T .

Поскольку t^* есть фиксированное число, то получаем, что для функции $u(x, t)$ выполняется неравенство

$$\int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_\tau)^2 dx d\tau \leq N_6, \quad (9)$$

в котором $t \in [0, T]$, постоянная N_6 определяется лишь функциями $\varphi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$, а также числами N_4 и T .

На следующем шаге рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} - \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{L}_\varepsilon u \Delta u_\tau dx d\tau &= - \int_0^t \int_{\Omega} f \Delta u_\tau dx d\tau, \\ \int_0^t \int_{\Omega} \tilde{L}_\varepsilon u \Delta^2 u_\tau dx d\tau &= \int_0^t \int_{\Omega} f \Delta^2 u_\tau dx d\tau, \end{aligned}$$

вновь каждое из них вначале при $t \in [0, t^*]$, затем — при $t \in [t^*, T]$. Интегрируя в этих равенствах как слева, так и справа, повторяя предыдущие рассуждения и используя неравенство (9), получим, что для решений $u(x, t)$ краевой задачи $(\tilde{1}_\varepsilon)$, (2), (3), (7) при выполнении условий IV–VI будут справедливы оценки

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_{x_i t}^2(x, t) dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta u_{x_i})^2 dx d\tau \leq N_7, \quad (10)$$

$$\int_{\Omega} [\Delta u_t(x, t)]^2 dx + \varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (\Delta^2 u_\tau)^2 dx d\tau \leq N_8, \quad (11)$$

в которых $t \in [0, T]$, постоянные N_7 и N_8 определяются функциями $\varphi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$, а также числом T .

Последняя априорная оценка

$$\int_0^t \int_{\Omega} [u_{\tau\tau}^2 + (\Delta u)^2] dx d\tau \leq N_9 \quad (12)$$

с постоянной N_9 , определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$, $c(x, t)$ и $f(x, t)$, а также числом T , очевидным образом вытекает из предыдущих.

Оценок (9)–(12) вполне достаточно для организации процедуры предельного перехода. Выбирая последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$, сходящуюся к нулю, и далее используя свойство рефлексивности гильбертова пространства, получим, что

существует предельная функция $u(x, t)$, являющаяся искомым решением краевой задачи (1)–(3).

Утверждение доказано.

Утверждение 3. Пусть выполняются условия

VII. $\varphi(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi(t) > 0$ при $t \in (0, T]$, $\varphi(0) = \varphi(T) = 0$;

VIII. $c(x, t) \in C^2(\bar{Q})$, $\exists \delta_*$, $\exists \delta^*$: $0 < \delta_* \leq \delta^* < T$: $c(x, t) \geq 0$, $c_t(x, t) \leq 0$ при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0, \delta_*] \cup [\delta^*, T]$;

IX. $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)f(x, t) \in L_2(0, \delta_*; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$.

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x, t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Пусть t_* и t^* есть такие числа, что выполняется $0 < t_* \leq \delta_*$, $\varphi'(t) \geq 0$ при $\delta^* \leq t^* < T$, $\varphi'(t) \geq 0$ при $t \in [t^*, T]$. Для положительного числа ε рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения

$$u_{tt} - \varphi_\varepsilon(t)\Delta u + c(x, t)u + \varepsilon\Delta^2 u_t = f(x, t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3) и (7). Эта задача имеет решение $u^\varepsilon(x, t)$ такое, что $u^\varepsilon(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^4(\Omega))$, $u_t^\varepsilon(x, t) \in L_2(0, T; W_2^4(\Omega))$, $u_{tt}^\varepsilon(x, t) \in L_2(Q)$. Для функций $u^\varepsilon(x, t)$ имеют место равномерные по ε априорные оценки (9)–(12) — при $t \in [0, t_*]$ справедливость их устанавливается с помощью рассуждений Утверждения 1, при $t \in [t_*, T]$ — с помощью рассуждений Утверждения 2.

Из оценок (9)–(12) с помощью стандартных рассуждений о выборе сходящейся последовательности и вытекает существование искомого решения.

Утверждение доказано.

4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Обозначим через E_0 множество, состоящее из конечного набора чисел $t_0, \dots, t_m$ таких, что $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m \leq T$. Далее, пусть δ_0 есть фиксированное положительное число, $E(\delta_0)$ есть множество, образованное отрезками $[t_k - \delta_0, t_k + \delta_0]$, если $t_k \in (0, T)$, а также отрезком $[0, \delta_0]$, если $t_0 = 0$, и отрезком $[T - \delta_0, T]$, если $t_m = T$. Будем считать, что число δ_0 настолько мало, что выполняется вложение $E(\delta_0) \subset [0, T]$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия

(а) $\varphi(t) \in C^1([0, T])$, $\varphi(t) > 0$ при $t \in [0, T] \setminus E_0$, $\varphi(t) = 0$ при $t \in E_0$;

(б) $c(x, t) \in C^2(\bar{Q})$, $c(x, t) \geq 0$, $c_t(x, t) \leq 0$ при $x \in \bar{\Omega}$, $t \in E(\delta_0)$;

(в) $f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)f(x, t) \in L_2(t_k, t_k + \delta_0; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, если $t_k \in [0, T]$, $k = 0, \dots, m$.

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x, t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу $(\tilde{1}_\varepsilon)$, (2), (3), (7). Если $t_0 = 0$, то, повторяя локальные рассуждения утверждения 1, затем — утверждения 2, и далее, если необходимо, снова утверждения 1, и т.д., получим, что для решений $u^\varepsilon(x, t)$ этой задачи выполняются оценки (9)–(12). Если $t_0 > 0$, то вначале пользуемся рассуждениями утверждения 2, далее — утверждения 1, и т.д.,

вновь получим, что для решений $u^\varepsilon(x, t)$ краевой задачи $(\widetilde{1}_\varepsilon)$, (2), (3), (7) имеют место оценки (9)–(12). Из оценок (9)–(12) и вытекает возможность выбора последовательности $\{u_m(x, t)\}_{m=1}^\infty$, сходящейся к искомому решению краевой задачи (1)–(3).

Теорема доказана. $\square$

5. КОММЕНТАРИИ И ДОПОЛНЕНИЯ

1. Для второй и третьей начально–краевых задач для уравнения (1) нетрудно получить аналогичные вышеприведенным результаты о существовании регулярных решений.

2. Также нетрудно получить результаты о существовании регулярных решений первой, второй или третьей краевых задач для более общих, чем (1), вырождающихся гиперболических уравнений — например, для уравнений с заменой оператора Лапласа на эллиптический оператор A вида

$$A = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x) u_{x_j}),$$

для уравнений с младшими членами.

3. В целом вполне аналогично можно изучить разрешимость в классах регулярных решений начально–краевых задач для вырождающихся уравнений с заменой оператора Лапласа на произвольный эллиптический оператор порядка $2m$. Приведем соответствующую теорему для первой начально–краевой задачи и для оператора $(-1)^m \Delta^m u$.

Теорема 2. Пусть для функции $\varphi(t)$ выполняется условие (а). Кроме того, пусть выполняются условия

(г) $c(x, t) \in C^{2m}(\overline{Q})$, $c(x, t) \geq 0$, $c_t(x, t) \leq 0$ при $(x, t) \in \overline{Q}$;

(д) $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t) f(x, t) \in L_2(0, T; W_2^{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^{2m-1}(\Omega))$.

Тогда краевая задача

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-1)^m \varphi(t) \Delta^m u + c(x, t) u &= f(x, t), \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) &= 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial \nu^k} \Big|_{\Gamma \times (0, T)} &= 0, \quad k = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

имеет решение $u(x, t)$ такое, что $u(x, t) \in L_\infty(0, T; W_2^{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^{2m-1}(\Omega))$, $u_{tt}(x, t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на использовании регуляризованного уравнения

$$u_{tt} + (-1)^m \varphi_\varepsilon(t) \Delta^m u + c(x, t) u + \varepsilon \Delta^{2m} u_t = f(x, t)$$

с соответствующим дополнением краевых условий и использовании рассуждений, проведенных при доказательстве утверждений 1–3.

Очевидно, что вместо приведенных в данной теореме краевых условий можно задавать и другие условия — например, условия

$$u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = \Delta u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = \dots = \Delta^{m-1} u(x, t)|_{\Gamma \times (0, T)} = 0.$$

$\square$

4. Задание в изученных краевых задачах тождественно нулевым начальным данным не принципиально.

REFERENCES

- [1] A.V. Bitsadze, A.M. Nakhushev, *K Teorii Vyrozhdayushehsya Giperbolicheskikh Uravnenii v Mnogomernykh Oblastyakh*, Doklady AN SSSR, **204**:6 (1972), 1289–1291.
- [2] V.N. Vragov, *O Zadachakh Gursa i Darbu dlya Odnogo Klassa Giperbolicheskikh Uravnenii*, Diff. Uravn., **8**:1 (1972), 7–16.
- [3] V.N. Vragov, *O Nekotorykh Kraevykh Zadachakh dlya Giperbolo–Parabolicheskikh Uravnenii*, Dinamika Splosh. Sredy, Institut Gidrodinamiki, Novosibirsk, **17** (1974), 5–11.
- [4] N.I. Popivanov, *Mnogomernyi Analog Zadachi Darbu dlya Vyrozhdayushchikhsya Giperbolicheskikh Uravnenii*, Diff. Uravn., **14**:1 (1978), 80–93.
- [5] A.M. Nakhushev, *Kriterii Edinstvennosti Resheniya Zadachi Darbu dlya Odnogo Vyrozhdayushegosya Giperbolicheskogo Uravneniya Vlagoperenosa*, Diff. Uravn., **16**:9 (1980), 1643–1649.
- [6] S.K. Kumykova, *Kraevaya Zadacha dlya Odnogo Vyrozhdayushegosya Giperbolicheskogo Uravneniya v Kharakterisicheskoy Dvugol'nike*, Diff. Uravn., **17**:1 (1981), 81–90.
- [7] T.Sh. Kalmenov, *O Regul'yarnykh Kraevykh Zadachakh dlya Uravnenii Giperbolicheskogo i Smeshannogo Tipov*, Avtoref. Dissert. D-ra Fiz.–Mat. Nauk, MGU, Moskva, 1982.
- [8] M.S. Salakhitdinov, M. Mirsaburov, *O Nekotorykh Kraevykh Zadachakh Tipa Zadachi Bitsadze–Samarskogo dlya Uravneniya Giperbolicheskogo Tipa, Vyrozhdayushegosya na Granitse Oblasti*, Neklassich. Zadach. Matem. Fiziki, Tashkent, 1985, 3–25.
- [9] O.A. Repin, *Kraevaya Zadacha Tipa Zadachi Bitsadze–Samarskogo dlya Uravneniya Vlagoperenosa*, Vychisl. i Prikl. Matem., Vysha Shkola, Kiev, 1988, 45–49.
- [10] N.I. Popivanov, M. Shneider, *The Darboux Problems in $\mathbb{R}^3$ for a Class of Degenerate Hyperbolic Equations*, J. Math. Anal. and Appl., **175**:2 (1993).
- [11] A.A. Kilbas, O.A. Repin, M. Saigo, *Solution in Closed Form of Boundary Value Problem for Degenerate Equation of Hyperbolic Type*, Kyungpook Mathematical Journal, **36**:2 (1996), 261–273.
- [12] M.M. Smirnov, *Vyrozhdayushchiesya Ellipticheskie i Giperbolicheskie Uravneniya*, Nauka, Moskva, 1966.
- [13] A.M. Nakhushev, *Zadachi so Smescheniem dlya Uravneniy v Chastnykh Proizvodnykh*, Nauka, Moskva, 2006.
- [14] A.V. Bitsadze, *Uravneniya Smeshannogo Tipa*, Izd. AN SSSR, 1959.
- [15] M.S. Salakhitdinov, *Uravneniya Smeshanno–Sostavnogo Tipa*, FAN, Tashkent, 1974.
- [16] T.D. Dzhuraev, *Kraevye Zadachi dlya Uravneniy Smeshannogo i Smeshanno–Sostavnogo Tipov*, FAN, Tashkent, 1979.
- [17] M.M. Smirnov, *Uravneniya Smeshannogo Tipa*, Vyssh. Shkola, Moskva, 1985.
- [18] O.A. Repin, *Kraevye Zadaci so Smescheniem dlya Uravneniy Giperbolicheskogo i Smeshannogo Tipov*, Izd. Saratov. Un-ta, Samara, 1992.
- [19] K.B. Sabitov, *K Teorii Uravneniy Smeshannogo Tipa*, Fizmatlit, Moskva, 2014.
- [20] Yu. K. Sabitova, *Nelokal'nye Nachal'no–Granichnye Zadachi dlya Vyrozhdayushegosya Giperbolicheskogo Uravneniya*, Izv. Vyzov, **12** (2009), 49–58.
- [21] S.A. Aldashev, *Korrektnost' Zadach Dirikhle i Pankore v Tsylinricheskoy Oblasty dlya Mnogomernogo Uravneniya Chaplygina*, Vladikavkazskiy Matem. Zhurn., **15**:2 (2013), 3–11.
- [22] N.V. Zaitseva, *Keldysh Type Problem for B–Hyperbolic Equation with Integral Boundary Value Condition of the First Kind*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **38**:1 (2017), 162–169.
- [23] K.B. Sabitova, N.V. Zaitseva, *Vtoraya Nachal'no–Kraevaya Zadacha dlya B–Giperbolicheskogo Uravneniya*, Izv. Vuzov. Matem., **10** (2013), 75–86.
- [24] V.N. Vragov, *O Smeshannoy Zadache dlya Odnogo Klassa Giperbolicheskikh Uravneniy*, Dokl. AN SSSR, **224**:2 (1975), 273–276.
- [25] V.N. Vragov, *K Teorii Kraevykh Zadach dlya Uravneniy Smeshannogo Tipa*, Diff. Uravn., **13**:6 (1977), 1098–1105.
- [26] V.N. Vragov, *O Postanovkakh i Razreshimosti Kraevykh Zadach dlya Uravneniy Smeshanno–Sostavnogo Tipa*, Matem. Analiz i Smez. Vopr. Matem., Nauka, Novosibirsk, 1978, 5–13.

- [27] N.A. Lar'kin, *O Linearizovannom Uravnenii Nestatsyonarnoy Gazovoy Dynamiki*, Nekl. Uravn. i Uravn. Smesh. Tipa, Izd. In-ta Matem. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1983, 107–118.
- [28] I.E. Egorov, *Razreshimost' Odnoy Kraevoy Zadachi dlya Uravneniya Smeshannogo Tipa Vysokogo Poryadka*, Diff. Uravn., **23**:9 (1987), 1560–1567.
- [29] I.E. Egorov, V.E. Fedorov, *Neklassicheskie Uravneniya Matematicheskoy Fiziki Vysokogo Poryadka*, Izd. Vychisl. Tsetra SO RAN, Novosibirsk, 1995.
- [30] M.V. Keldysh, *O Nekotorykh Sluchayakh Vyrozhdeniya Uravneniy Ellipticheskogo Tipa na Granitse Oblasti*, Dokl. AN SSSR, **77**:2 (1951), 181–183.
- [31] S.L. Sobolev, *Nekotorye Primeneniya Funktsional'nogo Analiza v Matematicheskoy Fizike*, Nauka, Moskva, 1988.
- [32] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1978.
- [33] S.Ya. Yakubov, *Lineinye Differentsyal'no-Operatornye Uravneniya i ih Prilozheniya*, Elm, Baku, 1985.
- [34] P. Aviles, J. Sandefur, *Nonlinear Second Order Equations with Applications to Partial Differential Equations*, J. of Diff. Equat., **58**:3 (1985), 404–427.
- [35] A.I. Kozhanov, *Composite Type Equations and Inverse Problems*, VSP, Utrecht, 1999.
- [36] J.L. Lions, *Quelques Methods de Resolution des Problems aux Limites non Lineares*, Dunod Cauthier-Villars, Paris, 1969.

ALEKSANDR IVANOVICH KOZHANOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: kozhanov@math.nsc.ru