S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.946

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35L80 35L25

НАЧАЛЬНО–КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.И. КОЖАНОВ

Abstract. The aim of the paper is to study solvability in spaces Sobolev initial–boundary value problems for differential equations

$$u_{tt} - \varphi(t)Au + c(x,t)u = f(x,t)$$

in which A is an elliptic operator acting in the spatial variables $x_1,\dots,x_n$, $\varphi(t)$ is non-negative function on the segment $[0,T]$. Theorems are proved for the problems under study. the existence of regular (having all derivatives generalized by S.L. Sobolev in the equation) of solutions. Some generalizations of the results are also described.

Keywords: hyperbolic equations, degeneration, initial - boundary value problems, regular solutions, existence.

1. Введение

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости в классах регулярных решений начально–краевых задач для линейных вырождающихся гиперболических уравнений (регулярными решениями называются решения, имеющие все необходимые в задаче обобщенные по Соболеву производные).

Вырождающиеся гиперболические уравнения изучались многими авторами.

Значительное число работ — см., например, работы [1]–[11], монографии [12], [13] и имеющуюся в них библиографию — посвящено исследованию разрешимости краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений в характеристических и близких к ним областях. Заметим, что зачастую изучение

Kozhanov, A.I., Initial–boundary value problems for degenerate hyperbolic equations .

© 2015 Кожанов А.И.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН (проект № 0314-2019-0010).

Поступила июня 2020 г., опубликована 2020 г.

тех или иных задач для вырождающихся гиперболических уравнений объясняется их важностью для теории уравнений смешанного типа — см. монографии [14]–[19].

Теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений в цилиндрических областях также посвящено много работ.

Отметим прежде всего работы [20]–[23], в которых изучалась разрешимость краевых задач для некоторых специальных классов гиперболических уравнений с вырождением; используемая в этих работах техника основана на идеях, связанных с разделением переменных.

Более общие случаи вырождающихся гиперболических уравнений (а также уравнений смешанного типа) в цилиндрических областях изучались в работах [24]–[29]. Более точно, в этих работах изучались дифференциальные уравнения с вырождением келдышевского типа ([30]; см. также [12]), и при этом само вырождение могло происходить как в произвольных точках временного промежутка, так и на множествах ненулевой меры. Для рассматриваемых уравнений ставились краевые задачи как обычные, так и видоизмененные — с освобождением начальных многообразий от задания производной по времени, и доказывались теоремы существования и единственности регулярных решений.

В настоящей работе будут изучаться вырождающиеся гиперболические уравнения, характер вырождения в которых соответствует вырождению в уравнении Трикоми (см. [12]), и при этом само вырождение может происходить в произвольных точках временного промежутка. Для указанных уравнений будут доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений естественных (для невырождающихся гиперболических уравнений) начально–краевых задач. Ранее подобные результаты известны не были.

Всюду в работе будут использоваться обычные пространства Лебега L_p, Соболева W_p^l, а также пространства $L_p(0,T;X)$. Определения и свойства этих пространств можно найти в монографиях [31], [32].

2. Постановка задач

Пусть Ω есть ограниченная область из пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой (для простоты — бесконечно–дифференцируемой) границей Γ, Q есть цилиндр $\Omega\times(0,T)$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, t конечной высоты T. Далее, пусть $\varphi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $x\in\overline{\Omega}$, $t\in[0,T]$, L есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$Lv = v_{tt} - \varphi(t)\Delta v + c(x,t)v$$

(Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$).

Краевая задача: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)}0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad x\in\Omega. \tag{3}$$

Данная краевая задача представляет собой обычную первую начально–краевую задачу для нестационарных дифференциальных уравнений второго порядка по временной переменной. Именно для этой задачи будут доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений. Для второй и третьей начально–краевых задач (в естественных постановках) нетрудно будет получить аналогичные результаты об их разрешимости в классах регулярных решений; ввиду очевидности обсуждать эти задачи мы не будем.

3. Предварительные результаты

Доказательство основной теоремы будет проведено в следующем пункте с помощью трех предварительных результатов.

Утверждение 1. *Пусть выполняются условия*

I. $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi(t) > 0$ *при* $t \in (0,T]$, $\varphi(0) = 0$*;*

II. $c(x,t) \in C^1(\overline{Q})$, $\exists\, \delta_* \in (0,T]$*:* $c(x,t) \geq 0$, $c_t(x,t) \leq 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, $0 \leq t \leq \delta_*$*;*

III. $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t) f(x,t) \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации.

Для положительного числа ε обозначим через $\varphi_\varepsilon(t)$ функцию $\varphi(t)+\varepsilon$, через L_ε — оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$L_\varepsilon v = v_{tt} - \varphi_\varepsilon(t)\Delta v + c(x,t)v - \varepsilon \Delta v_t.$$

Краевая задача с условиями (2) и (3) для уравнения

$$L_\varepsilon u = f(x,t)$$

имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$ такое, что $u^\varepsilon(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_t^\varepsilon(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}^\varepsilon(x,t) \in L_2(Q)$ — см. [33]–[35]. Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}_{\varepsilon>0}$ имеют место равномерные по ε априорные оценки.

Индекс "ε" при получении оценок опустим.

Вследствие условия I существует положительное число t_* такое, что $t_* \leq \delta_*$, $\varphi'(t) \geq 0$ при $t \in [0, t_*]$.

Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} L_\varepsilon u u_\tau \, dx\, d\tau = \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} f u_\tau \, dx\, d\tau$$

вначале при $t \in [0, t_*]$. Это равенство нетрудно преобразовать к виду

$$\frac{1}{2\varphi_\varepsilon(t)} \int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \frac{\varphi'}{\varphi_\varepsilon^2} u_\tau^2 \, dx\, d\tau + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\, dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \frac{c\varphi' - c_\tau \varphi_\varepsilon}{\varphi_\varepsilon^2} u^2 \, dx\, d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{c(x,t)}{\varphi_\varepsilon(t)} u^2(x,t)\, dx +$$

$$+\varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t\int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} u_{x_i\tau}^2 \, dx\, d\tau =$$

$$= \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} f u_\tau \, dx \, d\tau.$$

Условия I и II означают, что все слагаемые левой части этого равенства неотрицательны. Применив в правой части неравенство Юнга, учитывая условие III и далее используя лемму Гроноулла, получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (1_ε), (2), (3) выполняется оценка

$$\frac{1}{\varphi_\varepsilon(t)} \int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\, dx +$$

$$+\varepsilon \sum_{i=1}^n \int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} u_{x_i\tau}^2 \, dx\, d\tau \le N_1 \tag{4}$$

с постоянной N_1, определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$ и $f(x,t)$, а также числом T.

Рассмотрим равенство

$$-\int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} L_\varepsilon u \Delta u_\tau \, dx\, d\tau = -\int_0^t \int_\Omega \frac{1}{\varphi_\varepsilon(\tau)} f \Delta u_\tau \, dx\, d\tau$$

(вновь при $t \in [0, t_*)$. После интегрирования по частям, использования условий I–III, применения неравенства Юнга и леммы Гроноулла получим, что при $t \in [0, t_*]$ для решений $u(x,t)$ краевой задачи (1_ε), (2), (3) выполняется вторая априорная оценка

$$\frac{1}{\varphi_\varepsilon(t)} \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)\, dx + \int_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\, dx +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta u_\tau)^2 \, dx\, d\tau \le N_2, \tag{5}$$

постоянная N_2 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$, а также числом T.

Пусть теперь $t \in [t_*, T]$. Анализируя последовательно равенство

$$\int_0^t \int_\Omega L_\varepsilon u u_\tau \, dx\, d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_\tau \, dx\, d\tau,$$

$$-\int_0^t \int_\Omega L_\varepsilon u \Delta u_\tau \, dx\, d\tau = -\int_0^t \int_\Omega f \Delta u_\tau \, dx\, d\tau,$$

$$\int_0^t \int_\Omega L_\varepsilon u u_{\tau\tau} \, dx\, d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_{\tau\tau} \, dx\, d\tau$$

— интегрируя по частям, используя положительность функции $\varphi(t)$ на отрезке $[t_*, T]$, учитывая оценки (4) и (5) и применяя лемму Гроноулла, получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (1_ε), (2), (3) справедлива оценка

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\,dx + \int\limits_\Omega [\Delta u(x,t)]^2\,dx +$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{\tau\tau}^2\,dx\,d\tau + \varepsilon\int\limits_0^t\int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau \le N_3, \qquad (6)$$

постоянная N_3 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$, а также числом T.

Оценки (6) уже вполне достаточно для предельного перехода в уравнении (1_ε).

Пусть $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ есть последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, $u_m(x,t)$ есть решение краевой задачи (1_{ε_m}), (2), (3). Из оценки (6) и из свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существуют последовательности $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ натуральных чисел, $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^\infty$ решений краевых задач $(1_{\varepsilon_{m_k}})$, (2), (3), а также функция $u(x,t)$ такие, что при $k\to\infty$ имеют место сходимости

$$u_{m_k}(x,t)\to u(x,t) \textit{ слабо в } W_2^2(Q),$$
$$\varepsilon_{m_k}\Delta u_{m_k t}(x,t)\to 0 \textit{ слабо в } L_2(Q).$$

Из этих сходимостей очевидным образом вытекает, что предельная функция $u(x,t)$ будет решением краевой задачи (1)–(3). Поскольку оценка (6) с $\varepsilon = 0$ для предельной функции $u(x,t)$ сохранится, то функция $u(x,t)$ будет принадлежать требуемому классу.

Утверждение доказано.

Утверждение 2. *Пусть выполняются условия*

IV. $\varphi(t)\in C^1([0,T])$, $\varphi(t)>0$ *при* $t\in[0,T)$, $\varphi(T)=0$*;*

V. $c(x,t)\in C^2(\overline{Q})$, $\exists\,\delta^*\in[0,T)$*:* $c(x,t)\ge 0$, $c_t(x,t)\le 0$ *при* $x\in\overline{\Omega}$, $\delta^*\le t\le T$*;*

VI. $f(x,t)\in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_t(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)\cap\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t)\in L_2(Q)$.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации.

Пусть ε есть положительное число, $\widetilde{L}_\varepsilon$ есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$\widetilde{L}_\varepsilon v = Lv + \varepsilon\Delta^2 v_t.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$*, являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$\widetilde{L}_\varepsilon u = f(x,t) \qquad (\widetilde{1_\varepsilon})$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие

$$\Delta u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0. \qquad (7)$$

При фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ эта задача имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$ такое, что $u^\varepsilon(x,t)\in L_\infty(0,T;W_2^4(\Omega))$, $u_t^\varepsilon(x,t)\in L_2(0,T;W_2^4(\Omega))$, $u_{tt}^\varepsilon(x,t)\in L_2(Q)$ — см. [33]

(нетрудно доказать существование указанного решения и непосредственно — с помощью классического метода Галеркина с выбором специального базиса [36]). Покажем, что для семейства $\{u^\varepsilon(x,t)\}_{\varepsilon>0}$ при выполнении условий IV–VI имеют место равномерные по ε априорные оценки.

Индекс "ε" при получении оценок вновь опустим.

Вследствие условия IV существует положительное число t^* такое, что $\delta^* \leq t^* \leq T$, $\varphi'(t) \leq 0$ при $t \in [t^*, T]$.

Пусть $t \in [0, t^*]$. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t \int_\Omega L_\varepsilon u u_\tau \, dx \, d\tau = \int_0^t \int_\Omega f u_\tau \, dx \, d\tau. \tag{8}$$

Интегрируя по частям, учитывая, что $t \leq t^*$ выполняется неравенство $\varphi(t) \geq k_0 > 0$, а также применяя лемму Гронуолла, получим, что следствием равенства (8) будет оценка

$$\int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\, dx +$$

$$+\varepsilon \int_0^t \int_\Omega (\Delta u_\tau)^2 \, dx\, d\tau \leq N_4$$

с постоянной N_4, определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$ и $f(x,t)$, числами t^* и T.

Рассмотрим теперь равенство (8) в случае $t \in [t^*, T]$. Имеют место равенства

$$\int_0^t \int_\Omega L_\varepsilon u u_\tau \, dx\, d\tau = \int_0^{t^*} \int_\Omega L_\varepsilon u u_\tau \, dx\, d\tau + \int_{t^*}^t \int_\Omega L_\varepsilon u u_\tau \, dx\, d\tau =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{t^*} \int_\Omega \varphi' u_{x_i}^2 \, dx\, d\tau - \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \int_\Omega c_\tau u^2 \, dx\, d\tau + \varepsilon \int_0^{t^*} \int_\Omega (\Delta u_\tau)^2 \, dx\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{2} \int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t^*}^t \int_\Omega \varphi' u_{x_i}^2 \, dx\, d\tau +$$

$$+\frac{\varphi(t)}{2} \sum_{i=1}^n \int_\Omega u_{x_i}^2(x,t)\, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega c(x,t) u^2(x,t)\, dx - \frac{1}{2} \int_{t^*}^t \int_\Omega c_\tau u^2 \, dx\, d\tau +$$

$$+\varepsilon \int_{t^*}^t \int_\Omega (\Delta u_\tau)^2 \, dx\, d\tau = \int_0^{t^*} \int_\Omega f u_\tau \, dx\, d\tau + \int_{t^*}^t \int_\Omega f u_\tau \, dx\, d\tau.$$

В последнем равенстве первые три слагаемых левой части и первое слагаемое правой в сумме дают равномерно по ε ограниченную величину. Далее, все остальные слагаемые левой части неотрицательны. Используя неравенство

Юнга и далее применяя лемму Гронуолла, получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи $(\widetilde{1_\varepsilon})$, (2), (3), (7) при $t \in [t^*, T]$ выполняется оценка

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \varepsilon \int\limits_{t^*}^{t} \int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau \le N_5,$$

постоянная N_5 в которой определяется лишь функциями $\varphi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$, а также числами t^* и T.

Поскольку t^* есть фиксированное число, то получаем, что для функции $u(x,t)$ выполняется неравенство

$$\int\limits_\Omega u_t^2(x,t)\,dx + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_\tau)^2\,dx\,d\tau \le N_6, \tag{9}$$

в котором $t \in [0,T]$, постоянная N_6 определяется лишь функциями $\varphi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$, а также числом T.

На следующем шаге рассмотрим равенства

$$-\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \widetilde{L}_\varepsilon u \Delta u_\tau\,dx\,d\tau = -\int\limits_0^t \int\limits_\Omega f \Delta u_\tau\,dx\,d\tau,$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \widetilde{L}_\varepsilon u \Delta^2 u_\tau\,dx\,d\tau = \int\limits_0^t \int\limits_\Omega f \Delta^2 u_\tau\,dx\,d\tau,$$

вновь каждое из них вначале при $t \in [0,t^*]$, затем — при $t \in [t^*, T]$. Интегрируя в этих равенствах как слева, так и справа, повторяя предыдущие рассуждения и используя неравенство (9), получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи $(\widetilde{1_\varepsilon})$, (2), (3), (7) при выполнении условий IV–VI будут справедливы оценки

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_i t}^2(x,t)\,dx + \varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta u_{x_i})^2\,dx\,d\tau \le N_7, \tag{10}$$

$$\int\limits_\Omega [\Delta u_t(x,t)]^2\,dx + \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_\Omega (\Delta^2 u_\tau)^2\,dx\,d\tau \le N_8, \tag{11}$$

в которых $t \in [0,T]$, постоянные N_7 и N_8 определяются функциями $\varphi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$, а также числом T.

Последняя априорная оценка

$$\int\limits_0^t \int\limits_\Omega \left[u_{\tau\tau}^2 + (\Delta u)^2\right]\,dx\,d\tau \le N_9 \tag{12}$$

с постоянной N_9, определяющейся лишь функциями $\varphi(t)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$, а также числом T, очевидным образом вытекает из предыдущих.

Оценок (9)–(12) вполне достаточно для организации процедуры предельного перехода. Выбирая последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$, сходящуюся к нулю, и далее используя свойство рефлексивности гильбертова пространства, получим, что существует предельная функция $u(x,t)$, являющаяся искомым решением краевой задачи (1)–(3).

Утверждение доказано.

Утверждение 3. *Пусть выполняются условия*

VII. $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi(t) > 0$ *при* $t \in (0,T]$, $\varphi(0) = \varphi T = 0$;

VIII. $c(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $\exists\, \delta_*$, $\exists\, \delta^*$: $0 < \delta_* \le \delta^* < T$: $c(x,t) \ge 0$, $c_t(x,t) \le 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,\delta_*] \cup [\delta^*,T]$;

IX. $f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t) f(x,t) \in L_2(0,\delta_*; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Пусть t_* и t^* есть такие числа, что выполняется $0 < t_* \le \delta_*$, $\varphi'(t) \ge 0$ при $\delta^* \le t^* < T$, $\varphi'(t) \ge 0$ при $t \in [t^*,T]$. Для положительного числа ε рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в цилиндре* Q *решением уравнения*

$$u_{tt} - \varphi_\varepsilon(t)\Delta u + c(x,t)u + \varepsilon\Delta^2 u_t = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2), (3) и (7). Эта задача имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$ такое, что $u^\varepsilon(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^4(\Omega))$, $u_t^\varepsilon(x,t) \in L_2(0,T; W_2^4(\Omega))$, $u_{tt}^\varepsilon(x,t) \in L_2(Q)$. Для функций $u^\varepsilon(x,t)$ имеют место равномерные по ε априорные оценки (9)–(12) — при $t \in [0,t_*]$ справедливость их устанавливается с помощью рассуждений Утверждения 1, при $t \in [t_*,T]$ — с помощью рассуждений Утверждения 2.

Из оценок (9)–(12) с помощью стандартных рассуждений о выборе сходящейся последовательности и вытекает существование искомого решения.

Утверждение доказано.

4. Основная теорема

Обозначим через E_0 множество, состоящее из конечного набора чисел t_0, $\dots$, t_m таких, что $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_m \le T$. Далее, пусть δ_0 есть фиксированное положительное число, $E(\delta_0)$ есть множество, образованное отрезками $[t_k - \delta_0, t_k + \delta_0]$, если $t_k \in (0,T)$, а также отрезком $[0,\delta_0]$, если $t_0 = 0$, и отрезком $[T-\delta_0, T]$, если $t_m = T$. Будем считать, что число δ_0 настолько мало, что выполняется вложение $E(\delta_0) \subset [0,T]$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

(а) $\varphi(t) \in C^1([0,T])$, $\varphi(t) > 0$ *при* $t \in [0,T] \setminus E_0$, $\varphi(t) = 0$ *при* $t \in E_0$;

(б) $c(x,t) \in C^2(\overline{Q})$, $c(x,t) \ge 0$, $c_t(x,t) \le 0$ *при* $x \in \overline{\Omega}$, $t \in E(\delta_0)$;

(в) $f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t) f(x,t) \in L_2(t_k, t_k + \delta_0; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, *если* $t_k \in [0,T)$, $k = 0,\dots,m$.

Тогда краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x,t)$ *такое, что* $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу $(\widetilde{1_\varepsilon})$, (2), (3), (7). Если $t_0 = 0$, то, повторяя локальные рассуждения утверждения 1, затем — утверждения 2, и далее, если необходимо, снова утверждения 1, и т.д., получим, что для решений $u^\varepsilon(x,t)$ этой задачи выполняются оценки (9)–(12). Если $t_0 > 0$, то вначале пользуемся рассуждениями утверждения 2, далее — утверждения 1, и т.д., вновь получим, что для решений $u^\varepsilon(x,t)$ краевой задачи $(\widetilde{1_\varepsilon})$, (2), (3), (7) имеют место оценки (9)–(12). Из оценок (9)–(12) и вытекает возможность выбора последовательности $\{u_m(x,t)\}_{m=1}^{\infty}$, сходящейся к искомому решению краевой задачи (1)–(3).

Теорема доказана. $\square$

5. Комментарии и дополнения

1. Для второй и третьей начально–краевых задач для уравнения (1) нетрудно получить аналогичные вышеприведенным результаты о существовании регулярных решений.

2. Также нетрудно получить результаты о существовании регулярных решений первой, второй или третьей краевых задач для более общих, чем (1), вырождающихся гиперболических уравнений — например, для уравнений с заменой оператора Лапласа на эллиптический оператор A вида

$$A = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^{ij}(x)u_{x_j}\right),$$

для уравнений с младшими членами.

3. В целом вполне аналогично можно изучить разрешимость в классах регулярных решений начально–краевых задач для вырождающихся уравнений с заменой оператора Лапласа на произвольный эллиптический оператор порядка $2m$. Приведем соответствующую теорему для первой начально–краевой задачи и для оператора $(-1)^m\Delta^m u$.

Теорема 2. *Пусть для функции $\varphi(t)$ выполняется условие* (а). *Кроме того, пусть выполняются условия*
(г) $c(x,t) \in C^{2m}(\overline{Q})$, $c(x,t) \geq 0$, $c_t(x,t) \leq 0$ *при* $(x,t) \in \overline{Q}$;
(д) $\varphi^{-\frac{1}{2}}(t)f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{2m-1}(\Omega))$.
Тогда краевая задача

$$u_{tt} + (-1)^m\varphi(t)\Delta^m u + c(x,t)u = f(x,t),$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega,$$

$$\left.\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial \nu^k}\right|_{\Gamma\times(0,T)} = 0, \quad k = 0,\dots,m-1.$$

имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^{2m}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^{2m-1}(\Omega))$, $u_{tt}(x,t) \in L_2(Q)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на использовании регуляризованного уравнения

$$u_{tt} + (-1)^m\varphi_\varepsilon(t)\Delta^m u + c(x,t)u + \varepsilon\Delta^{2m}u_t = f(x,t)$$

с соответствующим дополнением краевых условий и использовании рассуждений, проведенных при доказательстве утверждений 1—3.

Очевидно, что вместо приведенных в данной теореме краевых условий можно задавать и другие условия — например, условия

$$u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = \Delta u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = \ldots = \Delta^{m-1}u(x,t)|_{\Gamma\times(0,T)} = 0.$$

$\square$

4. Задание в изученных краевых задачах тождественно нулевых начальных данных не принципиально.

References

[1] A.V. Bitsadze, A.M. Nakhushev, *K Teorii Vyrozhdayuschehsya Giperbolisheskikh Uravnenii v Mnogomernykh Oblastyakh*, Doklady AN SSSR, **204**:6 (1972), 1289–1291.

[2] V.N. Vragov, *O Zadachakh Gursa i Darbu dlya Odnogo Klassa Giperbolicheskikh Uravnenii*, Diff. Uravn., **8**:1 (1972), 7–16.

[3] V.N. Vragov, *O Nekotorykh Kraevyh Zadachakh dlya Giperbolo–Parabolicheskikh Uravnenii*, Dinamika Splosh. Sredy, Institut Gidrodinamiki, Novosibirsk, **17** (1974), 5–11.

[4] N.I. Popivanov, *Mnogomernyi Analog Zadachi Darbu dlya Vyrozhdayuschikhsya Giperbolicheskikh Uravnenii*, Diff. Uravn., **14**:1 (1978), 80–93.

[5] A.M. Nakhushev, *Kriterii Edinstvennosti Resheniya Zadachi Darbu dlya Odnogo Vyrozhdayuschegosya Giperbolicheskogo Uravneniya Vlagoperenosa*, Diff. Uravn., **16**:9 (1980), 1643–1649.

[6] S.K. Kumykova, *Kraevaya Zadacha dlya Odnogo Vyrozhdayuschegosya Giperbolicheskogo Uravneniya v Kharakterisyicheskom Dvuugol'nike*, Diff. Uravn., **17**:1 (1981), 81–90.

[7] T.Sh. Kalmenov, *O Regulyarnykh Kraevykh Zadachakh dlya Uravnenii Giperbolicheskogo i Smeshannogo Typov*, Avtoref. Dissert. D-ra Fiz.–Mat. Nauk, MGU, Moskva, 1982.

[8] M.S. Salakhitdinov, M. Mirsaburov, *O Nekotorykh Kraevykh Zadachakh Typa Zadachi Bitsadze–Samarskogo dlya Uravneniya Giperbolicheskogo Typa, Vyrozhdayuschegosya na Granitse Oblasti*, Neklassich. Zadach. Matem. Fiziki, Tashkent, 1985, 3–25.

[9] O.A. Repin, *Kraevaya Zadacha Typa Zadachi Bitsadze–Samarskogo dlya Uravneniya Vlagoperenosa*, Vychisl. i Prrikl. Matem., Vysha Shkola, Kiev, 1988, 45–49.

[10] N.I. Popivanov, M. Shneider, *The Darboux Problems in $\mathbb{R}^3$ for a Class of Degenerate Hyperbolic Equations*, J. Math. Anal. and Appl., **175**:2 (1993).

[11] A.A. Kilbas, O.A. Repin, M. Saigo, *Solution in Closed Form of Boundary Value Problem for Degenerate Equation of Hyperbolic Type*, Kyungpook Mathematical Journal, **36**:2 (1996), 261–273.

[12] M.M. Smirnov, *Vyrozhdayuschiesya Ellipticheskie i Giperbolicheskie Uravneniya*, Nauka, Moskva, 1966.

[13] A.M. Nakhushev, *Zadachi so Smescheniem dlya Uravneniy v Chastnykh Proizvodnykh*, Nauka, Moskva, 2006.

[14] A.V. Bitsadze, *Uravneniya Smeshannogo Typa*, Izd. AN SSSR, 1959.

[15] M.S. Salakhitdinov, *Uravneniya Smeshanno–Sostavnogo Typa*, FAN, Tashkent, 1974.

[16] T.D. Dzhuraev, *Kraevye Zadachi dlya Uravneniy Smeshannogo i Smeshanno–Sostavnogo Typov*, FAN, Tashkent, 1979.

[17] M.M. Smirnov, *Uravneniya Smeshannogo Typa*, Vyssh. Shkola, Moskva, 1985.

[18] O.A. Repin, *Kraevye Zadaci so Smescheniem dlya Uravneniy Giperbolicheskogo i Smeshannogo Typov*, Izd. Saratov. Un-ta, Samara, 1992.

[19] K.B. Sabitov, *K Teorii Uravneniy Smeshannogo Typa*, Fizmatlit, Moskva, 2014.

[20] Yu. K. Sabitova, *Nelokal'nye Nachal'no–Granichnye Zadachi dlya Vyrozhdayuschegosya Giperbolicheskogo Uravneniya*, Izv. Vyzov, **12** (2009), 49–58.

[21] S.A. Aldashev, *Korrektnost' Zadach Dirikhle i Puankore v Tsylindricheskoy Oblasty dlya Mnogomernogo Uravneniya Chaplygina*, Vladikavkazskiy Matem. Zhurn., **15**:2 (2013), 3–11.

[22] N.V. Zaitseva, *Keldysh Type Problem for B–Hyperbolic Equation with Integral Boundary Value Condition of the First Kind*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **38**:1 (2017), 162–169.

[23] K.B. Sabitova, N.V. Zaytseva, *Vtoraya Nachal'no–Kraevaya Zadacs dlya B–Giperbolicheskogo Uravneniya*, Izv. Vuzov. Matem., **10** (2013), 75–86.

[24] V.N.Vragov, *O Smeshannoy Zadache dlya Odnogo Klassa Giperbolicheskikh Uravneniy*, Dokl. AN SSSR, **224**:2 (1975), 273–276.

[25] V.N.Vragov, *K Teorii Kraevykh Zadach dlya Uravneniy Smeshannogo Typa*, Diff. Uravn., **13**:6 (1977), 1098–1105.

[26] V.N.Vragov, *O Postanovkakh i Razreshimosti Kraevykh Zadach dlya Uravneniy Smeshanno–Sostavnogo Typa*, Matem. Analiz i Smezh. Vopr. Matem., Nauka, Novosibirsk, 1978, 5–13.

[27] N.A. Lar'kin, *O Linearizovannom Uravnenii Nestatsyonarnoy Gazovoy Dynamiki*, Nekl. Uravn. i Uravn. Smesh. Typa, Izd. In-ta Matem. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1983, 107–118.
[28] I.E. Egorov, *Razreshimost' Odnoy Kraevoy Zadachi dlya Uravneniya Smeshannogo Typa Vysokogo Poryadka*, Diff. Uravn., **23**:9 (1987), 1560–1567.
[29] I.E. Egorov, V.E. Fedorov, *Neklassicheskie Uravneniya Matematicheskoy Fiziki Vysokogo Poryadka*, Izd. Vychisl. Tsetra SO RAN, Novosibirsk,1995.
[30] M.V. Keldysh, *O Nekotorykh Sluchayakh Vyrozhdeniya Uravneniy Ellipticheskogo Typa na Granitse Oblasti*, Dokl. AN SSSR, **77**:2 (1951), 181–183.
[31] S.L. Sobolev, *Nekotorye Primeneniya Funktsyonal'nogo Analiza v Matematicheskoy Fizike*, Nauka, Moskva, 1988.
[32] H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North–Holland Publ., Amsterdam, 1978.
[33] S.Ya. Yakubov, *Lineinye Differentsyal'no–Operatornye Uravneniya i ih Prilozheniya*, Elm, Baku, 1985.
[34] P. Aviles, J. Sandefur, *Nonlinear Second Order Equations with Applications to Partial Differential Equations*, J. of Diff. Equat, **58**:3 (1985), 404–427.
[35] A.I. Kozhanov, *Composite Type Equations and Inverse Problems*, VSP, Utrecht, 1999.
[36] J.L. Lions, *Quelques Methods de Resolution des Problems aux Limites non Lineares*, Dunod Cauthier–Villars, Paris, 1969.

Aleksandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kozhanov@math.nsc.ru