

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, стр. nnn–nnn (2020)

УДК 512.542, 519.172  
MSC 20D15, 05C25О ЛОКАЛЬНО ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ГРАФАХ НА  
ЭЛЕМЕНТАХ КОЛЬЦА  $Z_n$ ,  $n$  – ДЕЛИТЕЛЬ ЧИСЛА

$$m = r^2 + r + 1$$

И.Т. Мухаметьянов

ABSTRACT. Considered graphs on sets of elements of rings  $Z_m$  with set of edges  $R = \{\{x, y\} | x - y \in \{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{r}, -\bar{r}, \bar{r}^2, -\bar{r}^2\}\}$  where  $n$  is divisors of  $m = r^2 + r + 1$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , with focus on geometric construction of these graphs and their arrays of intersecions.

**Keywords:** Ring, edge-regular graph, intersection array.

## ВВЕДЕНИЕ

Многие классификационные теоремы о графах с той или иной степенью регулярности перечисляют графы, обладающие определёнными свойствами, в частности, локальными свойствами. Например, в [1] в классификационных теоремах упоминаются тривалентный граф (**Предложение 1**), четырёхвалентный и шестивалентный графы (**Предложение 2**), то есть упоминаются графы малых размерностей.

Регулярные графы малых валентностей подробно рассматриваются в вопросах, связанных с проблемами химии, кристаллографии и в ряде других наук. Обобщению таких графов посвящён целый ряд математических статей. Относительно недавно появилась целая монография по данному направлению теории графов [2]. Она посвящена, в частности, так называемым полициклам. Хотя рассматриваемые нами графы являются полициклами, мы пока максимально независимы от этих рассмотрений.

МУХМЕТЬЯНОВ, И.Т., О ЛОКАЛЬНО ШЕСТИУГОЛЬНЫХ ГРАФАХ НА ЭЛЕМЕНТАХ КОЛЬЦА  $Z_n$ ,  $n$  – ДЕЛИТЕЛЬ  $m = r^2 + r + 1$ .

© 2020 Мухаметьянов И.Т.

Поступила 1 января 2004 г., опубликована 31 декабря 2004 г.

В работах [3 – 6] нами введены и рассмотрены несколько семейств графов из класса локально шестиугольных, в частности, шестивалентных. В данной работе мы развиваем это рассмотрение относительно одного из этих семейств.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Мы рассматриваем неориентированные конечные графы без петель и кратных рёбер. Если вершины  $x$  и  $y$  графа лежат на расстоянии  $i$  друг от друга, то этот факт будем обозначать через  $d(x, y) = i$ . При этом маршрут длины  $i$ , соединяющий  $x$  и  $y$ , называется *геодезической*. Для вершины  $x$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(x)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $x$ , то есть подграф, индуцированный  $\Gamma$  на подмножестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $x$ .  $\Gamma_{\leq i}(x)$  – подграф, индуцированный  $\Gamma$  на подмножестве всех вершин, находящихся на расстоянии не больше  $i$  от  $x$ . *Окрестность вершины* – её 1-окрестность. Положим  $[x] = \Gamma_1(x) = \Gamma(x)$  – окрестность вершины  $x$ ,  $x^\perp = [x] \cup x$  – *замкнутая окрестность* вершины  $x$ . *Локально шестиугольный граф* – это граф, у которого окрестность каждой вершины является шестиугольником. *Диаметр*  $d(\Gamma)$  графа  $\Gamma$  – это максимально возможное расстояние между вершинами графа  $\Gamma$ .

*Регулярный граф степени  $k$*  – это граф, степени вершин которого равны одному и тому же числу  $k$ . Если вершины  $x$  и  $y$  регулярного графа находятся на расстоянии  $i$  друг от друга в  $\Gamma$ , то через  $a_i(x, y)$ ,  $b_i(x, y)$ ,  $c_i(x, y)$  обозначим число вершин соответственно в пересечениях  $\Gamma_i(x) \cap \Gamma(y)$ ,  $\Gamma_{i+1}(x) \cap \Gamma(y)$ ,  $\Gamma_{i-1}(x) \cap \Gamma(y)$ . Назовём их *числами пересечений* графа  $\Gamma$ . Упорядоченный набор

$$\{b_0(x, y), b_1(x, y), \dots, b_{d-1}(x, y); 1, c_2(x, y), \dots, c_d(x, y)\},$$

называется *массивом пересечений* графа  $\Gamma$ . Если различных значений  $b_i(x, y)$  и  $c_i(x, y)$  относительно немного (скажем, два или три), то в массиве пересечений эти значения будем располагать в столбцах, причём так, чтобы координаты в  $b_i(x, y)$  и  $c_i(x, y)$  будут соответствовать друг другу.

Так,  $b_i(x, y) = \binom{k}{i}$  и  $c_i(x, y) = \binom{m}{n}$  означают, что для некоторых  $x, y$  с  $d(x, y) = i$  имеем  $b_i(x, y) = k$ ,  $c_i(x, y) = m$ , а для некоторых –  $b_i(x, y) = l$ ,  $c_i(x, y) = n$ . Также будут обозначения типа  $b_i(x, y) = \binom{k}{i}$  и  $c_i(x, y) = \binom{m}{q}$ , что означает, что для некоторых  $x, y$  с  $d(x, y) = i$  имеем  $b_i(x, y) = k$ ,  $c_i(x, y) = \binom{m}{n}$  а для некоторых –  $b_i(x, y) = \binom{l}{p}$ ,  $c_i(x, y) = q$ .

*Рёберно регулярный граф* с параметрами  $(v, k, \lambda)$  – это регулярный граф степени  $k$  с  $v$  вершинами,  $\lambda = |[x] \cap [y]|$  одно и то же для любых  $x$  и  $y$  с  $d(x, y) = 1$  (что равносильно: *любое ребро содержится в двух треугольниках*). В общем случае  $\lambda(x, y) = |[x] \cap [y]|$  для произвольных  $x$  и  $y$  с  $d(x, y) = 2$ . *Вполне регулярный граф* с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$  – это рёберно регулярный граф с параметрами  $(v, k, \lambda)$ , у которого  $\mu = |[x] \cap [y]|$  одно и то же для любых  $x$  и  $y$  с  $d(x, y) = 2$ .

Рассмотрим правильный шестиугольник со стороной  $l$ . Разобьём его на треугольники следующим образом:

1. Разделим каждую сторону на  $l$  равных отрезков.
2. Проведём отрезки параллельно сторонам с концами в точках деления сторон.

Получается своеобразная сетка с правильными треугольными ячейками. Его можно рассматривать, как некоторый граф, который обозначим через  $\Delta_l$ . Будем  $\Delta_l$  представлять так, что какие-то две стороны исходного шестиугольника вертикальны. Для каждой внутренней вершины  $x$  графа  $\Delta_l$ , не лежащей на стороне исходного шестиугольника, замкнутая окрестность  $x^\perp$  представляет собой шестиугольник, разбитый на 6 правильных треугольников.

Если  $\Gamma$  – локально шестиугольный, то  $\Gamma_{\leq i}(x)$  и  $\Gamma_i(x)$  можно изобразить на евклидовой плоскости в виде  $\Delta_i$  и его контура, соответственно, если изображать только те рёбра, которые представляются сторонами правильных треугольников, на которые разбиваются замкнутые окрестности вершин графа. Это изображение  $\Gamma_{\leq i}(x)$  обозначим через  $\overline{\Delta_i(x)}$ , а изображение  $\Gamma_i(x)$  – через  $\underline{\Delta_i(x)}$ . Допуская некоторую вольность в обозначениях, будем писать  $\Gamma_{\leq i}(x) = \overline{\Delta_i(x)}$  и  $\Gamma_i(x) = \underline{\Delta_i(x)}$ , имея в виду соответствующие изображения. Вообще говоря, в  $\overline{\Delta_i(x)}$  некоторые вершины могут быть изображены несколько раз. Если некоторая вершина  $x$  изображена несколько раз, и, скажем,  $y$  – ещё одно её изображение, то  $y$  будем называть *двойником вершины  $x$* . Ясно, что при этом  $x$  – двойник вершины  $y$ . Иногда двойники одной и той же вершины не будем отличать друг от друга (то есть мы на них будем ссылаться как к одной и той же вершине). Если  $l$  – максимальное натуральное число такое, что в  $\Gamma_{\leq l}(x) = \overline{\Delta_l(x)}$  одна и та же вершина изображается в точности один раз, то  $\overline{\Delta_l(x)}$  назовём *максимальной евклидово-правильной  $l$ -окрестностью относительно  $x$  без повторений*. По аналогии с этим названием в общем случае естественным будет  $\overline{\Delta_i(x)}$  называть *евклидово-правильной  $i$ -окрестностью*. Если из контекста не будет путаницы, то  $\Delta_i(x)$  и  $\overline{\Delta_i(x)}$  будем кратко называть *правильными окрестностями*. Число  $l$  будем называть *радиусом* правильной окрестности  $\overline{\Delta_l(x)}$ , а также *радиусом* правильной окрестности  $\underline{\Delta_l(x)}$ .

Пусть  $\overline{\Delta_l(x)}$  – максимальная евклидово-правильная  $l$ -окрестность графа  $\Gamma$  относительно вершины  $x$  без повторений (всюду дальше словосочетание "без повторений" будем опускать). Пририсовываем к  $\overline{\Delta_l(x)}$  окрестности всех вершин  $y \in \overline{\Delta_l(x)}$ . Получим некоторую часть  $\Delta_{l+1}$  графа  $\Gamma$ . По аналогии с выше обозначим её через  $\overline{\Delta_{l+1}(x)}$ , а правильный шестиугольник, ограничивающий  $\overline{\Delta_{l+1}(x)}$ , через  $\Delta_{l+1}(x)$ . Вообще говоря, как будет вытекать из **Предложения 1.2** (см. ниже), в  $\overline{\Delta_{l+1}(x)}$  или  $\underline{\Delta_{l+2}(x)}$  могут лежать также вершины из  $\Gamma_l(x)$ , а некоторые вершины из  $\Gamma_{\leq l+1}(x)$  в  $\overline{\Delta_{l+1}(x)}$  могут быть изображены более одного раза. Аналогично определим  $\overline{\Delta_{l+2}(x)}$  и  $\underline{\Delta_{l+2}(x)}$ , пририсовав к  $\overline{\Delta_{l+1}(x)}$  окрестности всех вершин  $y \in \overline{\Delta_{l+1}(x)}$ . Ясно, что можно определить  $\overline{\Delta_i(x)}$  и  $\underline{\Delta_i(x)}$  для любого  $i \in \mathbb{N}$ .

Ясно, что автоморфизмы локально шестиугольного графа  $\Gamma$  индуцируют автоморфизмы  $\overline{\Delta_i(x)}$  при достаточно большом  $i$  и обратно. И если мы говорим о такого рода автоморфизмах графа  $\Gamma$ , как повороты на определённые углы (в частности, центральная симметрия относительно вершины), то они определяются очевидным образом посредством  $\overline{\Delta_i(x)}$ .

Пусть  $m = r^2 + r + 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < n \leq m$ ,  $1 < r < n$ ,  $\Gamma_n$  – граф с множеством вершин  $\mathbb{Z}_n$  классов вычетов по модулю числа  $n$ , и множеством рёбер

$$R = \{\{\bar{x}, \bar{y}\} | \bar{x} - \bar{y} \in \{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{r}, -\bar{r}, \bar{r}^2, -\bar{r}^2\}\},$$

где  $\bar{1}$ ,  $-\bar{1}$ ,  $\bar{r}$ ,  $-\bar{r}$ ,  $\bar{r}^2$ ,  $-\bar{r}^2$  – попарно различные классы вычетов по модулю  $n$ . Такой граф назовём *графом классов по mod n для пары  $(n, r)$* , и обозначим

его через  $\Gamma_n$ . Граф  $\Gamma_m$  назовём *графом общей серии*, а при  $n$ , делящем нацело  $m$ , граф  $\Gamma_n$  назовём *фактор-графом графа  $\Gamma_m$*  по делителю  $m/n$ . При этом договоримся, что для графа  $\Gamma_n$  в обозначениях окрестности его вершины,  $i$ -окрестности и т.п. индекс  $n$  опускать:  $\Gamma(x)$ ,  $\Gamma_i(x)$ ,  $\Gamma_{\leq i}(x)$  и т.д. Также договоримся, что чёрточки в обозначениях классов вычетов опускать: вместо  $\bar{x}$  будем писать  $x$ . Из контекста будет ясно, когда  $x$  будет обозначать число, а когда – класс вычетов с представителем  $x$ .

Мы в нашей работе подробно останавливаемся на этих графах в случае, когда  $n$  является делителем числа  $m = r^2 + r + 1$ . В частности, кроме нахождения их массивов пересечений, получаем достаточно подробную картину строения  $\Gamma_n$  в этом случае. Результаты сведены в **Теорему**, которая сформулирована ниже (в конце данного раздела). Отметим также, что мы решаем только прямую задачу: по числу  $m = r^2 + r + 1$  и его делителям  $n$  изучаем свойства графов  $\Gamma_n$ , не останавливаясь на задаче классификации графов с данным массивом пересечений. Это уже отдельная проблема.

В [5] доказана следующая

**Теорема А.** *Если для  $\Gamma_n$   $n$  – делитель числа  $m = r^2 + r + 1$ , где  $r \in \mathbb{N}$ , то справедливы следующие утверждения:*

- 1) *Граф  $\Gamma_n$  укладывается на торе.*
- 2)  *$\text{Aut}\Gamma_n \cong Z_n C_6$ , где  $C_6$  – группа поворотов на углы, кратные  $\pi/3$ .*

Отметим, что доказательство пункта **2) Теоремы А** содержит один существенный недостаток, и в результате на самом деле утверждение пункта не доказано. Ниже мы восполним этот пробел.

Кроме того, в [5] доказана

**Лемма В.** *Пусть  $n$  – делитель числа  $m = r^2 + r + 1$ ,  $\Gamma_n$  – граф классов вычетов по  $\text{mod } n$ ,  $x$  – произвольная вершина графа  $\Gamma_n$ ,  $R_{[x]}$  – множество рёбер в  $[x]$ . Тогда  $[x] = \{x + 1, x - 1, x + r, x - r, x + r + 1, x - r - 1\}$ , и  $\{\{x + 1, x + r + 1\}, \{x + r + 1, x + r\}, \{x + r, x - 1\},$*

$$\{x - 1, x - r - 1\}, \{x - r - 1, x - r\}, \{x - r, x + 1\}\} \subseteq R_{[x]}.$$

В данной работе нами получен результат более общего характера, который обобщает эту лемму. Он является содержанием утверждений пунктов **(1)** и **(2) Теоремы**.

Таким образом, мы можем изобразить окрестность произвольной вершины  $x$  графа  $\Gamma_n$ . На рис.1.1 мы приводим это изображение. При этом имеем  $r^2 = -(r + 1)$  (в кольце  $Z_n$ !). В любом случае договоримся при изображении  $x^\perp$  вершину  $x + r$  располагать справа от вертикальной оси окрестности.

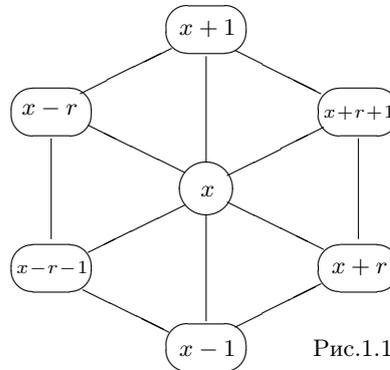


Рис.1.1

В силу **Теоремы А** группа автоморфизмов графа  $\Gamma_n$  состоит из "параллельных переносов" (которые соответствуют элементам  $\mathbb{Z}_n$ ), поворотов на углы, кратные  $\pi/3$ , и их композиции. Первые назовём *параллельными автоморфизмами*, вторые – *автоморфизмами поворота*.

Из сказанного выше в общем случае вытекает, что  $\Gamma_n$  в определённой степени поддаётся геометрическому изображению, и не только в виде  $\overline{\Delta_l(x)}$ . Мы часто будем использовать такое изображение фрагментов графа. Эти фрагменты будут изображены в виде элементов правильных геометрических фигур (связанных с правильными шестиугольниками и правильными треугольниками). Поэтому в них будут ссылки типа "под углом, кратным  $60^\circ$ " и т.д. Также, по аналогии с ориентировкой в круге с направлениями, как на циферблате часов, будем использовать в шестиугольниках направления *двух часов, четырёх часов, шести часов, восьми часов, десяти часов, двенадцати часов*. Иногда будем пользоваться терминологией типа "юго-западное направление от точки. . ." (имея в виду направление  $240^\circ$  в прямоугольной декартовой системе координат, как если бы она была выбрана с центром в этой точке), "северо-восточная сторона правильной окрестности  $\overline{\Delta_l(x)}$ " и т.п. В окрестности  $x^\perp$  вершины  $x$  на вершины из  $[x]$  будут ссылки типа "вершина двенадцати часов" и т.п. Далее, в изображениях  $\overline{\Delta_l(x)}$  будем выделять оси (проходящие через центр  $x$  окрестности, вертикальные, наклонные и т.п.).

Наконец, кроме евклидово-правильной  $l$ -окрестности  $\overline{\Delta_l(x)}$  вершины  $x$  в графе  $\Gamma_n$  будем выделять так называемую *евклидово-правильную  $l$ -окрестность-шестерню*  $\widehat{\Delta_l(x)}$ , которую получим, пристраивая к максимальной евклидово-правильной  $l$ -окрестности  $\overline{\Delta_l(x)}$  от соответствующих концов стороны  $\overline{\Delta_l(x)}$  в определённом направлении относительно движения часовой стрелки "зубчики" (отдельные вершины) через одну. В зависимости от того, в каком направлении пристраивались "зубчики" к шестерне, название окрестности-шестерни будет уточняться: шестерня, полученная пристраиванием "зубчиков" в направлении по ходу (против хода) часовой стрелки. Стороны исходной  $l$ -окрестности будем называть *сторонами  $l$ -окрестности-шестерни*.

Изображение больших фрагментов графа  $\Gamma_n$  можно начинать с  $\Gamma(x)$ , и если  $d(\Gamma) \geq 2$ , то к  $\Gamma(x)$  пририсовать вершины (и рёбра) из  $\Gamma_2(x)$  (получив  $\overline{\Delta_2(x)}$ ), и если  $d(\Gamma) \geq 3$ , то к  $\Gamma_2(x)$  пририсовать вершины из  $\Gamma_3(x)$  (получив  $\overline{\Delta_3(x)}$ ), и т.д. Как мы уже отметили, договоримся изображать только рёбра, соединяющие вершины с другими вершинами, изображёнными в непосредственной близости с данными. Другими словами, в изображение включим только фрагменты замкнутых окрестностей – правильных шестиугольников, разбитых на правильные треугольники. При этом изображаем как можно большую часть графа. На самом деле мы будем получать изображение, включающее все вершины графа без повторений. Полученную часть графа назовём *максимальным треугольным паркетом графа относительно  $x$* . Не вдаваясь в подробности, отметим, что этот термин перекликается с терминологией из [2].

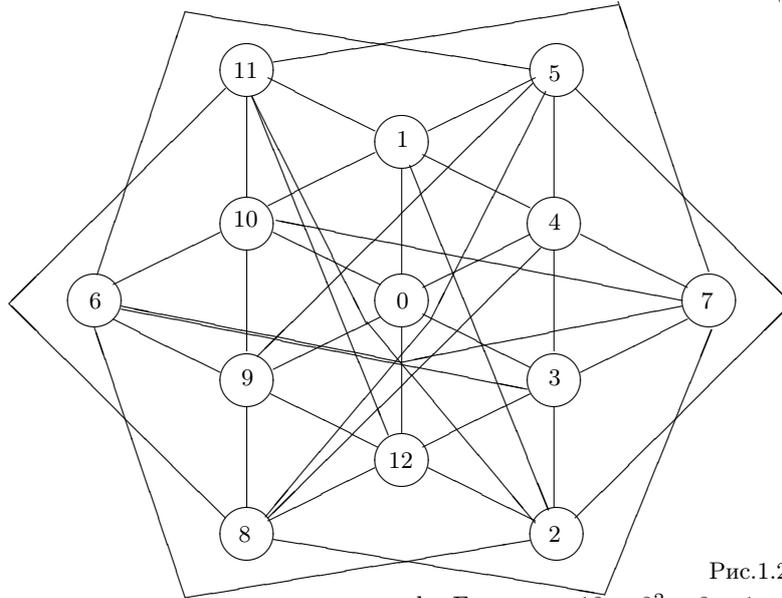


Рис.1.2

Поясним сказанное на примере графа  $\Gamma_m$  с  $m = 13 = 3^2 + 3 + 1$  вершинами, изображённого на рис.1.2. На рисунке изображены все его рёбра. Его можно получить следующим образом: сначала изобразить замкнутую окрестность нуля  $0^\perp = \{0\} \cup [0]$ , затем к ней пририсовать вершины из  $\Gamma_2(x)$  только с теми рёбрами, которые являются сторонами правильных шестиугольников, разбитых на правильные треугольники, и, наконец, дорисовать недостающие рёбра  $\{7, 11\}$ ,  $\{7, 8\}$ ,  $\{8, 11\}$ ,  $\{5, 6\}$ ,  $\{2, 6\}$ ,  $\{2, 5\}$ . Если мы не дорисуем эти недостающие рёбра (то есть рёбра из последнего списка), то получим граф, изображённый на рис. 1.3. Он и есть максимальный треугольный паркет графа  $\Gamma_{13}$  (относительно вершины 0), изображённого на рис.1.2. Максимальной евклидово-правильной  $l$ -окрестностью графа относительно 0 является подграф графа, ограниченный шестиугольником  $(1, 4, 3, 12, 9, 10)$ . При этом  $l=1$ . Попутно отметим, что этот граф (изображённый на рис.1.3) является также максимально-правильной 1-окрестностью-шестёрнёй графа  $\Gamma_{13}$ .

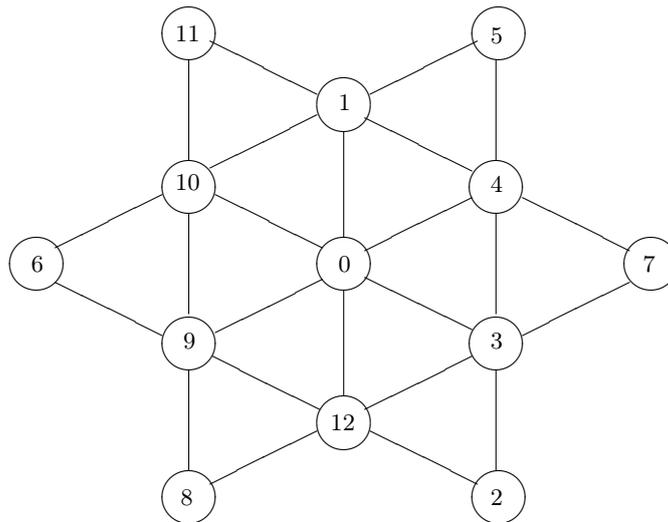


Рис.1.3

Ясно, что максимальный треугольный паркет графа относительно одной и той же вершины определён неоднозначно. Но мы в качестве такового будем брать максимально симметричный относительно группы поворотов максимальный треугольный паркет. В любом случае максимальный треугольный паркет графа включает в себя все его вершины без повторений.

Возьмём  $\Delta_i(x)$  в графе  $\Gamma_n$ . Тогда в  $\Delta_i(x)$  множество вершин  $y$  делится на два подмножества:

- 1)  $y$  являются вершинами шестиугольника  $\Delta_i(x)$ ;
- 2)  $y$  лежат на сторонах шестиугольника  $\Delta_i(x)$  и не являются вершинами шестиугольника  $\Delta_i(x)$ .

Элементы первого множества назовём  *$i$ -вершинами первого вида относительно  $x$* , а элементы второго множества –  *$i$ -вершинами второго вида относительно  $x$* . В случае, когда известен параметр  $i$  в  $\Delta_i(x)$ , в названиях приставку " $i$ " будем опускать: вершина первого вида относительно  $x$ , вершина второго вида относительно  $x$ .

Отметим, что, вообще говоря, эти два подмножества пересекаются непусто. То есть вершина может быть одновременно вершиной двух видов. Но если в  $\Delta_i(x)$  вершины изображены в точности по одному разу (в частности, в  $\Delta_i(x)$  для  $i \leq l$ , где  $l$  – радиус правильной окрестности графа), то, ясно, эти два подмножества не пересекаются.

**Лемма 1.1.** *Для любого  $i \in \mathbb{N}$   $\Delta_i$  имеет  $3i^2 + 3i + 1$  вершин. В частности, если  $l$  – радиус правильной  $l$ -окрестности в графе  $\Gamma_n$ , то для любых  $x \in \mathbb{Z}_n$  и  $i$  с  $1 \leq i \leq l$  имеет место равенство  $|\overline{\Delta_i(x)}| = 3i^2 + 3i + 1$ .*

**Доказательство.** Пусть  $x$  – центр исходного шестиугольника для  $\Delta_i$ . Тогда для любого  $j \in \mathbb{N}$  такого, что  $1 \leq j \leq i$ , имеем  $|\Gamma_j(x)| = 6j$ . А теперь общее число вершин у  $\Delta_i(x)$  равно

$$|\{x\} \cup \Gamma_1(x) \cup \Gamma_2(x) \cup \dots \cup \Gamma_i(x)| = 1 + \sum_{j=1}^i 6j = 1 + 6 \sum_{j=1}^i j = 1 + 6 \frac{i(i+1)}{2} = 3i^2 + 3i + 1,$$

Если  $l$  – радиус правильной  $l$ -окрестности в графе  $\Gamma_n$ , то для любого  $x \in \mathbb{Z}_n$  в  $\Delta_i(x)$  при  $1 \leq i \leq l$  вершины не повторяются. Отсюда следует, что для любого  $x \in \mathbb{Z}_n$  и  $i$  с  $1 \leq i \leq l$  имеем  $|\Delta_i(x)| = 3i^2 + 3i + 1$ .

Лемма доказана.

Изобразим  $\overline{\Delta_l(x)}$ . Ось, проходящая через вершину  $r^2$ , наклонена к вертикальной оси под углом  $\pi/3$ . На этой оси располагаются вершины  $ir^2$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , а на другой, отличной от вертикальной, располагаются вершины  $ir$ . При этом по разные стороны от 0 на этой оси располагаются противоположные по знаку вершины графа (элементы кольца  $\mathbb{Z}_n$ ), то есть если по одну сторону от 0 лежат  $ix$ , то по другую сторону лежат  $-ix$ ,  $x \in \{1, r, r^2\}$  в зависимости от оси. На рис.1.4 получаем следующее изображение  $\overline{\Delta_l(x)}$  (напоминаем, что в первом случае  $r^2 = -(r+1)$ ).

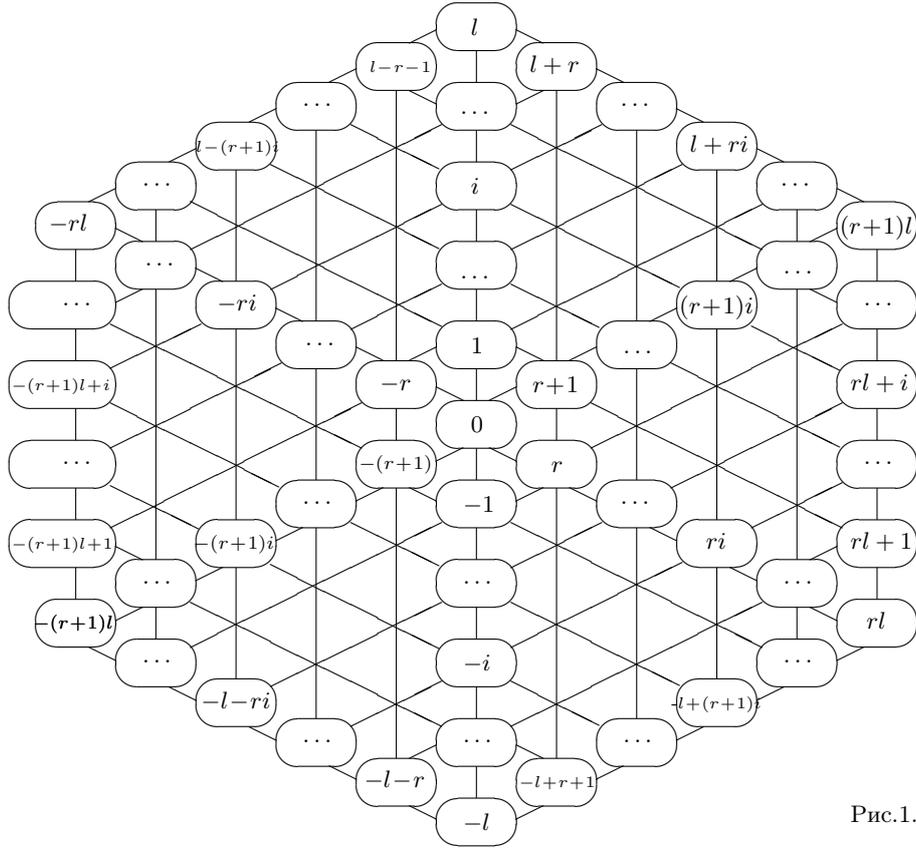


Рис.1.4

Покажем, что результат пункта **2) Теоремы А** справедлив. Напомним, что при доказательстве в [5] нами сначала замечено, что  $Z_n$  изоморфно вкладывается в  $Aut\Gamma_n$  и  $|Aut\Gamma_n| = n \cdot |A_x|$ , где  $A_x$  – стабилизатор вершины  $x$  в  $Aut\Gamma_n$ . В частности,  $Aut\Gamma_n$  транзитивна на множестве вершин  $\Gamma_n$ . Ясно, что  $Aut\Gamma_n \simeq Z_n A_x$ , и  $A_x$  является подгруппой группы самосовмещений шестиугольника. Далее доказано, что  $A_x$  не включает осевые симметрии шестиугольника, и тем самым достаточно показать, что повороты  $\overline{\Delta_i(0)}$  вокруг 0 на углы, кратные  $\pi/3$ , являются автоморфизмами графа  $\Gamma_n$ .

Покажем, что если  $0, 1, \dots, n-1$  – вершины, последовательно лежащие на верхней полуоси вертикальной оси  $\overline{\Delta_i(0)}$ , то вершины  $0, -r^2, -2r^2, -3r^2, \dots, -(n-1)r^2$  – все вершины графа  $\Gamma_n$ , последовательно лежащие на полуоси в направлении от 0 к вершине 2 часов, а  $0, r, 2r, 3r, \dots, (n-1)r$  – все вершины графа  $\Gamma_n$ , последовательно лежащие на полуоси в направлении от 0 к вершине 4 часов. Заметим, что число  $m = r^2 + r + 1$  взаимно просто как с  $r$ , так и с  $r^2$ . Тогда произвольные делители  $n$  числа  $m$  также взаимно просты как с  $r$ , так и с  $r^2$ . Хорошо известно, что когда  $i$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n$ , число  $x$  взаимно просто с  $n$ , то числа  $xi$  пробегает тоже полную систему вычетов по модулю  $n$ . Поэтому когда  $i$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n$ , то и  $ir$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n$ , а также  $ir^2$  пробегает полную систему вычетов по модулю  $n$ . Отсюда вытекает,

что все вершины графа  $\Gamma_n$  лежат на каждой из осей, проходящих через 0, причём указанные выше последовательности вершин удовлетворяют заявленным свойствам расположения на соответствующих полуосях.

Теперь заметим, что поворот  $\overline{\Delta_i(0)}$  вокруг 0 на угол  $\pi/3$  эквивалентен умножению вершин графа на  $-r^2$ . Действительно, возьмём произвольную вершину  $i$  на вертикальной оси  $\overline{\Delta_i(0)}$  в сторону направления 12 часов (см. рис.1.4). В результате поворота на угол  $\pi/3$  она перейдёт в вершину  $-r^2i$ . Вершина  $-r^2i$  перейдёт в вершину  $ri = r^4i = -r^2(-r^2i)$ , так как в силу  $r^2 + r + 1 = 0$  имеем  $r^3 - 1 = (r-1)(r^2+r+1) = 0$ , то есть  $r^3 = 1$  (в кольце  $\mathbb{Z}_n$ ). Вершина  $ri$  перейдёт в вершину  $-i = -r^3i = -r^2(ri)$ . Вершина  $-i$  перейдёт в вершину  $r^2i = -r^2(-i)$ . Вершина  $r^2i$  перейдёт в вершину  $-ri = -r^4i = -r^2(r^2i)$ . Наконец, вершина  $-ri$  перейдёт в  $i = r^3i = -r^2(-ri)$ . Таким образом, поворот вершины на угол  $\pi/3$  приводит к умножению её на  $-r^2$ . Ясно, что верно и обратное утверждение: умножение произвольной вершины  $i$  на  $-r^2$  приводит к повороту его на угол  $\pi/3$ .

Наконец, покажем, что поворот  $\varphi$  на угол  $\pi/3$  сохраняет смежность вершин. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\{x, y\}) &= \{\varphi(x), \varphi(y)\} = \{-r^2x, -r^2y\} = -r^2y + r^2x = -r^2(y - x) \in \\ &\in -r^2\{1, -1, r, -r, r^2, -r^2\} = \{-r^2, r^2, -r^3, r^3, -r^4, r^4\} = \{-r^2, r^2, -1, 1, -r, r\} = K \end{aligned}$$

(пользуясь, как и выше, равенством  $r^3 = 1$  в кольце  $\mathbb{Z}_n$ ). Таким образом, если  $\{x, y\}$  – ребро, то и  $\varphi(\{x, y\})$  также ребро.

Теперь нами доказано, что группа  $\text{Aut}\Gamma_n$  содержит группу поворотов  $C_6$ , и утверждение пункта **2) Теоремы А** доказано. Более того, мы можем уточнить **2) Теоремы А** в следующей редакции:

2)  $\text{Aut}\Gamma_n \simeq \mathbb{Z}_n C_6$ , где  $C_6$  – группа поворотов графа  $\Gamma_n$  на углы, кратные  $\pi/3$ . Более того,  $\text{Aut}\Gamma_n$  является транзитивной группой, и для каждой вершины  $x$  графа  $\Gamma_n$  существует циклическая подгруппа порядка 6, стабилизирующая эту вершину и циклически переставляющая вершины из  $[x]$ .

Так что в дальнейшем мы можем пользоваться этим фактом, и к нему будем ссылаться как к уточнению пункта **2) Теоремы А**.

Изображение графа  $\Gamma_n$  можно продолжить на всю плоскость  $\mathbb{R}^2$ . Тогда получим правильный треугольный паркет графа  $\Gamma_n$  – бесконечный граф, уложенный на плоскости, окрестности вершин которого являются шестиугольниками. Расстояние между вершинами  $x$  и  $y$  этого графа назовём *паркетным расстоянием* и обозначим через  $d_{\Pi}(x, y)$ . Ясно, что если  $d(x, y)$  – расстояние между  $x$  и  $y$  в  $\Gamma_n$ , то, вообще говоря,  $d_{\Pi}(x, y) \neq d(x, y)$ . При этом если  $x_k$  и  $y_k$  лежат в одной и той же максимальной евклидово-правильной  $l$ -окрестности без повторений, то геодезическая, соединяющая  $x$  и  $y$ , представляет собой либо отрезок, либо ломаную из двух звеньев.

Следующее предложение позволяет множество графов  $\Gamma_n$  разбить на два класса:

**Предложение 1.2.** Если  $l$  – радиус максимальной евклидово-правильной окрестности вершины графа  $\Gamma_n$ , то для любого  $i$  такого, что  $2 < i \leq l$ , вершина  $l+i$  лежит в  $\overline{\Delta_l(0)}$ . При этом либо  $l+1$ , либо  $l+2$  лежит на  $\Delta_l(0)$ .

Отнесём к первому классу графы, для которых  $l+1 \in \Delta_l(0)$ , а ко второму классу – графы, для которых  $l+2 \in \Delta_l(0)$ . При этом, как легко видеть, вершина  $l+i$ ,  $i = 1, 2$ , лежит на одной из южных сторон  $\Delta_l(0)$ . Если она совпадает с  $j$ -й

вершиной южной стороны со стороны вершины шести часов, то будем говорить, что  $\Gamma_n$  имеет параметры  $(l + i, j)$  или, более подробно,  $(n, l + i, j)$ .

Введём понятие *многоступенчатой сетчатой трапеции*, а также некоторые понятия, связанные с ней.

Возьмём отрезок длины  $l$  и разобьём его на единичные отрезки. Общее число концов этих отрезков будет  $l + 1$ . Построим на этих отрезках  $l$  правильных треугольников, так, чтобы их третьи вершины лежали по одну и ту же сторону от оснований всех треугольников, скажем, выше оснований. Соединим вершины двух крайних треугольников, которые не лежат в основаниях треугольников, отрезком. Получится отрезок длины  $l - 1$ , поделённый на  $l - 1$  единичных отрезков. Это – *первый ярус* будущей многоступенчатой сетчатой трапеции. Крайние отрезки яруса – *первые ступеньки* трапеции. Концевые точки всего яруса – *концевые вершины* первой ступеньки, а вершины первых ступенек, являющиеся внутренними точками первого яруса – *неконцевые вершины* первых ступенек. Отрезок, соединяющий неконцевые вершины первых ступенек *основание* первого яруса. Исходный отрезок – *основание трапеции*.

Предположим, построен  $i$ -й ярус трапеции. Тогда крайние отрезки этого яруса –  *$i$ -е ступеньки* трапеции. Концевые точки всего яруса – *концевые вершины  $i$ -х ступенек*, а вершины  $i$ -х ступенек, являющиеся внутренними точками  $i$ -го яруса – *неконцевые вершины  $i$ -х ступенек*. При этом естественным образом будем отличать левые и правые концевые и неконцевые точки ступенек. Отрезок, соединяющий неконцевые вершины  $i$ -х ступенек – *основание  $(i + 1)$ -го яруса*.

Теперь построим  $(i + 1)$ -й ярус трапеции. Допустим,  $i$ -й ярус трапеции состоит из  $s$  единичных отрезков. Тогда основание  $(i + 1)$ -го яруса состоит из  $(s - 2)$  отрезков (без двух крайних отрезков, соединяющих верхние точки треугольников  $i$ -го яруса), на которых построим  $(s - 2)$  правильных треугольников. Соединим вершины двух крайних треугольников, которые не лежат в основаниях треугольников, отрезком. Получим  $(i + 1)$ -й ярус. Самый верхний ярус трапеции назовём *верхним основанием* трапеции а каждое ребро верхнего основания – его *площадка*. Если верхний ярус содержит только одну вершину, то трапецию назовём *островерхой*.

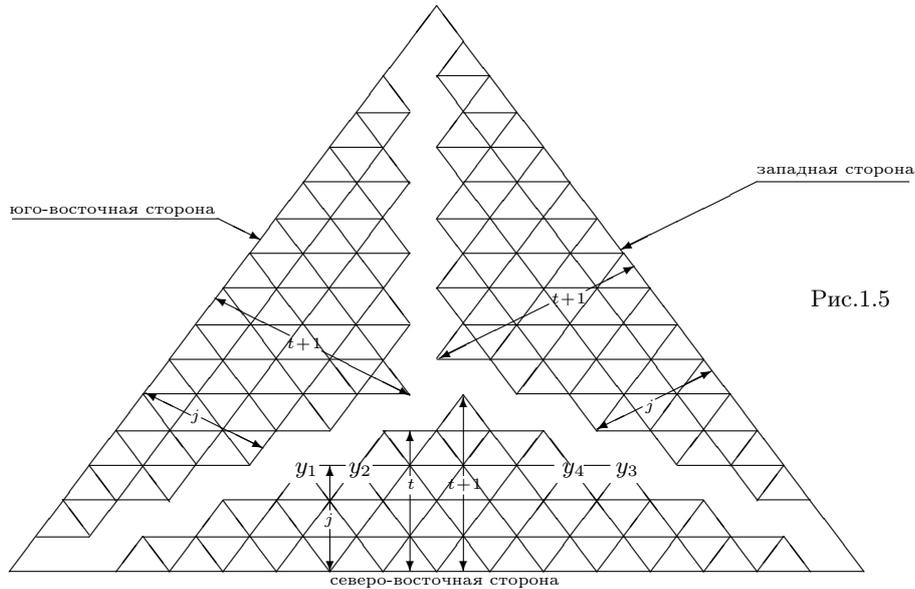
Наконец, естественным образом будем отличать *западную* и *восточную* стороны (многоступенчатой) трапеции.

**Лемма 1.3.** Пусть  $L = 3t + r$  – равенство деления с остатком натурального числа  $L$  на 3. Тогда в многоступенчатой сетчатой трапеции с основанием длины  $L$  имеется  $(t + 1)$  ярус с  $r$  вершинами на последнем,  $(t + 1)$ -м ярусе, при  $r \neq 0$ , и  $t$  ярусов при  $r = 0$ . При этом число вершин, лежащих в трапеции, равно  $L + 1 + (t + 1)(2L - 3t)/2$ . В частности, число вершин, лежащих на ярусах, равно  $(t + 1)(2L - 3t)/2$ .

Доказательство первой части леммы вытекает непосредственно из построения многоступенчатой трапеции, так как основание очередного яруса имеет на три отрезка меньше, чем у предыдущего. Докажем вторую часть, то есть найдём число вершин трапеции. В основании трапеции лежит  $(L + 1)$  вершина. В первом ярусе имеем  $L$  вершин. На втором ярусе имеем  $L - 3$  вершин, на третьем –  $L - 6$ , и так далее:  $L - 9, L - 12, \dots, L - 3(t - 1), L - 3t = r$ . То есть вершин в трапеции будет  $(L + 1) + L + (L - 3) + (L - 6) + \dots + (L - 3(t - 1)) + (L - 3t)$ . Далее сгруппируем отдельно все  $L$ , начиная со второго, и

отдельно слагаемые, кратные 3. Затем применим хорошо известное равенство  $1 + 2 + \dots + (t-1) + t = t(t+1)/2$ . Тогда получим, что число вершин в трапеции равно  $(L+1) + (t+1)L - 3 \cdot t(t+1)/2$ , откуда и получаем требуемое. Лемма доказана.

Возьмём правильный треугольник со стороной  $k$ . Разобьём каждую сторону треугольника на  $k$  равных частей и соединим их концы отрезками, параллельными основаниям треугольника. Тем самым исходный треугольник будет разбит на ячейки-треугольники со сторонами 1. Теперь впишем в этот треугольник три одинаковые многоступенчатые трапеции с основаниями длины  $k-3$  так, как это показано на рис. 1.5 – 1.7 соответственно для случаев, когда  $L = k-3$  делится на 3 с остатком 1, 2 и 0. Заметим, что в первом случае трапеции оказываются островерхими, во втором они имеют верхние основания длины 1, а в третьем случае к левой верхней площадке верхнего основания *горизонтальной* трапеции пристроена вершина. Кроме горизонтальной трапеции естественным образом выделяются *правая наклонная трапеция* и *левая наклонная трапеция*.



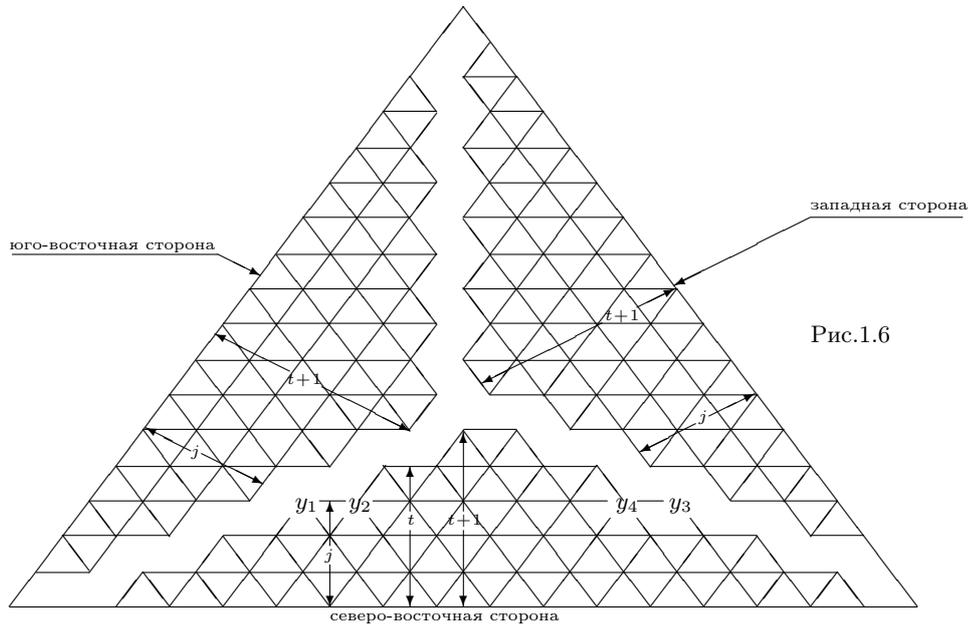


Рис.1.6

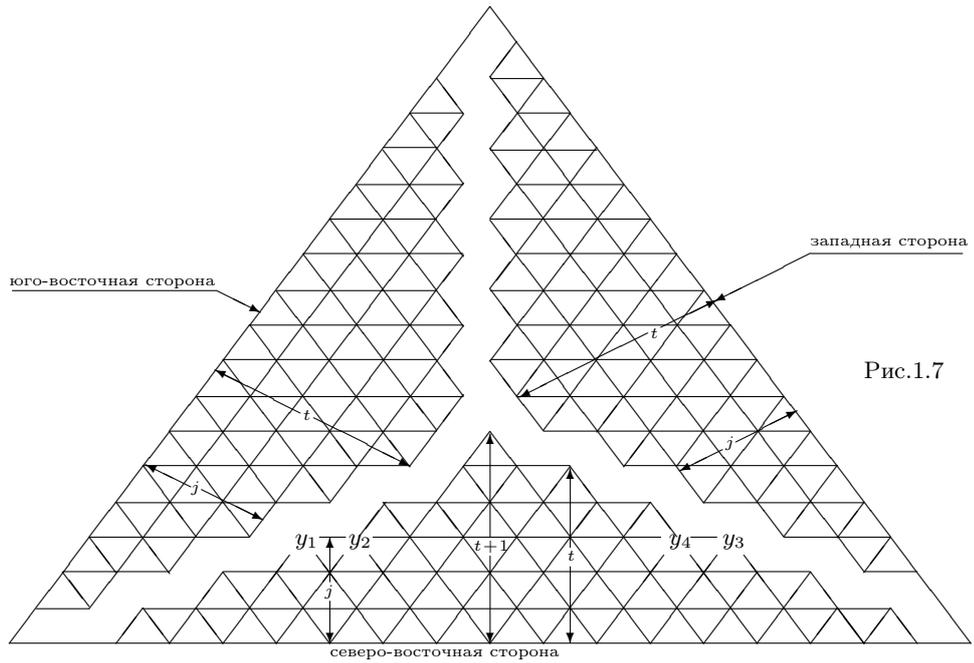


Рис.1.7

Треугольник, в который таким образом вписаны многоступенчатые трапеции, назовём *правым треугольником с трапециями* (горизонтальная трапеция смещена на одно ребро ближе к правой стороне треугольника, чем к левой).

Если к правому треугольнику с трапециями применить осевую симметрию относительно вертикальной оси (треугольника), то получим *левый треугольник с трапециями*.

Рассмотрим два вида графов, имеющих по два вида максимального правильного треугольного паркета.

*Первый вид* графов с *левосторонними пристроями* представляет собой класс графов, максимальные правильные треугольные паркеты которых получены пристроем к максимальной евклидово-правильной окрестности некоторой вершины многоступенчатых сетчатых трапеций следующим образом:

1) правый треугольник с трапециями пристраивается к левому концу северо-восточной стороны окрестности так, что вершины основания треугольника оказываются на северо-восточной стороне окрестности, и таким образом, что первый ярус левой наклонной трапеции оказывается на одной прямой с прямой, содержащей северо-западную сторону окрестности;

2) правая наклонная трапеция треугольника пристраивается к западной стороне окрестности (вершины основания трапеции оказываются на западной стороне), а левая наклонная трапеция треугольника пристраивается к юго-восточной стороне так, что они оказываются симметричными пристрою-трапеции к северо-восточной стороне относительно поворотов вокруг центра окрестности на соответствующие углы;

3) такой же треугольник, как и в первом пункте, подвергается манипуляциям центрально симметричным образом, то есть пристраивается к юго-западной стороне центрально симметрично треугольнику в первом пункте и т.д.

*Первый вид* графов с *правосторонними пристроями* представляет собой класс графов, максимальные правильные треугольные паркеты которых получены пристроем к максимальной евклидово-правильной окрестности некоторой вершины многоступенчатых сетчатых трапеций следующим образом:

1) левый треугольник с трапециями пристраивается к правому концу северо-восточной стороны окрестности так, что вершины основания треугольника оказываются на северо-восточной стороне окрестности, и таким образом, что первый ярус правой наклонной трапеции оказывается на одной прямой с прямой, содержащей восточную сторону окрестности;

2) правая наклонная трапеция пристраивается к западной стороне правильной окрестности, а левая наклонная трапеция пристраивается к юго-восточной стороне так, что они оказываются симметричными пристрою-трапеции к северо-восточной стороне относительно поворотов вокруг центра окрестности на соответствующие углы;

3) такой же треугольник, как и в первом пункте, подвергается манипуляциям центрально симметричным образом, то есть пристраивается к юго-западной стороне центрально симметрично треугольнику в первом пункте и т.д.

*Второй вид* графов с *левосторонними пристроями* представляет собой класс графов, максимальные правильные треугольные паркеты которых получены следующим образом: к левому концу северо-восточной стороны окрестности-шестерни, полученной пристраиванием "зубчиков" против хода часовой стрелки, пристраивается правый треугольник с трапециями так, чтобы конец основания горизонтальной трапеции совпал с этим концом северо-восточной стороны

окрестности с последующими аналогичными операциями с его трапециями, как при получении вершин графов первого вида с левосторонними пристроями.

Таким образом, в этом случае в отличие от графов первого вида с левосторонними пристроями уже второй ярус левой наклонной трапеции треугольника оказывается на одной прямой, содержащей северо-западную сторону окрестности-шестерни.

*Второй вид* графов с *правосторонними пристроями* представляет собой класс графов, максимальные правильные треугольные паркеты которых получены следующим образом: к правому концу северо-восточной стороны окрестности-шестерни, полученной пристраиванием "зубчиков" по ходу часовой стрелки, пристраивается левый треугольник с трапециями так, чтобы конец основания горизонтальной трапеции совпал с этим концом северо-восточной стороны окрестности с последующими аналогичными операциями с его трапециями, как при получении вершин графов второго вида с правосторонними пристроями.

Таким образом, в этом случае в отличие от графов первого вида с правосторонними пристроями уже второй ярус правой наклонной трапеции треугольника оказывается на одной прямой, содержащей восточную сторону окрестности-шестерни.

**Лемма 1.4.** *Граф с левосторонними пристроями может быть получен из графа с правосторонними пристроями при помощи композиции поворота на угол  $\pi/3$  и осевой симметрии относительно вертикальной оси  $\overline{\Delta_l(0)}$ , и наоборот.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Вообще, ясно, что для получения из графа с левосторонними пристроями графа с правосторонними пристроями осевая симметрия может быть применена относительно произвольной оси, и даже без применения какого-либо поворота.

Таким образом, в любом из введённых графов, вершины, лежащие на стороне треугольника с трапециями, удалены от  $x$  на расстояние  $l$ , вершины, лежащие в первом внутреннем ряде треугольника, они же лежат на первом ярусе одной из трапеций, лежат на расстоянии  $l + 1$ , и, вообще, вершины, лежащие в  $j$ -м внутреннем ряде треугольника, они же лежат на  $j$ -м ярусе одной из трапеций, лежат на расстоянии  $l + j$  от  $x$ . Здесь  $x$  – вершина из центра окрестности  $\overline{\Delta_l(0)}$ , к которой пристраиваются пристрой-трапеции (и "зубчики" для окрестности-шестерни) для получения максимального правильного треугольного паркета графа.

Теперь мы формулируем теорему о строении графов  $\Gamma_n$  обоих классов в случае  $m = r^2 + r + 1$ .

**Теорема 1.** *Пусть  $m = r^2 + r + 1$ ,  $\Gamma_n$  – фактор-граф графа общей серии  $\Gamma_m$ . Тогда имеют место следующие утверждения:*

(1)  $\Gamma_n$  является рёберно регулярным с параметрами  $(n, 6, 2)$ , где  $\lambda \geq 2$ , причём  $\lambda > 2$  только в случае  $\Gamma_n = K_7$  – полный граф с 7 вершинами.

(2) При  $\lambda = 2$   $\Gamma_n$  является локально шестиугольным графом, и для произвольной вершины  $x \in Z_n$  имеют место следующие равенства для  $[x]$  и для множества  $R_{[x]}$  рёбер в  $[x]$ :  $[x] = \{x + 1, x - 1, x + r, x - r, x + r + 1, x - r - 1\}$ ,  $R_{[x]} = \{\{x + 1, x + r + 1\}, \{x + r + 1, x + r\}, \{x + r, x - 1\},$

$$\{x - 1, x - r - 1\}, \{x - r - 1, x - r\}, \{x - r, x + 1\}\}.$$

(3) Множество графов  $\Gamma_n$  разбивается на два класса графов: первый и второй класс.

Далее, пусть  $\Gamma_n$  имеет параметры  $(l+i, j)$ ,  $(n, j) = 1$ . Тогда имеют место следующие утверждения:

(4) Имеют место соотношения

$$n = 4l^2 + 2(2i - j)l + (j^2 - ij + i^2), i = 1, 2, 1 \leq j \leq l, \{i, j, l\} \subseteq \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Обратно, если  $n$ ,  $l$  и  $j$  – такие натуральные числа, что имеют место соотношения (1.1) и  $(n, j) = 1$ , то существует граф  $\Gamma_n$  с параметрами  $(l+i, j)$ ,  $i = 1, 2$ , а также число  $r$  такое, что для числа  $m = r^2 + r + 1$  граф  $\Gamma_m$  является графом общей серии, для которого граф  $\Gamma_n$  является фактор-графом.

Наконец, если  $s \in \mathbb{N}$  такое, что  $m = sn$ , числа  $m$ ,  $n$ ,  $l$  и  $j$  – как выше, то число  $4sn - 3$  является полным квадратом целого числа, а между  $l$  и  $j$  имеют место связи

$$l = (j - 2i + \sqrt{4n - 3j^2})/4, j = ((2l + i) - \sqrt{4n - 3(2l + i)^2})/2.$$

В частности,  $4n - 3j^2$  и  $4n - 3(2l + i)^2$  – полные квадраты целых чисел.

(5) Если  $i = 1$ , то  $\Gamma_n$  – граф первого вида (то есть граф  $\Gamma_n$  первого класса относится к графам первого вида). При этом, если  $l + 1$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-восточной стороны со стороны вершины шести часов, то это – граф с левосторонними пристроями, а если  $l + 1$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-западной стороны со стороны вершины шести часов, то это – граф с правосторонними пристроями.

Если  $i = 2$ , то  $\Gamma_n$  – граф второго вида (то есть граф  $\Gamma_n$  второго класса относится к графам второго вида). При этом, если  $l + 2$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-западной стороны со стороны вершины шести часов, то это – граф с правосторонними пристроями, а если  $l + 2$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-восточной стороны со стороны вершины шести часов, то это – граф с левосторонними пристроями.

(6) Пусть  $L = l - j - 1$  при  $i = 1$  и  $L = l - j + 1$  при  $i = 2$ . Тогда если при делении на 3  $L$  даёт остатки 1 или 2, то правильный треугольный паркет графа получается пристроем к  $\Delta_l(x)$  в случае графа первого класса, и к  $\widetilde{\Delta}_l(x)$  в случае графа второго класса, одинаковых многоступенчатых сетчатых трапеций с основанием  $L$ . При этом в случае остатка 1 трапеции являются островерхими, а в случае остатка 2 – с верхним основанием длины 1. В случае, когда  $L$  делится на 3 нацело, то четыре из пристроев-трапеций к основанию имеют верхние основания длины 2, а два – такие же пристрои с пририсованными к левым площадкам верхних оснований треугольниками; последние два пристроя можно пристроить к основанию так, чтобы они были диаметрально противоположны друг к другу.

(7) Пусть  $\Gamma_n$  – граф с параметрами  $(l+1, j)$ ,  $L$  – длина основания пристроя-трапеции в правильном паркете графа (как и в пункте (6)). Тогда  $\Gamma_n$  имеет следующий массив пересечений:

(i) при  $L = 0$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}\}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}\}$ ,  $d(\Gamma) = l$ ;

(ii) при  $L = 1$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{0}{1}\}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}\}, 6\}$ , если  $n$  делится на 3, и  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}\}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}\}, 4\}$ , если  $n$  не делится на 3; в любом случае  $d(\Gamma) = l + 1$ ;

- (iii) при  $L = 2$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}\}$ ,  $d(\Gamma) = l + 1$ ;  
 (iv) при  $L = 3$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}, \binom{1}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}, 6\}$ ,  $d(\Gamma) = l + 2$ ;  
 (v) при  $L \geq 4$ :  $\{6, 3, b_2(x, y), \dots, b_{l+t}(x, y); 1, c_2(x, y), \dots, c_{l+t+1}(x, y)\}$ ,  $d(\Gamma) = l + t + 1$ , где

$$b_i(x, y) = \binom{3}{2}, c_i(x, y) = \binom{1}{2} \text{ для всех } i = 2, \dots, l - 1,$$

$$b_l(x, y) = \binom{1}{\binom{2}{0}}, c_l(x, y) = \binom{\binom{1}{2}}{2},$$

$$b_i(x, y) = \binom{\binom{2}{1}}{0}, c_i(x, y) = \binom{2}{4} \text{ для всех } i = l + 1, \dots, l + t - 1,$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{\binom{2}{1}}{0}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \not\equiv 0 \pmod{3},$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{1}{0}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \equiv 0 \pmod{3},$$

$$c_{l+t+1}(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{при } L \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 & \text{при } L \equiv 1 \pmod{3}, \\ \binom{2}{4} & \text{при } L \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

$t$  – вообще говоря, неполное частное от деления  $L$  на 3.

Если  $\Gamma_n$  – граф с параметрами  $(l + 2, j)$ ,  $L$  – длина основания пристроя-трапеции в правильном паркете графа, то граф имеет один из следующих массивов пересечений:

- (i) при  $L = 1$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{3}{4}\}$ ,  $d(\Gamma) = l + 1$ ;  
 (ii) при  $L = 2$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{3}{1}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}\}$ ,  $d(\Gamma) = l + 1$ ;  
 (iii) при  $L = 3$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{3}{1}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}, 6\}$ ,  $d(\Gamma) = l + 2$ ;  
 (iv) при  $L \geq 4$ :  $\{6, 3, b_2(x, y), \dots, b_{l+t}(x, y); 1, c_2(x, y), \dots, c_{l+t+1}(x, y)\}$ ,  $d(\Gamma) = l + t + 1$ , где

$$b_i(x, y) = \binom{3}{2}, c_i(x, y) = \binom{1}{2} \text{ для всех } i = 2, \dots, l - 1,$$

$$b_l(x, y) = \binom{3}{\binom{2}{1}} \text{ при } n < m, \text{ и } b_l(x, y) = \binom{3}{2} \text{ при } n = m, c_l(x, y) = \binom{1}{2},$$

$$b_{l+1}(x, y) = \binom{\binom{1}{2}}{0}, c_{l+1}(x, y) = \binom{2}{\binom{3}{4}},$$

$$b_i(x, y) = \binom{\binom{2}{1}}{0}, c_i(x, y) = \binom{2}{4} \text{ для всех } i = l + 2, \dots, l + t - 1,$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{\binom{2}{1}}{0}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \not\equiv 0 \pmod{3},$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{1}{0}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \equiv 0 \pmod{3},$$

$$c_{t+t+1}(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{при } L \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 & \text{при } L \equiv 1 \pmod{3}, \\ \binom{2}{4} & \text{при } L \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

$t$  – вообще говоря, неполное частное от деления  $L$  на 3.

В заключение раздела отметим, что для фиксированного делителя  $n$  числа  $m$  может существовать несколько пар чисел  $(j, l)$ , удовлетворяющих соотношениям (1.1). В этом случае каждая такая пара определяет отдельный граф  $\Gamma_n$ . Например, для  $n = 91$  имеется две пары  $(j, l)$ :  $(1, 4)$  и  $(5, 5)$ . Первая пара определяет граф  $\Gamma_{91}$  общей серии  $(91 = 9^2 + 9 + 1)$ , а вторая пара – фактор-граф  $\Gamma_{91}$  графа  $\Gamma_{273}$  общей серии  $(273 = 16^2 + 16 + 1)$ .

## 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

В этом разделе мы исследуем свойства и строение графов  $\Gamma_n$  при  $m = r^2 + r + 1$ . В частности, доказываем **Теорему**.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Теоремы** разобьём на доказательство отдельных лемм и предложений.

**Лемма 2.1.** Среди делителей числа  $m = r^2 + r + 1$  нет числа 9.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** То, что  $9 \neq r^2 + r + 1$ , проверяется непосредственно.

Предположим, 9 – собственный делитель числа  $m = r^2 + r + 1$ . Тогда число  $r^2 + r + 1$  делится на 3.

Если  $r = 2l + 1$ , то  $m = 4l^2 + 6l + 3$ , и  $m$  делится на 3 тогда и только тогда, когда  $l$  делится на 3:  $l = 3t$ . В этом случае

$$m = 4 \cdot (3t)^2 + 6 \cdot (3t) + 3 = 3 \cdot (3 \cdot (2t)^2 + 3 \cdot (2t) + 1).$$

Ясно, что  $m$  на 9 не делится.

Если  $r = 2l$ , то  $m = 4l^2 + 2l + 1$ . Пусть  $s$  – остаток от деления  $l$  на 3. Тогда

$$m \equiv 4l^2 + 2l + 1 \equiv l^2 - l + 1 \equiv s^2 - s + 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Непосредственный перебор значений  $s$  от 0 до 2 показывает, что  $s = 2$ , то есть  $m$  делится на 3 тогда и только тогда, когда  $l - 2$  делится на 3:  $l = 3t + 2$ ,  $t \in \mathbb{N}$ . В этом случае деления  $m$  на 3 имеем

$$m = 4 \cdot (3t + 2)^2 + 2 \cdot (3t + 2) + 1 = 3 \cdot (12t^2 + 18t + 7).$$

Так как число в скобках в последнем равенстве не делится на 3, то снова  $m$  на 9 не делится.

Лемма доказана.

Заметим, что  $[0] = \{1, -1, r, -r, r^2, -r^2\}$ . В частности,  $n \geq 7$ .

Всюду ниже полагаем  $K = \{1, -1, r, -r, r^2, -r^2\}$ .

**Лемма 2.2.** Если  $n$  – делитель числа  $m = r^2 + r + 1$ , то  $\Gamma_n$  является рёберно регулярным графом с  $\lambda \geq 2$ . При этом  $\lambda > 2$  только в случае  $\Gamma_n = K_7$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $n$  – делитель числа  $m = r^2 + r + 1$ , то из **Леммы В** вытекает, что для любых смежных вершин  $x$  и  $y$  из  $\Gamma_n$  имеет место неравенство  $\lambda(x, y) \geq 2$ . Если при этом  $\lambda(x, y) = 2$ , то утверждение предложения тривиально.

Так как  $n$  – делитель числа  $m = r^2 + r + 1$ , то в силу уточнения пункта **2) Теоремы А** для каждой вершины  $x$  графа  $\Gamma_n$  существует циклическая подгруппа порядка 6, стабилизирующая эту вершину и циклически переставляющая вершины из  $[x]$ , и для любых  $y$  и  $z$  из  $[x]$  имеем  $\lambda(x, y) = \lambda(x, z)$ . Теперь

в силу транзитивности  $Aut\Gamma_n$  получаем, что  $\lambda(x, y) = \lambda$  постоянное. Поэтому  $\Gamma_n$  является рёберно регулярным для любого делителя  $n$  числа  $m = r^2 + r + 1$ .

Допустим,  $\lambda > 2$ . В частности, для некоторого  $y \in [0]$  имеем  $\lambda(1, y) > 2$ . Если  $\{1, -1\} \in R$ , то в силу уточнения пункта **2) Теоремы А**  $\{r, -r\} \in R$  и  $\{r^2, -r^2\} \in R$ . Это означает, что  $2, 2r, 2r^2 \in \{1, -1, r, -r, -r-1, r+1\}$ . Ясно, что  $2 \notin \{1, -1\}$ .

*Случай 1.*  $2 \in \{r, -r\}$ . Тогда  $r^2 = 4$  и  $K = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$ . Так как  $\{r^2, -r^2\} = \{4, -4\} \in R$ , то  $4 - (-4) = 8 \in \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$ . Возможность  $8 \in \{2, 4\}$  исключается сразу, так как в первом случае  $8=2$  получаем  $n = 6$ , а во втором  $-n = 4$ , что невозможно в силу  $n \geq 7$ . Проанализируем возможность  $8 \in \{1, -1, -2, -4\}$ .

*Случай 1.1.*  $8=1$ . Тогда  $n = 7$ ,  $-4 = 3$ ,  $-2 = 5$ ,  $-1 = 6$ , и  $K = \{1, 6, 2, 5, 4, 3\}$ . Ясно, что  $\Gamma_n = K_7$  – полный граф с семью вершинами.

*Случай 1.2.*  $8 = -1$ . Тогда  $n = 9$ , что невозможно в силу **Леммы 2.1**.

*Случай 1.3.*  $8 = -2$ . Тогда  $n \in \{2, 5, 10\}$ . Случай  $n \in \{2, 5\}$  исключается сразу, и  $n = 10$ . Но  $n$  – делитель  $m$ , а  $m$ , как легко видеть, – нечётно. Поэтому  $n \neq 10$ .

*Случай 1.4.*  $8 = -4$  так же не имеет место по соображениям, аналогичным соображениям в случае 1.3.

Таким образом, если  $n$  – делитель  $m = r^2 + r + 1$  и  $2 \in \{r, -r\}$ , то  $\Gamma_n = K_7$ .

*Случай 2.*  $2 \in \{r^2, -r^2\}$ . Тогда  $2 = \pm r^2 = \pm(-r-1) = \mp r \mp 1$ . Если  $2 = r+1$ , то  $r = 1$  – невозможно. Если  $2 = -r-1 = r^2$ , то  $-r = 3$  и  $r = -3$ . Это соответствует  $\pm r^2 = r^2 = 9 = 2$  и  $n = 7$ ,  $\Gamma_n = K_7$ .

Таким образом, если  $n$  – делитель  $m = r^2 + r + 1$  и  $2 \in \{r^2, -r^2\}$ , то снова  $\Gamma_n = K_7$ .

Поэтому в дальнейшем можем считать  $\{1, -1\} \notin R$ ,  $\{r, -r\} \notin R$ ,  $\{r^2, -r^2\} \notin R$ , и вершина 1 смежна хотя бы с одной из вершин  $r$  и  $-r-1$ , кроме как с вершинами  $-r$  и  $r+1$  (см. рис.1.1). В силу уточнения пункта **2) Теоремы А** получаем, что  $r$  и  $-r-1$  одновременно смежны с 1, и, вообще, в  $0^\perp$  имеют место связи между всеми вершинами, кроме связей  $\{1, -1\}$ ,  $\{r, -r\}$ ,  $\{r^2, -r^2\}$ . В частности,  $r-1 \in \{1, -1, r, -r, -r-1, r+1\}$ .

Случай  $r-1 \in \{-1, r, -r-1, r+1\}$  исключается сразу.

*Случай 1.*  $r-1 = 1$ . Тогда  $r = 2$ , что противоречит с  $\{1, -1\} \notin R$ .

*Случай 2.*  $r-1 = -r$ . Тогда  $2r = 1$ ,  $4r^2 = 1$ ,  $4(-r+1) = -4r-4$ , то есть  $-4r-4 = 1$  и  $-4r = 5$ . Но  $-4r = 2(-2r) = 2(-1) = -2$ , откуда  $5 = -2$ , и  $\Gamma_n = K_7$  – противоречие с  $\{1, -1\} \notin R$ .

Лемма доказана.

Ясно, что доказанная лемма показывает справедливость утверждения пункта **(1) Теоремы**, а вместе с **Леммой В** доказывает также справедливость утверждения пункта **(2)**.

Для доказательства справедливости утверждения пункта **(3)** докажем **Предложение 1.2**.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО Предложения 1.2.** Допустим, ни  $l+1$ , ни  $l+2$  не лежат на  $\Delta_l(0)$ . Рассмотрим  $\overline{\Delta_{l+1}(-1)}$ . Мы утверждаем, что в  $\overline{\Delta_{l+1}(-1)}$  нет повторяющихся вершин. Допустим, в  $\overline{\Delta_{l+1}(-1)}$  есть повторяющиеся вершины и  $x_k = k$  и  $y_k = k$  – различные точки правильного паркета графа  $\Gamma_n$ , которые лежат в  $\overline{\Delta_{l+1}(-1)}$  (попросту говоря,  $x_k$  и  $y_k$  – два разных двойника некоторой вершины  $k$ ). Тогда паркетное расстояние между ними  $d_{\Pi}(x_k, y_k) \leq 2(l+1) = 2l+2$ , то

есть  $2l < d_{\Pi}(x_k, y_k) \leq 2l + 2$ . Это означает, что либо  $d_{\Pi}(x_k, y_k) = 2l + 1$ , либо  $d_{\Pi}(x_k, y_k) = 2l + 2$ .

Отобразим  $x_k$  параллельным автоморфизмом  $\pi$  в  $l$ :  $\pi(x_k) = l$  ( $l$  – вершина двенадцати часов  $\Delta_l(0)$ ). Если геодезическая между  $x_k$  и  $y_k$  представляет собой отрезок, то можем паркет повернуть автоморфизмом поворота  $\varphi$  вокруг  $l = \pi(x_k)$  так, чтобы  $\varphi(\pi(y_k))$  оказался на вертикали, проходящей через 0. Но тогда  $\varphi(\pi(y_k))$  совпадёт с вершиной шести часов либо  $\Delta_{l+1}(0)$ , либо  $\Delta_{l+2}(0)$  (так как  $d_{\Pi}(x_k, y_k) = 2l + 1$  или  $d_{\Pi}(x_k, y_k) = 2l + 2$ ). Это означает, что если  $l$  – вершина двенадцати часов в  $\Delta_l(0)$ , то либо  $l+1$ , либо  $l+2$  лежит на  $\Delta_l(0)$  – противоречие.

Допустим, геодезическая между  $x_k$  и  $y_k$  представляет собой ломаную. Эта ломаная – с двумя звеньями. Так как  $d_{\Pi}(x_k, y_k) \geq 2l + 1$ , то одно из звеньев имеет длину, не меньшую чем  $l + 1$ . Без ограничения общности можно считать, что это – первое звено в направлении от  $x_k$  к  $y_k$ . Снова отобразим  $x_k$  параллельным автоморфизмом на  $l$ . Затем автоморфизмом поворота  $\varphi$  повернём паркет вокруг  $l = \varphi(x_k)$  так, чтобы первое от  $\varphi(\pi(x_k))$  к  $\varphi(\pi(y_k))$  звено оказалось на луче  $[l, 0)$ . Тогда второе звено от  $\varphi(\pi(x_k))$  к  $\varphi(\pi(y_k))$  пересечёт одну из южных сторон  $\Delta_{l+1}(0)$  или его конец  $\varphi(\pi(y_k))$  окажется на этой стороне. И если  $d_{\Pi}(x_k, y_k) = 2l + 1$ , то  $\varphi(\pi(y_k))$  окажется на  $\Delta_{l+1}(0)$ , а если  $d_{\Pi}(x_k, y_k) = 2l + 2$ , то  $\varphi(\pi(y_k))$  окажется на  $\Delta_{l+2}(0)$ . Это снова означает, что если  $l$  – вершина двенадцати часов в  $\Delta_l(0)$ , то либо  $l + 1$ , либо  $l + 2$  лежит на  $\Delta_l(0)$  – и снова противоречие.

Таким образом, в  $\overline{\Delta_{l+1}(-1)}$  нет повторяющихся вершин. Но это означает, что радиус максимальной евклидово-правильной окрестности без повторений графа  $\Gamma_n$  равен как минимум  $l + 1$  – противоречие с выбором  $l$ .

Таким образом, если  $l$  – радиус максимальной евклидово-правильной окрестности без повторений графа  $\Gamma_n$ , то либо  $l+1$ , либо  $l+2$  лежит в  $\Delta_l(0)$ . Заметим, что либо  $l+1$ , либо  $l+2$  лежат на южной стороне  $\Delta_l(0)$ . Отсюда вытекает, что  $l + i$ , где  $2 < i \leq l$ , лежит в  $\overline{\Delta_l(0)}$ .

Предложение доказано.

Теперь справедливость утверждения пункта (3) **Торемы** очевидна.

**Предложение 2.3.** Пусть  $m = r^2 + r + 1$ ,  $\Gamma_n$  – фактор-граф графа общей серии  $\Gamma_m$  с параметрами  $(l + i, j)$ ,  $(n, j) = 1$ . Тогда имеют место соотношения

$$n = 4l^2 + 2(2i - j)l + (j^2 - ij + i^2), i = 1, 2, 1 \leq j \leq l, i, j, l \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\Gamma_n$  – фактор-граф графа  $\Gamma_m$  общей серии,  $l$  – радиус правильной окрестности  $\Delta_l(0)$  графа  $\Gamma_n$ . То, что  $i = 1, 2$ , вытекает из **Предложения 1.2**.

По условию вершина  $l + i$  совпадает с  $j$ -й вершиной южной стороны  $\Delta_l(0)$  от вершины шести часов. Это может быть вершина юго-западной стороны или вершина юго-восточной стороны. В первом случае это будет  $-l - rj$  (см. рис.1.4). Во втором случае это будет вершина  $-l + (r + 1)j$ .

Допустим, вершина  $l + i$  совпадает с вершиной  $-l - rj$  юго-западной стороны основания графа:  $-l - rj = l + i$ . Так как  $(j, n) = 1$ , то в  $\mathbb{Z}_n$  существует  $j^{-1}$ . Поэтому  $r = -(2l + i)j^{-1}$ . Так как  $\Gamma_m$  – граф общей серии, то

$$m = r^2 + r + 1 = (-(2l + i)j^{-1})^2 + (-(2l + i)j^{-1}) + 1 =$$

$$= (4l^2 + 4li + i^2)j^{-2} - (2l + i)j^{-1} + 1 = ((4l^2 + 4li + i^2) - (2l + i)j + j^2)j^{-2}.$$

Так как  $n$  делит  $m$ , то в кольце  $\mathbb{Z}_n$  имеем  $m = 0$ , что равносильно

$$((4l^2 + 4li + i^2) - (2l + i)j + j^2)j^{-2} = 0.$$

Так как  $j$  имеет в кольце  $Z_n$  обратный, то  $j^{-2}$  не является делителем нуля. Поэтому из последнего равенства получаем  $(4l^2 + 4li + i^2) - (2l + i)j + j^2 = 0$ . Это означает, что в кольце  $Z$  имеет равенство  $(4l^2 + 4li + i^2) - (2l + i)j + j^2 = sn$  для некоторого  $s \in Z$ , откуда  $sn = 4l^2 + 2(2i - j)l + (j^2 - ij + i^2)$ . Ясно, что  $s \geq 1$ .

Допустим,  $s > 1$ . Имеем  $n \geq 3l^2 + 3l + 1$ . Это вытекает из **Леммы 1.1**. Также  $(4l^2 + 4li + i^2) - (2l + i)j + j^2 = (3l^2 + l^2) + 3l + (4il - 3l) - 2jl + j^2 - ij + i^2 = (3l^2 + 3l + 1) + l^2 + (4i - 3)l - 2jl + j^2 - ij + i^2 - 1 = sn$ .

Тогда

$$l^2 + (4i - 3)l - 2jl + j^2 - ij + i^2 - 1 \geq (s - 1)n \geq 3l^2 + 3l + 1,$$

то есть  $l^2 + (4i - 3)l - 2jl + j^2 - ij + i^2 - 1 \geq 3l^2 + 3l + 1$ . Это неравенство равносильно неравенству

$$2l^2 + (6 - 4i + 2j)l - (j^2 - ij + i^2 - 2) \leq 0. \quad (2.1)$$

Найдём решения неравенства (2.1). Его дискриминант

$$D = 4(3j^2 + 8i^2 - 8ij + 8j - 12i + 5).$$

Пусть  $i = 1$ . Тогда  $D = 4(3j^2 - 1)$ . Поэтому

$$l \in \left[ \frac{-j - 1 - \sqrt{3j^2 - 1}}{2}; \frac{-j - 1 + \sqrt{3j^2 - 1}}{2} \right],$$

в частности,  $l \leq \frac{-j-1+\sqrt{3j^2-1}}{2} < \frac{-j-1+\sqrt{4j^2}}{2} = \frac{-j-1+2j}{2}$ , то есть  $l \leq \frac{j-1}{2} < j -$  противоречие с условием  $l \geq j$ , и  $s = 1$ .

При  $i = 2$ , имеем  $D = 4(3j^2 - 8j + 13)$  и

$$l \in \left[ \frac{-j + 1 - \sqrt{3j^2 - 8j + 13}}{2}; \frac{-j + 1 + \sqrt{3j^2 - 8j + 13}}{2} \right].$$

Предположим,  $3j^2 - 8j + 13 > 4j^2$ . Тогда  $j^2 + 8j - 13 < 0$ . Решение этого неравенства – следующее:  $l \in \left( \frac{-4-\sqrt{29}}{2}; \frac{-4+\sqrt{29}}{2} \right)$ , в частности,  $l < \frac{-4+\sqrt{29}}{2} < \frac{-4+6}{2} = 1$ , то есть  $l < 1$  – противоречие. Значит,  $3j^2 - 8j + 13 \leq 4j^2$ . Поэтому  $l \leq \frac{-j+1+\sqrt{3j^2-8j+13}}{2} \leq \frac{-j+1+\sqrt{4j^2}}{2} = \frac{-j+1+2j}{2}$ , то есть  $l \leq \frac{j+1}{2} < j$  – снова противоречие.

Таким образом,  $s = 1$  и  $n = 4l^2 + 2(2i - j)l + (j^2 - ij + i^2)$ ,  $i = 1, 2$ .

Допустим, вершина  $l + i$  совпадает с вершиной  $-l + (r + 1)j$  юго-восточной стороны основания графа:  $-l + (r + 1)j = l + i$ . В  $Z_n$  существует  $j^{-1}$ . Поэтому имеет место следующая цепочка равносильностей:

$$-l + (r + 1)j = l + i \Leftrightarrow (r + 1)j = 2l + i \Leftrightarrow r + 1 = (2l + i)j^{-1} \Leftrightarrow r = (2l + i)j^{-1} - 1.$$

Тогда

$$m = r^2 + r + 1 = ((2l + i)j^{-1} - 1)^2 + ((2l + i)j^{-1} - 1) + 1 = ((2l + i)j^{-1})^2 - 2(2l + i)j^{-1} + 1 + (2l + i)j^{-1} = ((2l + i)j^{-1})^2 - (2l + i)j^{-1} + 1,$$

и мы приходим к равенству  $m = ((2l + i)j^{-1})^2 - (2l + i)j^{-1} + 1$ , имеющему место при выполнении другого условия:  $-l - rj = l + i$ . Отсюда вытекает, что и при выполнении данного условия утверждение предложения имеет место.

Таким образом, снова  $s = 1$ , и предложение доказано.

**Предложение 2.4.** Если  $n, l$  и  $j$  – такие натуральные числа, что имеют место соотношения (1.1) и  $(n, j) = 1$ , то существует граф  $\Gamma_n$  с параметрами  $(l + i, j)$ ,  $i = 1, 2$ , а также число  $r$  такое, что для числа  $m = r^2 + r + 1$  граф  $\Gamma_m$  является графом общей серии, для которого граф  $\Gamma_n$  является фактор-графом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим что имеют место соотношения (1.1) и  $(n, j) = 1$ . Имеем

$$\begin{aligned} n &= 4l^2 + 2(2i - j)l + (j^2 - ij + i^2) = (4l^2 + 4li + i^2) - (2l + i)j + j^2 = \\ &= ((4l^2 + 4li + i^2)j^{-2} - (2l + i)j^{-1} + 1)j^2 = (((2l + i)j^{-1})^2 - (2l + i)j^{-1} + 1)j^2. \end{aligned}$$

Тогда  $n = (((2l + i)j^{-1})^2 - (2l + i)j^{-1} + 1)j^2$ , то есть  $j^{-2}n = ((2l + i)j^{-1})^2 - (2l + i)j^{-1} + 1$  (это равенство – равенство в  $\mathbb{Z}_n$ ). Введём обозначение  $r = -(2l + i)j^{-1}$ . Тогда в кольце  $\mathbb{Z}_n$  имеем  $n = r^2 + r + 1 = 0$ , то есть для некоторого  $s \in \mathbb{Z}$  имеем  $r^2 + r + 1 = sn$ . Так как  $r = -(2l + i)j^{-1}$ , то в  $\mathbb{Z}$  ему соответствует некоторый вычет  $r$  по модулю  $n$ , а в равенстве  $r^2 + r + 1 = sn$  имеем  $n \in \mathbb{Z}$ . Оно либо чётное, либо нечётное, то есть  $r \in \{2k, 2k + 1\}$ . Тогда существует граф  $\Gamma_m$  с  $m = r^2 + r + 1 = sn$ , и  $\Gamma_n$  – его фактор-граф. В силу  $r = -(2l + i)j^{-1}$  имеем  $-l - rj = l + i$  (в  $\mathbb{Z}_n$ ), то есть вершина  $l + i$  графа  $\Gamma_n$  совпадает с вершиной  $-l - rj$  юго-западной стороны основания графа, и граф  $\Gamma_n$  является графом с параметрами  $(l + i, j)$ ,  $i = 1, 2$ .

Предложение доказано.

Для завершения доказательства утверждения пункта **(4) Теоремы** докажем последнюю часть этого утверждения.

Рассмотрим (1.1) как уравнение относительно  $l$ :

$$4l^2 + 2(2i - j)l + (j^2 - ij + i^2) - n = 0, \quad (2.2)$$

и относительно  $j$ :

$$j^2 - (2l + i)j + 4l^2 + 4il + i^2 - n = 0. \quad (2.3)$$

Дискриминант (2.2)  $D = (4i - 2j)^2 - 4 \cdot 4(j^2 - ij + i^2 - n) = 4(4n - 3j^2)$  и решения:

$$l_{1,2} = \frac{j - 2i \pm \sqrt{4n - 3j^2}}{4}.$$

Покажем, что  $j - 2i < \sqrt{4n - 3j^2}$ . Предположим,  $j - 2i \geq \sqrt{4n - 3j^2}$ . Тогда простыми преобразованиями приходим к неравенству  $j^2 - ij + i^2 \geq n$ , что противоречит (2.2). Поэтому  $j - 2i < \sqrt{4n - 3j^2}$ , и тогда  $l = \frac{j - 2i + \sqrt{4n - 3j^2}}{4}$ .

Теперь выписываем дискриминант уравнения (2.3) и его решения:

$$j_{1,2} = \frac{(2l + i) \pm \sqrt{4n - 3(2l + i)^2}}{2}.$$

Случай  $j = \frac{(2l + i) + \sqrt{4n - 3(2l + i)^2}}{2}$  невозможен, так как иначе  $2j = (2l + i) + \sqrt{4n - 3(2l + i)^2}$ , откуда  $j > l$ , в то время, как  $j \leq l$ .

Наконец,  $m = sn$  для некоторого  $s \in \mathbb{N}$ . Из этого равенства получаем уравнение  $4k^2 + ak + b - sn = 0$  относительно  $k$ , где  $(a, b) \in \{(2, 1), (6, 3)\}$  (в зависимости от того,  $r = 2k$  или  $r = 2k + 1$  в равенстве  $m = r^2 + r + 1$ ). Его дискриминант  $D = a^2 - 16(b - sn)$ . В обоих случаях непосредственно проверяется, что  $D = 4(4sn - 3)$ . Отсюда получаем, что  $4sn - 3$  является полным квадратом целого числа, и

Утверждение пункта **(4) Теоремы** доказано.

Напоминаем, что мы иногда не будем отличать двойники одной и той же вершины, и ссылаться на них как к одной и той же вершине, как это будет ниже.

**Предложение 2.5.** *Граф  $\Gamma_n$  первого класса относится к графам первого вида. При этом, если  $l + 1$  в  $\overline{\Delta_l(0)}$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-восточной стороны со стороны вершины шести часов, то это – граф с левосторонними пристроями, а если  $l + 1$  в  $\overline{\Delta_l(0)}$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-западной стороны со стороны вершины шести часов, то это – граф с правосторонними пристроями. Далее, если при делении на 3 число  $l - j - 1$  даёт остатки 1 или 2, то правильный треугольный паркет графа получается пристроем к  $\overline{\Delta_l(x)}$  одинаковых многоступенчатых сетчатых трапеций с основанием  $l - j - 1$ , причём в первом случае (в случае остатка 1) трапеции являются островершинами, а во втором случае – с верхним основанием длины 1. В случае, когда  $l - j - 1$  делится на 3 нацело, четыре из пристроев-трапеций к  $\overline{\Delta_l(x)}$  имеют верхние основания длины 2, а два – такие же пристрои с пририсованными к левым площадкам верхних оснований треугольниками; последние два пристроя можно пристроить к  $\overline{\Delta_l(x)}$  так, чтобы они были диаметрально противоположны друг к другу.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $\Gamma_n$  – граф первого класса, то есть имеет параметры  $(l + 1, j)$ . Предположим,  $l + 1$  совпадает с  $j$ -й вершиной от вершины шести часов юго-западной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$ , то есть  $l + 1 = -l - rj$ . Рассмотрим индуцированный подграф графа  $\Gamma_n$ , представляющий собой правильный треугольник, пристроенный к юго-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$ , с основанием с концами в вершинах восьми часов и  $l + 1$ . Вершины треугольника обозначим через  $A$  – вершина восьми часов,  $B$  – вершина  $l + 1$ , и  $C$  – третья вершина. Мы утверждаем, что вершины графа из треугольника не лежащие в упомянутом основании, не лежат в  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Если  $x$  – вершина стороны  $BC$ , то вершина  $x - 1$  лежит на северо-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$  в направлении от вершины двенадцати часов. Действительно, так как вершина  $B$  – это вершина  $l + 1$ , то под ней лежит вершина  $l$ , совпадающая с вершиной двенадцати часов у  $\overline{\Delta_l(0)}$  (см. рис.1.4). В юго-западном направлении от  $B$  в сторону  $C$  первой лежит вершина  $-l - rj - (r + 1) = l + 1 - (r + 1) = l - r - 1$  – в точности вершина над  $l - r - 1$ , лежащей на северо-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Поэтому непосредственно под  $l - r$ , лежащей на  $BC$ , лежит  $l - r - 1$ . Аналогично, непосредственно под  $x \in BC$  лежат вершины  $x - 1$  из северо-западной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Значит, все вершины стороны  $BC$ , кроме вершины  $B$ , не лежат на  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Ясно, что и вершины графа из треугольника, лежащие выше  $BC$ , кроме вершины стороны  $AB$ , не лежат в  $\overline{\Delta_l(0)}$ .

Подсчитаем число вершин графа в треугольнике  $ABC$ , не лежащих в  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Заметим, что длина стороны треугольника равна  $k = l - j$ . Значит, количество вершин графа на стороне треугольника равно  $l - j + 1$ . Поэтому количество вершин графа, лежащих в треугольнике  $ABC$  и на его сторонах, равно

$$(k + 1) + k + (k - 1) + \dots + 2 + 1 = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = \frac{(l - j + 1)(l - j + 2)}{3}.$$

Значит, число вершин графа в треугольнике  $ABC$  и на его сторонах, не лежащих в  $\overline{\Delta_l(0)}$ , равно

$$\frac{(l-j+1)(l-j+2)}{2} - (l-j+1) = \frac{(l-j+1)(l-j+2) - (l-j+1)}{2} = \frac{(l-j+1)(l-j)}{2}.$$

Ясно, что треугольник  $A'B'C'$ , центрально симметричный треугольнику  $ABC$  относительно нуля, также состоит из вершин, не содержащихся в  $\overline{\Delta_l(0)}$ .

Общее количество вершин в рассмотренных двух треугольниках-пристроих  $ABC$  и  $A'B'C'$ , равно  $(l-j+1)(l-j) = l^2 - 2jl + j^2 + l - j$ . Поэтому всего в  $\overline{\Delta_l(0)}$  и его двух пристроях-треугольниках содержатся

$$3l^2 + 3l + 1 + l^2 - 2jl + j^2 + l - j = 4l^2 + 4l + j^2 - 2jl - j + 1$$

– в точности столько, сколько вершин в  $\Gamma_n$  при  $i = 1$  (см. **Предложение 2.3**, соотношение (1.1)). Значит, в качестве максимального правильного треугольного паркета графа  $\Gamma_n$  можно взять окрестность  $\overline{\Delta_l(0)}$  с пристроенными к нему следующим образом треугольниками со стороной длины  $l-j$ : один треугольник пристроен к юго-западной стороне со стороны вершины восьми часов, другой центрально симметричен ему относительно вершины 0.

Предположим,  $l+1$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-восточной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$  со стороны вершины шести часов, то есть  $l+1 = -l + (r+1)j$ . Заметим, что данная ситуация симметрична предыдущему случаю относительно вертикальной оси  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Поэтому, как легко видеть, предыдущие рассуждения, только "симметричные", приводят к тому, что в этом случае в качестве максимального треугольного паркета графа  $\Gamma_n$  можно взять окрестность  $\overline{\Delta_l(0)}$  с пристроенными к нему следующим образом треугольниками со стороной длины  $l-j$ : один треугольник пристроен к юго-восточной стороне со стороны вершины четырёх часов, другой – центрально симметричен ему относительно вершины 0. Но тогда эти треугольники поворотом на угол  $\pi/3$  можно перевести в треугольники, пристроенные к юго-западной и северо-восточной сторонам соответственно со стороны вершин шести и двенадцати часов.

Таким образом, в качестве максимального правильного паркета графа  $\Gamma_n$  первого класса можно взять  $\overline{\Delta_l(x)}$  (относительно любой вершины  $x$ !) с пристроями-треугольниками со сторонами длины  $l-j$ , пристроенными к северо-восточной и юго-западной сторонам либо со стороны вершин соответственно двенадцати и шести часов, либо со стороны вершин соответственно двух и восьми часов.

Предположим, первое: треугольники пристроены к северо-восточной и юго-западной сторонам со стороны вершин соответственно двенадцати и шести часов (то есть с этими вершинами совпадают по одному из вершин треугольников). По аналогии с вышеизложенным относительно вершины 0, эти треугольники обозначим соответственно через  $ABC$  и  $A'B'C'$ , где  $A$  – вершина шести часов,  $C$  – вершина, не лежащая на  $\overline{\Delta_l(0)}$ ,  $A'B'C'$  – треугольник, центрально симметричный треугольнику  $ABC$  относительно вершины 0 с соответствующими вершинами:  $A'$  симметрична  $A$  и т.д. Это соответствует тому, что  $l+1$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-восточной стороны со стороны вершины шести часов (с вершиной  $B$ ) окрестности  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Так как длины сторон треугольников равны  $l-j$ , то сторона  $A'C'$  на северо-западной стороне треугольника  $A'B'C'$  – это отрезок  $[l, l + (r+1)(l-j)]$ . Над этим отрезком находится отрезок

$[l + 1, l + (r + 1)(l - j) + 1]$ . Заметим, что

$$l + (r + 1)(l - j) + 1 = (l + 1) + (r + 1)(l - j) = -l + (r + 1)j + (r + 1)(l - j) = rl,$$

то есть вершина  $l + (r + 1)(l - j) + 1$  совпадает с вершиной четырёх часов  $rl$ . Другими словами, отрезок  $[l + 1, l + (r + 1)(l - j) + 1]$  является частью длины  $l - j$  юго-восточной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$ , взятой со стороны вершины четырёх часов. Следовательно, если применить к максимальному правильному паркету поворот на угол  $-2\pi/3$ , то северо-восточная сторона  $\overline{\Delta_l(0)}$  перейдёт в юго-восточную так, что вершина  $l$  перейдёт в вершину  $rl$ . Поэтому сторона рассматриваемого треугольника-пристроя, лежащая на северо-восточной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$ , перейдёт в отрезок  $[l + 1, l + (r + 1)(l - j) + 1]$ . Мы утверждаем, что сам отрезок  $[l + 1, l + (r + 1)(l - j) + 1]$  перейдёт в отрезок, составленный из вершин, лежащих в направлениях двух часов в окрестностях вершин из стороны  $B'C'$  рассматриваемого треугольника-пристроя, который обозначим через  $v$ . Действительно, с одной стороны, этот треугольник при поворотах на углы, кратные  $2\pi/3$ , переходит в такие же треугольники, пристроенные симметрично относительно поворотов на эти углы к юго-восточной и западной сторонам. С другой стороны, вершины треугольника не могут переходить в вершины из  $\overline{\Delta_l(0)}$ , кроме как только в вершины из  $\Delta_l(0)$ , а также в вершины графа из диаметрально противоположного треугольника. Поэтому при повороте на углы, кратные  $2\pi/3$ , вершины графа из треугольника  $\Delta$ , ограниченного прямой, содержащей основание исходного треугольника-пристроя и прямыми, содержащими отрезки  $[l + 1, l + (r + 1)(l - j) + 1]$  и  $v$ , переходят в вершины графа из этого же треугольника. В частности, прямая, содержащая  $[l + 1, l + (r + 1)(l - j) + 1]$ , переходит в прямую, содержащую  $v$ .

Нетрудно видеть, что полученный треугольник  $\Delta$  – это правый треугольник с трапециями, который пристраивается к  $\overline{\Delta_l(0)}$  для получения максимального евклидово-правильного паркета графа  $\Gamma_n$  первого вида с левосторонними пристроями. То есть если  $l + 1$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-восточной стороны со стороны вершины шести часов, то граф  $\Gamma_n$  является графом первого вида с левыми пристроями. При этом основание треугольника равно  $l - j + 2$ , а длины оснований составляющих трапеций равны  $l - j + 2 - 3 = l - j - 1$ . Поэтому утверждение второй части предложения вытекает из определения этого треугольника.

Теперь предположим, второе: треугольники пристроены к северо-восточной и юго-западной сторонам  $\overline{\Delta_l(0)}$  от вершин соответственно двух и восьми часов (то есть с этими вершинами совпадают по одному из вершин треугольников). Возьмём треугольник, пристроенный к северо-восточной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Так как длина стороны треугольника равна  $l - j$ , то его сторона на восточной стороне треугольника – это отрезок  $[(r + 1)l, (r + 1)l + l - j]$ . Северо-восточными соседями вершин этого отрезка являются соответственно вершины отрезка  $[(r + 1)l + r + 1, (r + 1)l + l - j + r + 1] = [(r + 1)(l + 1), (r + 1)(l + 1) + l - j]$ . Заметим, что в силу  $l + 1 = -l - rj$  имеем

$$\begin{aligned} (r + 1)(l + 1) + l - j &= (r + 1)(-l - rj) + l - j = -rl - l - r^2j - rj + l - j = \\ &= -rl - (r^2 + r + 1)j = -rl, \end{aligned}$$

то есть вершина  $(r + 1)(l + 1) + l - j$  совпадает с вершиной десяти часов  $-rl$ . Другими словами, отрезок  $[(r + 1)(l + 1), (r + 1)(l + 1) + l - j]$  является частью длины  $l - j$  западной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$  взятой со стороны вершины десяти часов.

Далее, рассуждая как в предыдущем случае, получаем, что прямые, содержащие северо-восточную сторону  $\overline{\Delta_l(0)}$ , отрезок  $[(r+1)(l+1), (r+1)(l+1)+l-j]$  и отрезок, полученный при повороте  $\overline{\Delta_l(0)}$  на угол  $-2\pi/3$  из отрезка  $[l+rj, (r+1)l]$  (что индуцирует соответствующий поворот рассматриваемого треугольника на угол  $-2\pi/3$ ), ограничивает левый треугольник с трапециями, который пристраивается к  $\overline{\Delta_l(0)}$  для получения максимального евклидово-правильного паркета графа  $\Gamma_n$  первого вида с правосторонними пристроями. При этом так же, как и в предыдущем случае, основание этого треугольника равно  $l-j+2$ , и снова утверждение второй части предложения вытекает из определения этого треугольника.

Предложение доказано полностью.

**Предложение 2.6.** *Граф  $\Gamma_n$  второго класса относится к графам второго вида. При этом, если  $l+2$  в  $\overline{\Delta_l(0)}$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-западной стороны от вершины шести часов, то это – граф с правосторонними пристроями, а если  $l+2$  в  $\overline{\Delta_l(0)}$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-восточной стороны со стороны вершины шести часов, то это – граф с левосторонними пристроями. Далее, если при делении на 3 число  $l-j+1$  даёт остатки 1 или 2, то правильный треугольный паркет графа получается пристроем к  $\overline{\Delta_l(0)}$  одинаковых многоступенчатых сетчатых трапеций с основанием  $l-j+1$ , причём в первом случае (в случае остатка 1) трапеции являются островерхими, а во втором случае – с верхним основанием длины 1. В случае, когда  $l-j+1$  делится на 3 нацело, четыре из пристроев-трапеций к  $\overline{\Delta_l(0)}$  имеют верхние основания длины 2, а два – такие же пристрои с пририсованными к левым площадкам верхних оснований треугольниками; последние два пристроя можно пристроить к  $\overline{\Delta_l(0)}$  так, чтобы они были диаметрально противоположны друг к другу.*

**Доказательство.** Пусть  $\Gamma_n$  – граф второго класса, то есть имеет параметры  $(l+2, j)$ . Предположим,  $l+2$  совпадает с  $j$ -й вершиной со стороны вершины шести часов юго-западной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Рассмотрим индуцированный подграф графа  $\Gamma_n$ , представляющий собой правильный треугольник, пристроенный к юго-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$  с основанием с одним концом в  $l+1$ , а другой конец основания треугольника является юго-западным соседом вершины восьми часов. Длина стороны треугольника равна  $l-j+1$ . По другому: правый треугольник со стороной  $l-j+1$  пристраиваем к юго-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$  со стороны вершины восьми часов и смещаем на одно ребро в юго-западном направлении. Вершины треугольника обозначим через  $A$  – упомянутый сосед вершины восьми часов,  $B$  – вершина  $l+1$ , и  $C$  – третья вершина. Мы утверждаем, что вершины графа из этого треугольника не лежат в  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Если  $x$  – вершина стороны  $BC$ , то вершина  $x-1$  лежит на северо-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$  в направлении от вершины двенадцати часов. Действительно, так как вершина  $B$  – это вершина  $l+1$ , то под ней лежит вершина  $l$ , совпадающая с вершиной двенадцати часов у  $\overline{\Delta_l(0)}$ . В юго-западном направлении от  $B$  в сторону  $C$  первой лежит вершина  $-l-rj-1-(r+1) = l+1-(r+1) = l-r$  – в точности вершина, лежащая над  $l-r-1$ ; а последняя лежит на северо-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Поэтому непосредственно под  $l-r$ , лежащей на  $BC$ , лежит  $l-r-1$ . Аналогично, непосредственно под  $x \in BC$  лежат вершины  $x-1$  из северо-западной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Значит, все вершины стороны  $BC$  не лежат на  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Покажем,

что все вершины графа, лежащие в треугольнике в точности между сторонами  $AB$  и  $BC$  не лежат в  $\overline{\Delta_l(0)}$ , то есть вершины, лежащие западнее стороны  $AC$ , уже лежат в  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Для этого заметим, что вершина  $A$  – это вершина  $-(r+1)l - (r+1) = -(r+1)(l+1)$ . Так как  $l+2 = -l - rj \Leftrightarrow l+1 = -l - rj - 1$ , то

$$\begin{aligned} -(r+1)l - (r+1) &= -(r+1)(l+1) = (r+1)(l+rj+1) = (r+1)(l+1) + (r+1)rj = \\ &= (r+1)(l+1) + (r^2+r)j = (r+1)(l+1) - j = r(l+1) + (l-j+1). \end{aligned}$$

Полученная вершина  $r(l+1) + (l-j+1)$  – это вершина, лежащая непосредственно справа от восточной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$ , а именно, это  $-(l-j)$ -я вершина вверх от северо-восточного соседа вершины четырёх часов. Значит, все вершины левее стороны  $AC$  будут уже лежать в  $\overline{\Delta_l(0)}$ .

Таким образом, все вершины графа, лежащие в точности между сторонами  $AB$  и  $BC$ , не лежат в  $\overline{\Delta_l(0)}$ , в то время, как внешние соседи вершин сторон треугольника уже лежат в  $\overline{\Delta_l(0)}$ .

Теперь, пристроив к  $\overline{\Delta_l(0)}$  центрально-симметричный к  $ABC$  треугольник, получим часть правильного треугольного паркета графа.

Покажем, что если к сторонам  $\overline{\Delta_l(0)}$  пристроить по направлению хода часовой стрелки "зубчики", как в шестерне, то  $\overline{\Delta_l(0)}$  с этими "зубчиками" в совокупности с пристроенными двумя треугольниками образуют правильный треугольный паркет графа  $\Gamma_n$  второго класса.

Прежде всего заметим, что  $j$  – нечётное число. Это вытекает из формулы зависимости  $j$  от  $l$ ,  $n$  и  $i$ , полученной в пункте (4) доказываемой нами теоремы:

$$j = \frac{(2l+i) \pm \sqrt{4n-3(2l+i)^2}}{2}.$$

Действительно, в нашем случае  $i = 2$  получаем  $j = (l+1) + \sqrt{n-3(l+1)^2}$ , и так как  $n$  (как делитель нечётного числа  $m = r^2 + r + 1$ ) является нечётным, то  $l+1$  и  $n - 3(l+1)^2$  имеют разные чётности. Поэтому  $j$  нечётно.

Следовательно, между треугольником-пристроим к юго-западной стороне и вершиной шести часов через одну пристраивается  $(j-1)/2$  вершин, которые являются "зубчиками", и вершины оснований "зубчиков" имеют номера  $(s, s+1)$ ,  $s$  – чётно, являющееся номером вершины со стороны вершины шести часов у  $\Delta_l(0)$ . При этом все вершины юго-западной стороны окрестности  $\Delta_{l+1}(0)$  от вершины  $l+1$  в сторону вершины шести часов повторяют вершины северо-восточной стороны  $\Delta_{l+1}(0)$  от вершины  $-l-1 = l+rj+1$  до вершины двенадцати часов. И вершины, которые при пристрое "зубчиков" к юго-западной стороне пропускались, как раз оказываются "зубчиками", пристроенными к северо-восточной стороне. Поэтому "зубчики" на диаметрально противоположных юго-западной и северо-восточной сторонах  $\overline{\Delta_l(0)}$  попарно не совпадают. Ясно, что, аналогично, "зубчики", пристроенные к другой стороне, попарно не совпадают с "зубчиками" из диаметрально противоположной стороны. Наконец, заметим, что вообще, любой "зубчик" не совпадает ни с каким из других.

Таким образом, объединение  $\overline{\Delta_l(0)}$ , двух треугольников-пристроим, "зубчиков", пристроенных между треугольником-пристроим и соответствующей вершиной шестиугольника  $\Delta_l(0)$ , является частью правильного треугольного паркета графа. При этом паркет в данном случае отличается от паркета графа первого класса тем, что пристроенные к  $\Delta_l(0)$  треугольники как бы смещены

на длину одного ребра в юго-западном (треугольник, пристроенный к юго-западной стороне  $\Delta_l(0)$ ) и северо-восточном (треугольник, пристроенный к северо-восточной стороне  $\Delta_l(0)$ ) направлениях.

Теперь подсчитаем общее число вершин графа в полученной части максимального треугольного паркета. Имеем  $|\overline{\Delta_l(0)}| = 3l^2 + 3l + 1$ ,  $\frac{(l-j+2)(l-j+3)}{2} = l^2 - 2jl + j^2 + 5l - j + 6$  – количество вершин в одном треугольнике-пристрой,  $6 \cdot (j-1)/2 = 3(j-1)$  – общее количество пристроенных "зубчиков". Значит, общее количество вершин в построенной части паркета равно

$$(3l^2 + 3l + 1) + (l^2 - 2jl + j^2 + 5l - j + 6) + 3(j-1) = 4l^2 + 8l - 2jl + j^2 - 2j + 4$$

– в точности столько, сколько вершин в  $\Gamma_n$  при  $i = 2$  (см. **Предложение 2.3**, соотношение (1.1)).

Значит, в качестве максимального правильного треугольного паркета графа  $\Gamma_n$  при  $i = 2$  можно взять окрестность  $\overline{\Delta_l(0)}$  с пристроенными к нему треугольниками со стороной длины  $l - j + 1$  и пристроенными "зубчиками".

Осталось заметить, что пристроенные треугольники являются левыми треугольниками с трапециями. А именно, левый треугольник получается, если к треугольнику  $ABC$  присоединить соседней его сторон, не лежащих в самом треугольнике, дополнив недостающими вершинами до треугольника. Тем самым у этого левого треугольника одна вершина совпадает  $(j-1)$ -й вершиной со стороны вершины шести часов у  $\Delta_l(0)$ , а вторая – лежит на прямой, содержащей юго-западную сторону  $\Delta_l(0)$ , на расстоянии 2 от вершины восьми часов вне  $\Delta_l(0)$  (длина стороны этого треугольника равна  $l-j+3$ ). Действительно, из вышеизложенного вытекает, что юго-восточная сторона треугольника-пристроя к юго-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$  без вершины  $l+1$  пристраивается к северо-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$ , западная сторона без нижней вершины – к восточной стороне  $\Delta_l(0)$ , северо-восточная сторона уже пристроена к юго-восточной. Причём в силу того, что вершины отрезка  $AC$  пристраиваются к восточной стороне  $\Delta_l(0)$ , ближайшая к вершине восьми часов вершина трапеции – пристроя к юго-западной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$ , – находится непосредственно под ней (под вершиной восьми часов). Поэтому, если рассмотреть треугольник, центрально симметричный к данному (то есть пристроенный к северо-восточной стороне  $\overline{\Delta_l(0)}$ ) то треугольник является треугольником с левыми трапециями, которые пристраиваются к соответствующим сторонам  $\overline{\Delta_l(0)}$ . А именно, северо-восточная трапеция-пристрой пристроена к правому концу северо-восточной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Ясно, что можно считать трапеции пристроенными к шестерне  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Таким образом,  $\Gamma_n$  – граф с правосторонними пристроями.

Предположим,  $l+2$  совпадает с  $j$ -й вершиной юго-восточной стороны  $\overline{\Delta_l(0)}$  от вершины шести часов. Ясно, что данная ситуация симметрична предыдущему случаю относительно вертикальной оси  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Поэтому предыдущие рассуждения, только "симметричные", приводят к тому, что в этом случае в качестве максимального треугольного паркета графа  $\Gamma_n$  можно взять шестерню  $\overline{\Delta_l(0)}$  с пристроенными к нему следующим образом треугольниками со стороной  $l-j+1$ : один треугольник пристроен к юго-восточной стороне со стороны вершины четырёх часов так, северо-восточная вершина стороны, примыкающей к  $\overline{\Delta_l(0)}$ , является юго-восточным соседом вершины четырёх часов у  $\overline{\Delta_l(0)}$ , другой центрально симметричен ему относительно вершины 0.

Таким образом, в качестве максимального правильного паркета графа  $\Gamma_n$  второго класса можно взять  $\widetilde{\Delta_l(0)}$  с пристроями-треугольниками со сторонами длины  $l - j + 1$ , пристроенными к северо-восточной и юго-западной сторонам либо от вершин соответственно двенадцати и шести часов, либо от вершин соответственно двух и восьми часов, как описано выше.

Наконец, остаётся, как и выше, заметить, что пристроенные треугольники являются правыми треугольниками с трапециями, откуда ясно, что трапеции будут пристраиваться к соответствующим сторонам  $\Delta_l(0)$ . Остальное вытекает из определения треугольника с трапециями.

Предложение доказано.

Утверждения **Предложений 2.5** и **2.6** доказывают утверждения **(5)** и **(6) Теоремы**.

Докажем утверждение **(7) Теоремы**, то есть найдём массивы пересечений графов первого и второго классов, предварительно доказав следующую лемму:

**Лемма 2.7.** *Если граф  $\Gamma_m$  диаметра  $d \geq 3$  имеет евклидово-правильную окрестность радиуса  $l$ , то он имеет массив пересечений вида*

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, b_l(x, y), \dots, b_{d-1}(x, y); 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, c_l(x, y), \dots, c_d(x, y)\}. \quad (2.4)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть граф  $\Gamma_n$  имеет максимальную евклидово-правильную окрестность радиуса  $l$ . Заметим, что граф  $\Gamma_n$  является реберно-регулярным, так как любое ребро содержится в двух треугольниках, то есть  $\lambda = 2$ . Но вполне регулярным он не является, так как две вершины на расстоянии два могут иметь либо одного, либо двух общих соседей, то есть  $\mu(x, y) \in \{1; 2\}$ .

Как мы уже заметили, если  $d(x, y) = 1$  то  $a_1(x, y) = \lambda = 2$ . Тогда  $b_1(x, y) = k - \lambda - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ .

Пусть  $2 \leq i < l$  и  $d(x, y) = i$ . Ясно, что если  $y - i$ -вершина первого вида относительно  $x$ , то  $a_i(x, y) = 2$ ,  $b_i(x, y) = 3$  и  $c_i(x, y) = 1$ , а если  $y - i$ -вершина второго вида относительно  $x$ , то  $a_i(x, y) = 2$ ,  $b_i(x, y) = 2$ ,  $c_i(x, y) = 2$ .

Таким образом, для всех  $i \in 2, \dots, l - 1$  имеем  $b_i(x, y) = \binom{3}{2}$  и  $c_i(x, y) = \binom{1}{2}$ .

Лемма доказана.

Согласно **Лемме 2.7** массив пересечений графа  $\Gamma_n$  имеет вид (2.4). Так что в массиве пересечений достаточно подсчитать  $b_i(x, y)$ ,  $c_i(x, y)$  при  $i \geq l$ . В силу **Теоремы А** о группе автоморфизмов графа эти числа пересечений достаточно подсчитать для вершин из северо-восточного пристроя. Но прежде приведём общие факты о числах пересечений, касающиеся графов обоих классов.

Пусть  $L$  – длина основания пристроя-трапеции в правильном треугольном паркете графа. В связи с тем, что при  $L < 4$  рис.1.5 – 1.7 получают очевидные специфические виды, отдельно рассмотрим случаи  $L \geq 4$  и  $L < 4$ .

**Предложение 2.8.** *Пусть  $\Gamma_n$  – граф произвольного класса,  $L$  – длина основания пристроя-трапеции в правильном паркете,  $L \geq 4$ ,  $l$  – радиус максимальной евклидово-правильной окрестности графа  $\Gamma_n$ . Тогда для вершин  $y$ , лежащих в пристрое-трапеции к  $\Delta_l(0)$  на расстоянии  $i > l$  до  $x$ , имеют место следующие равенства:*

$$b_i(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_i(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ для всех } i = l + 1, \dots, l + t - 1,$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{2}{1}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \not\equiv 0 \pmod{3},$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{1}{0}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \equiv 0 \pmod{3},$$

$$c_{l+t+1}(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{при } L \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 & \text{при } L \equiv 1 \pmod{3}, \\ \binom{2}{4} & \text{при } L \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

$t$  – вообще говоря, неполное частное от деления  $L$  на 3.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $L \geq 4$  и  $y \in \Gamma_i(x)$  лежит внутри пристроя-трапеции к  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Тогда она лежит в некотором ярусе трапеции, и она – вершина второго вида для  $x$ . Поэтому если  $d(x, y) = i$ , то  $b_i(x, y) = c_i(x, y) = 2$ .

Таким образом, если  $d(x, y) = i$  и  $y$  лежит внутри пристроя к  $\overline{\Delta_l(0)}$ , то  $b_i(x, y) = c_i(x, y) = 2$ .

Пусть  $y \in \Gamma_i(x)$  лежит на ступеньках пристроя. Тогда  $d(x, y) > l$ ,  $y$  лежит на ступеньке некоторого  $j$ -го яруса и  $d(x, y) = l + j$ ,  $j \leq t$ . Допустим,  $y$  – концевая ступенька  $j$ -го яруса западной стороны (на рис.1.5 – 1.7 она обозначена через  $y_1$ ; напомним, что числа пересечений непосредственно считаем для вершин из северо-восточного пристроя; другими словами, мы рассматриваем горизонтальную трапецию треугольника). Тогда в  $[y]$  лежат в точности три вершины пристроя к юго-восточной стороне  $\overline{\Delta_l(x)}$ . Это видно из рис.1.5 – 1.7. При этом две из них лежат на  $j$ -м его ярусе, а одна – на  $(j+1)$ -м его ярусе. Это означает, что расстояния до них от  $x$  равны соответственно  $l+j$  и  $l+j+1$ . Кроме того, три вершины из  $[y]$  лежат в данном пристрое. Две из них являются неконцевыми вершинами  $(j-1)$ -й и  $j$ -й ступенек, то есть расстояния от  $x$  до них равны соответственно  $l+j-1$  и  $l+j$ , а одна является внутренней вершиной данного пристроя, и лежит она на  $(j-1)$ -м ярусе данного пристроя (расстояние от  $x$  до неё равно  $l+j-1$ ). Таким образом, в  $[y]$  лежат две вершины, отстоящих от  $x$  на расстоянии  $l+j-1$ , три вершины, отстоящих от  $x$  на расстоянии  $l+j$  и одна вершина – на расстоянии  $l+j+1$ , в то время, как сама  $y$  лежит от  $x$  на расстоянии  $l+j$ . Поэтому  $a_{l+j}(x, y) = 3$ ,  $b_{l+j}(x, y) = 1$  и  $c_{l+j}(x, y) = 2$ . Отсюда вытекает, что для любых  $x$  и  $y$ , лежащих на расстоянии  $i = l+j$  друг от друга, причём  $y$  – концевая вершина западной ступеньки  $j$ -го яруса северо-восточного пристроя к  $\overline{\Delta_l(x)}$ , имеют место равенства  $a_{l+j}(x, y) = 3$ ,  $b_{l+j}(x, y) = 1$  и  $c_{l+j}(x, y) = 2$ .

Теперь допустим, что  $y$  – неконцевая вершина западной ступеньки  $j$ -го яруса (северо-западного пристроя) (на рис.1.5 – 1.7 она обозначена через  $y_2$ ). Тогда в  $[y]$  лежит только одна вершина из юго-восточного пристроя, причём на  $(j+1)$ -м ярусе (то есть на расстоянии  $l+j+1$  от  $x$ ). Остальные пять вершин из  $[y]$  лежат в данном пристрое. Из них по две вершины лежат в  $(j-1)$ -м и  $j$ -м ярусах, а одна – в  $(j+1)$ -м ярусе (соответственно, расстояния до них от  $x$  равны  $l+j-1$ ,  $l+j$  и  $l+j+1$ ). Таким образом, в  $[y]$  лежит в точности по две вершины, лежащих на расстояниях  $l+j-1$ ,  $l+j$  и  $l+j+1$  от вершины  $x$ . Значит,  $a_{l+j}(x, y) = b_{l+j}(x, y) = c_{l+j}(x, y) = 2$ .

Пусть  $y$  – концевая вершина восточной ступеньки  $j$ -го яруса (на рис.1.5 – 1.7 она обозначена через  $y_3$ ). Тогда в  $[y]$  лежат три вершины западного пристроя, две из которых лежат на  $(j-1)$ -м ярусе, а одна – на  $j$ -м ярусе. Кроме того, три вершины из  $[y]$  лежат в данном пристрое, одна из которых – на  $j$ -м ярусе, а две – на  $(j-1)$ -м ярусе. Таким образом, в  $[y]$  лежат четыре вершины на расстоянии

$l + j - 1$  от  $x$  и две  $-$  на расстоянии  $l + j$ . Это означает, что  $a_{l+j}(x, y) = 2$ ,  $b_{l+j}(x, y) = 0$  и  $c_{l+j}(x, y) = 4$ .

Аналогично имеем, что если  $y$  – неконцевая вершина восточной ступеньки  $j$ -го яруса (на рис.1.5 – 1.7 она обозначена через  $y_4$ ), то  $a_{l+j}(x, y) = 3$ ,  $b_{l+j}(x, y) = 1$  и  $c_{l+j}(x, y) = 2$ .

Заметим, что сказанное справедливо для вершин всех ярусов пристроев-трапеций, отличных от самой верхней. Это означает, что для всех  $i \in \{l + 1, \dots, l + t\}$  при  $L$ , не делящемся на 3, и  $i \in \{l + 1, \dots, l + t - 1\}$  при  $L$ , делящемся на 3, имеем

$$b_i(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_i(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

и нам необходимо отдельно подсчитать  $b_{l+t}(x, y)$  и  $c_{l+t}(x, y)$  при  $L$ , делящемся на 3.

В этом случае необходимо рассмотреть отдельно случаи, когда  $y \in \Gamma_{l+t}(x)$  лежит в каждом из пристроев. При этом в каждом случае отдельно рассматриваются подслучаи, когда  $y$  является левой крайней, средней и правой крайней вершиной  $t$ -го яруса. Стандартный анализ каждого из перечисленных случаев показывает, что

$$b_{l+t}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_{l+t}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдём  $c_{l+t+1}(x, y)$ . Рассматриваем три случая для  $L$  относительно делимости на 3. Пусть  $y$  лежит на верхнем ярусе северо-восточного пристроя к  $\overline{\Delta_l(x)}$ . Это значит, что  $d(x, y) = l + t + 1$ .

В случае, когда  $L$  при делении на 3 даёт остаток 1, в окрестности  $y$  оказываются обе вершины из "пиков" остальных двух пристроев (то есть они лежат на расстоянии  $l + t + 1$  от  $x$ ). Остальные вершины из  $[y]$  лежат на  $t$ -х ярусах всех трёх пристроев, то есть на расстоянии  $l + t$  от  $x$ . Это видно из рис.1.5. Отсюда вытекает, что  $a_{l+t+1}(x, y) = 2$  и  $c_{l+t+1}(x, y) = 4$ .

В случае, когда  $L$  при делении на 3 даёт остаток 2, предположим, что  $y$  – левая концевая вершина верхнего яруса. В этом случае (это видно из рис.1.6) обе вершины верхнего яруса юго-восточного пристроя, и по одной вершине верхних ярусов западного и данного пристроев лежат в  $[y]$ . Остальные две вершины из  $[y]$  лежат на  $t$ -м ярусе данного пристроя. Значит, в этом случае  $c_{l+t+1}(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – правая концевая вершина верхнего яруса, то видим, что по одной вершине из верхних  $((t + 1)$ -х) ярусов и по две вершины из  $t$ -х ярусов западного и данного пристроев лежат в  $[y]$ . Отсюда вытекает, что в этом случае  $a_{l+t+1}(x, y) = 2$  и  $c_{l+t+1}(x, y) = 4$ .

Таким образом,  $c_{l+t+1}(x, y) = 4$ , когда  $L$  при делении на 3 даёт остаток 1, и  $c_{l+t+1}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ , когда  $L$  при делении на 3 даёт остаток 2.

Пусть теперь  $L$  делится на 3 нацело. Напоминаем, что  $y$  лежит на верхнем ярусе северо-восточного пристроя к  $\overline{\Delta_l(x)}$ . Это означает, что в нашем случае  $y$  – вершина пририсованного к левой площадке треугольника. В этом случае все вершины  $[y]$  являются вершинами  $t$ -х ярусов всех пристроев. А это в свою очередь означает, что если  $d(x, y) = l + t + 1$  и  $y$  – вершина треугольника, пририсованного к левой площадке пристроя к  $\overline{\Delta_l(x)}$ , то  $c_{l+t+1}(x, y) = 6$ .

Таким образом,

$$c_{l+t+1}(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{при } L \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 & \text{при } L \equiv 1 \pmod{3}, \\ \binom{2}{4} & \text{при } L \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

Предложение доказано.

Таким образом, дальше считаем  $L < 4$ .

Далее, пусть  $\Gamma_n$  – граф первого класса. Тогда он – либо с левосторонними пристроями, либо с правосторонними (утверждение пункта **(5) Теоремы**). Таким образом, пусть  $\Gamma_n$  – граф первого класса с левосторонними пристроями.

**Предложение 2.9.** *Если  $L < 4$ ,  $\Gamma_n$  – граф первого класса, то он имеет следующие массивы пересечений:*

- 1) при  $L = 0$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}\}$ ,  $d(\Gamma_n) = l$ ;
- 2) при  $L = 1$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{0}{1}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, 6\}$ , если  $n$  делится на 3, и  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, 4\}$ , если  $n$  не делится на 3; в любом случае  $d(\Gamma_n) = l + 1$ ;
- 3) при  $L = 2$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}\}$ ,  $d(\Gamma_n) = l + 1$ ;
- 4) при  $L = 3$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}, 6\}$ ,  $d(\Gamma) = l + 2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу **Леммы 2.7** достаточно найти числа пересечений  $b_i(x, y)$  и  $c_i(x, y)$  для  $i \geq l$ . Пусть  $\Gamma_n$  – граф первого класса. При их вычислении для вершин  $y$ , лежащих на фиксированном расстоянии  $i$  от  $x$ , перебирая их для графа первого класса, будем двигаться параллельно северо-восточной стороне  $\Delta_l(x)$  слева направо.

Если  $L = 0$ , то правильный паркет графа совпадает с его максимальной евклидово-правильной  $l$ -окрестностью. В этом случае массив пересечений известен по [6]:

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}\}.$$

Ясно, что  $d(\Gamma_n) = l$ .

В случае  $L = 1$  имеем, что пристрой представляет собой, вообще говоря, один треугольник. При этом имеют место две возможности. Первая возможность –  $n$  делится на 3, и треугольники пристроены только к двум сторонам правильной окрестности  $\Delta_l(x)$  (к остальным сторонам они тоже пристраиваются, но их вершины, не лежащие на  $\Delta_l(x)$ , будут двойники вершин данных двух треугольников). Схема пристроя приведена на рис.2.1. При этом угловая вершина шестиугольника  $\Delta_l(x)$  совпадает с вершиной  $A$  на рис.2.1.

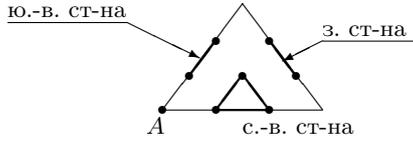


Рис.2.1,  $L = 1$

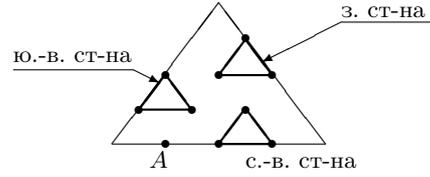


Рис.2.2,  $L = 2$

Пусть  $y \in \Gamma_l(x)$ . Если  $y$  – угловая вершина  $\Delta_l(x)$ , то  $b_l(x, y) = 0$  и  $c_l(x, y) = 1$ .  
 Если  $y$  – любая концевая точка основания (в нашем случае треугольника), то  $b_l(x, y) = 1$ ,  $c_l(x, y) = 2$ .

Наконец, если  $y$  лежит на  $\Delta_l(x)$  вне пристроя (и не является угловой вершиной пристроя), то  $b_l(x, y) = 0$  и  $c_l(x, y) = 2$ .

Таким образом, если  $y \in \Gamma_l(x)$ , то  $b_l(x, y) = \binom{0}{1}$ ,  $c_l(x, y) = \binom{1}{2}$ .

Если  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$ , то все вершины из  $[y]$  лежат на расстоянии  $l$  от  $x$ :  $c_{l+1}(x, y) = 6$ .

Пусть имеет место вторая возможность:  $n$  не делится на 3. Тогда треугольник из трапеций (который на самом деле в нашем случае является "треугольником из треугольников") имеет вид, изображённый на рис.2.2. При этом снова угловую вершину  $\Delta_l(x)$  обозначаем через  $A$ .

Если  $y$  – угловая вершина  $\overline{\Delta_l(0)}$ , то, ясно,  $b_l(x, y) = 1$ ,  $c_l(x, y) = 1$ .

Если  $y$  – левая концевая вершина основания пристроя, то  $b_l(x, y) = 2$ ,  $c_l(x, y) = 2$ .  
 Для правой концевой вершины  $y$  будем иметь  $b_l(x, y) = 1$ ,  $c_l(x, y) = 2$ .

Для остальных  $y \in \Delta_l(x)$  имеем  $b_l(x, y) = 0$ ,  $c_l(x, y) = 2$ .

Таким образом, если  $y \in \Gamma_l(x)$ , то

$$b_l(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_l(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$ . Тогда  $c_{l+1}(x, y) = 4$ .

Окончательно при  $L = 1$  для графа первого вида с левосторонними пристроями получаем следующие два массива пересечений:

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{0}{1}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, 6\},$$

если  $n$  делится на 3, и

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, 4\},$$

если  $n$  не делится на 3,  $d(\Gamma_n) = l + 1$ .

Пусть  $L = 2$ . Тогда имеем схему пристроя – треугольника с трапециями, изображённую на рис.2.3. Снова, как и выше,  $A$  – угловая вершина  $\Delta_l(x)$ .

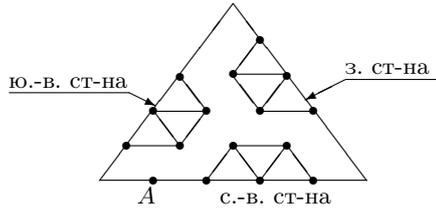


Рис.2.3.  $L = 2$

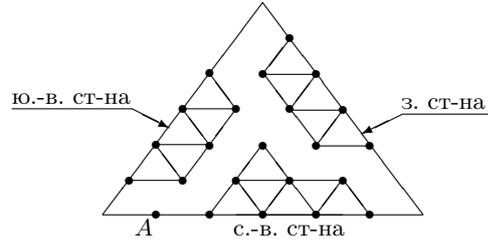


Рис.2.4.  $L = 3$

Пусть  $y \in \Gamma_l(x)$ . Как договорились, идём слева направо. Если  $y$  – угловая вершина  $\Delta_l(0)$ , то  $b_l(x, y) = 1, c_l(x, y) = 1$ .

Пусть  $y$  является левой концевой вершиной основания пристроя. Тогда  $b_l(x, y) = 2, c_l(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – внутренняя вершина основания, то тоже  $b_l(x, y) = c_l(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – правая концевая вершина основания, то  $b_l(x, y) = 1, c_l(x, y) = 2$ .

Наконец, для остальных вершин  $y \in \Gamma_l(x)$  имеем  $b_l(x, y) = 0, c_l(x, y) = 2$ .

Таким образом, если  $\Gamma_n$  – граф первого класса с левосторонними пристроями и  $L = 2$ , то

$$b_l(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_l(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$ . Тогда она является вершиной верхней площадки основания. Если при этом она – левая вершина, то  $c_{l+1}(x, y) = 2$ , а если правая, то  $c_{l+1}(x, y) = 4$ .

Таким образом, для  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$  имеем  $c_{l+1}(x, y) = \binom{2}{4}$ , а, вообще, при  $L = 2$  для графа  $\Gamma_n$  первого класса с левосторонними пристроями имеет место массив пересечений

$$\left\{ 6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4} \right\},$$

$$d(\Gamma_n) = l + 1.$$

Пусть  $L = 3$ . Тогда имеем картинку: рис.2.4. Снова  $A$  – угловая вершина  $\Delta_l(x)$ .

Пусть  $y \in \Gamma_l(x)$ .

Если  $y$  – угловая вершина, то  $b_l(x, y) = 1, c_l(x, y) = 1$ .

Пусть  $y$  является левой вершиной основания пристроя. Тогда  $b_l(x, y) = 2, c_l(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – внутренняя вершина основания, то снова  $b_l(x, y) = c_l(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – правая концевая вершина основания, то  $b_l(x, y) = 1, c_l(x, y) = 2$ .

Наконец, для остальных вершин  $y \in \Gamma_l(x)$  имеем  $b_l(x, y) = 0, c_l(x, y) = 2$ .

Таким образом, если  $\Gamma_n$  – граф первого класса с левосторонними пристроями и  $L = 3$ , то

$$b_l(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_l(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$ . Таких  $y$  имеется три: левая концевая, средняя и правая концевая вершины первого яруса. В первом случае имеем  $b_{l+1}(x, y) = 1, c_{l+1}(x, y) = 2$ . Во втором случае снова  $b_{l+1}(x, y) = 1, c_{l+1}(x, y) = 2$ . В третьем  $b_{l+1}(x, y) = 0, c_{l+1}(x, y) = 4$ .

Таким образом, если  $\Gamma_n$  – граф первого класса с левосторонними пристроями и  $L = 3$ , то

$$b_{l+1}(x, y) = \binom{1}{0}, c_{l+1}(x, y) = \binom{2}{4}.$$

Наконец, если  $y \in \Gamma_{l+2}(x)$ , то  $c_{l+2}(x, y) = 6$ .

Таким образом, если  $\Gamma_n$  – граф первого класса с левосторонними пристроями и  $L = 3$ , то его массив пересечений следующий:

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}, 6\},$$

$$d(\Gamma_n) = l + 2.$$

Предложение доказано.

Попутно заметим, что если  $y \in \Delta_l(x)$  лежит вне пристроя и не является угловой у  $\Delta_l(x)$ , то для неё имеем  $b_l(x, y) = 0$  и  $c_l(x, y) = 2$  независимо от того,  $L < 4$  или  $L \geq 4$ .

Осталось рассмотреть вершины основания пристроев-трапеций в общем случае  $L \geq 4$  вместе с угловой вершиной двенадцати часов у  $\Delta_l(x)$ . Итак, пусть  $y \in \Gamma_l(x)$ .

Если  $y$  – угловая вершина, то  $b_l(x, y) = 1$ ,  $c_l(x, y) = 1$ .

Если  $y$  – левая концевая вершина основания пристроя, то  $b_l(x, y) = 2$ ,  $c_l(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – внутренняя вершина основания пристроя, то также  $b_l(x, y) = c_l(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – правая концевая вершина основания пристроя, то  $b_l(x, y) = 1$ ,  $c_l(x, y) = 2$ .

Заметим, что в случае графа первого класса основание пристроя располагается в точности между вторыми вершинами с концов стороны  $\Delta_l(x)$ . Поэтому массивы пересечений  $\Gamma_n$  в этом случае при  $n < t$  и  $n = t$  формально не отличаются друг от друга.

Таким образом, с учётом замечания по поводу чисел пересечений для вершины  $y \in \Delta_l(x)$ , лежащих вне пристроя, имеем  $b_l(x, y) = \binom{1}{0}$ ,  $c_l(x, y) = \binom{1}{2}$ .

Мы завершили рассмотрение массивов пересечений графов  $\Gamma_n$  первого класса с левосторонними пристроями. В силу **Леммы 1.4** полученные факты о массивах пересечений для данного типа графов справедливы также и для графов первого класса с правосторонними пристроями. Поэтому мы можем сформулировать общее предложение о массиве пересечений графа первого класса:

**Предложение 2.10.** Пусть  $\Gamma_n$  – граф первого класса,  $L$  – длина основания пристроя-трапеции в правильном паркете графа. Тогда граф имеет один из следующих массивов пересечений:

- 1) при  $L = 0$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}\}$ ,  $d(\Gamma_n) = l$ ;
- 2) при  $L = 1$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{0}{1}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, 6\}$ , если  $n$  делится на 3, и  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, 4\}$ , если  $n$  не делится на 3; в любом случае  $d(\Gamma_n) = l + 1$ ;
- 3) при  $L = 2$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}\}$ ,  $d(\Gamma_n) = l + 1$ ;
- 4) при  $L = 3$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}, 6\}$ ,  $d(\Gamma) = l + 2$ .

5) при  $L \geq 4$ :  $\{6, 3, b_2(x, y), \dots, b_{l+t}(x, y); 1, c_2(x, y), \dots, c_{l+t+1}(x, y)\}$ ,

$$\text{где } b_i(x, y) = \binom{3}{2}, c_i(x, y) = \binom{1}{2} \text{ для всех } i = 2, \dots, l-1,$$

$$b_l(x, y) = \binom{1}{\binom{2}{0}}, c_l(x, y) = \binom{\binom{1}{2}}{2},$$

$$b_i(x, y) = \binom{\binom{2}{1}}{0}, c_i(x, y) = \binom{2}{4} \text{ для всех } i = l+1, \dots, l+t-1,$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{\binom{2}{1}}{0}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \not\equiv 0 \pmod{3},$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{1}{0}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \equiv 0 \pmod{3},$$

$$c_{l+t+1}(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{при } L \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 & \text{при } L \equiv 1 \pmod{3}, \\ \binom{2}{4} & \text{при } L \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

$t$  – вообще говоря, неполное частное от деления  $L$  на 3.

Пусть теперь  $\Gamma_n$  – граф второго класса с левосторонними пристроями,  $L < 4$ . Заметим, что в этом случае мы при рассуждениях можем применить рис.2.2 – 2.4. При этом левые концевые вершины оснований горизонтальных "трапеций" являются вершинами двенадцати часов для  $\overline{\Delta_l(x)}$ . Так же из рассуждений, как и в случае графов первого класса, будем получать величины для  $d(\Gamma_n)$ . Последнее оговаривать не будем.

Пусть  $L = 1$ . Тогда  $\Gamma_n$  имеет правильный паркет в форме шестерни.

Пусть  $y \in \Gamma_l(x)$ . Если  $y$  – угловая вершина  $\Delta_l(x)$  (то есть вершина двенадцати часов), то  $b_l(x, y) = 3$  и  $c_l(x, y) = 1$ . Действительно, вершины двух, десяти и двенадцати часов окрестности вершины  $l$  – это соответственно вершины двух "зубчиков", в основании которых лежит вершина  $y = l$ , и вершина  $l+1$ . Все они лежат на расстоянии  $l+1$  от 0. Вершина шести часов в  $[l]$  лежит на расстоянии  $l-1$  от 0. Наконец, две остальные вершины из  $[l]$  лежат в  $\Delta_l(0)$ . Поэтому  $b_l(x, y) = 3$  и  $c_l(x, y) = 1$ .

Если  $y$  не является угловой, то она лежит в основании некоторого "зубчика". Тогда ясно, что  $b_l(x, y) = c_l(x, y) = 2$ .

Таким образом, если  $y \in \Gamma_l(x)$ , то  $b_l(x, y) = \binom{3}{2}$ ,  $c_l(x, y) = \binom{1}{2}$ .

Пусть  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$ . Так как  $\Delta_{l+1}(x) = \Gamma_{l+1}(x)$ , то  $y$  является вершиной "зубчика". Если "зубчик" не является крайним справа (на северо-восточной стороне), то вершины двенадцати и двух часов окрестностей этих "зубчиков" лежат в точности на юго-западной стороне  $\overline{\Delta_l(x)}$ . Поэтому эти вершины совместно с вершинами на северо-восточной стороне в точности составляют  $\Gamma_l(y) \cap \Gamma_l(0)$ , то есть  $c_{l+1}(x, y) = 4$ .

Пусть  $y$  – вершина крайнего справа "зубчика" на северо-восточной стороне. Вместо неё рассмотрим вершину – двойника вершины  $l+1$  непосредственно под вершиной восьми часов (куда переходит упомянутая вершина при центральной симметрии относительно вершины 0). По ней мы видим, что вершина десяти часов её окрестности лежит на расстоянии  $l+1$  от 0. По самой вершине  $l+1$  над вершиной двенадцати часов видим, что вершина восьми часов её окрестности также лежит на расстоянии  $l+1$  от 0. По ней же видно, что вершина шести часов окрестности вершины  $l+1$  лежит на расстоянии  $l$  от 0, а вершина четырёх

часов её окрестности – на расстоянии  $l+1$  от 0. Наконец, вершины двенадцати и двух часов окрестности вершины  $l+1$ , которые также лежат на юго-западной стороне  $\overline{\Delta_l(x)}$ , лежат на расстоянии  $l$  от 0. Отсюда вытекает, что для вершины  $y = l+1$  имеем  $c_{l+1}(0, y) = 3$ , то есть  $c_{l+1}(x, y) = 3$ .

Таким образом,  $c_{l+1}(x, y) = \binom{3}{4}$ , а массив пересечений графа  $\Gamma_n$  второго класса с левосторонними пристроями при  $L = 1$  – следующий:

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{3}{4}\}.$$

Попутно заметим, что, вообще, если  $y$  является вершиной "зубчика", то  $b_l(x, y) = c_l(x, y) = 2$ , если  $y$  лежит в основании "зубчика", и  $b_{l+1}(x, y) = 0$  и  $c_{l+1}(x, y) = 4$ , если  $y$  – из "острия" "зубчика".

Пусть  $L = 2$  (рис.2.3). Напоминаем, что  $\Gamma_n$  – граф второго класса с левосторонними пристроями. Как и в случае графа первого класса, по  $\overline{\Delta_i(0)}$  ( $i \geq l$ ) идём слева направо.

Пусть  $y$  является левой концевой вершиной основания пристроя; в нашем случае она совпадает с вершиной двенадцати часов  $\overline{\Delta_l(0)}$ . Тогда  $b_l(x, y) = 3$ ,  $c_l(x, y) = 1$ .

Если  $y$  – внутренняя вершина основания пристроя-трапеции, то  $b_l(x, y) = c_l(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – правая концевая вершина основания пристроя-трапеции, то  $b_l(x, y) = 1$ ,  $c_l(x, y) = 2$ .

Теперь с учётом замечания выше насчёт параметров вершин у "зубчиков" получаем, что для графа  $\Gamma_n$  второго класса с левосторонними пристроями при  $L = 2$  имеем  $b_l(x, y) = \binom{3}{1}$  и  $c_l(x, y) = \binom{1}{2}$ .

Пусть  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$ . Тогда она является вершиной верхней площадки основания. Если при этом она – левая вершина, то  $c_{l+1}(x, y) = 2$ , а если правая, то  $c_{l+1}(x, y) = 4$ .

Таким образом, с учётом замечания выше насчёт параметров вершин у "зубчиков" для  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$  имеем  $c_{l+1}(x, y) = \binom{2}{4}$ , а, вообще, для графа  $\Gamma_n$  второго класса с левосторонними пристроями при  $L = 2$  имеет место массив пересечений

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{3}{1}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}\}.$$

Пусть  $L = 3$  (рис.2.4), и пусть  $y \in \Gamma_l(x)$ .

Если  $y$  – левая концевая вершина основания пристроя, то  $b_l(x, y) = 3$ ,  $c_l(x, y) = 1$ .

Если  $y$  – внутренняя вершина основания, то  $b_l(x, y) = c_l(x, y) = 2$ .

Если  $y$  – правая концевая вершина основания, то  $b_l(x, y) = 1$ ,  $c_l(x, y) = 2$ .

Поэтому с учётом замечания выше насчёт параметров вершин у "зубчиков" получаем, что для графа  $\Gamma_n$  второго класса с левосторонними пристроями при  $L = 3$ , как и при  $L = 2$ , имеем  $b_l(x, y) = \binom{3}{1}$  и  $c_l(x, y) = \binom{1}{2}$ .

Пусть  $y \in \Gamma_{l+1}(x)$ . Таких  $y$  имеется три: левая концевая, средняя и правая концевая вершины первого яруса. В первом случае имеем  $b_{l+1}(x, y) = 1$ ,  $c_{l+1}(x, y) = 2$ . Во втором случае снова  $b_{l+1}(x, y) = 1$ ,  $c_{l+1}(x, y) = 2$ . В третьем  $b_{l+1}(x, y) = 0$ ,  $c_{l+1}(x, y) = 4$ . Поэтому с учётом замечания выше насчёт параметров вершин у "зубчиков" получаем  $b_l(x, y) = \binom{1}{0}$  и  $c_l(x, y) = \binom{2}{4}$ .

Наконец, если  $y \in \Gamma_{l+2}(x)$ , то  $c_{l+2}(x, y) = 6$ .

Таким образом, если  $\Gamma_n$  – граф второго класса с левосторонними пристроями и  $L = 3$ , то его массив пересечений следующий:

$$\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{3}{\binom{3}{1}}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}, 6\}.$$

Пусть  $L \geq 4$ . В силу Леммы 2.7 и Предложения 2.8 мы уже нашли числа пересечений  $b_i(x, y)$  и  $c_i(x, y)$  графов  $\Gamma_n$  второго класса с левосторонними пристроями для  $i \neq l$ . Найдём теперь  $b_l(x, y)$  и  $c_l(x, y)$ , снова, как и выше, двигаясь по северо-восточной стороне  $\Delta_l(x)$  слева направо.

Если  $y$  – левая концевая вершина основания пристроя, то  $b_l(x, y) = 3$ ,  $c_l(x, y) = 1$ .

Если  $y$  – внутренняя вершина основания-пристроя, то  $b_l(x, y) = c_l(x, y) = 2$ .

В случае графа  $\Gamma_n$  второго класса при  $n = t$  основание основания пристроя совпадает со стороной  $\Delta_l(x)$ , а при  $n < t$  правая концевая вершина основания пристроя, принадлежащая стороне  $\Delta_l(x)$ , не совпадает с её вершиной. Поэтому если  $n < t$  и  $y$  – правая концевая вершина основания-пристроя, то  $b_l(x, y) = 1$ ,  $c_l(x, y) = 2$ , а если  $n = t$ , то  $b_l(x, y) = 3$ ,  $c_l(x, y) = 1$ .

Поэтому с учётом замечания насчёт параметров вершин у "зубчиков" получаем, что для графа  $\Gamma_n$  второго класса с левосторонними пристроями при  $L \geq 4$  и  $n < t$  имеем  $b_l(x, y) = \binom{3}{\binom{3}{1}}$ , а при  $n = t$   $b_l(x, y) = \binom{3}{2}$ , и в любом случае  $c_l(x, y) = \binom{1}{2}$ . Тем самым мы завершаем рассмотрение массивов пересечений графов  $\Gamma_n$  второго класса с левосторонними пристроями. В силу Леммы 1.4 полученные факты о массивах пересечений для данного типа графов справедливы также и для графов второго класса с правосторонними пристроями. Поэтому мы можем сформулировать общее предложение о массиве пересечений графа второго класса:

**Предложение 2.11.** Пусть  $\Gamma_n$  – граф второго вида,  $L$  – длина основания пристроя-трапеции в правильном паркете графа. Тогда граф имеет один из следующих массивов пересечений:

- 1) при  $L = 1$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{3}{4}\}$ ,  $d(\Gamma_n) = l$ ;
- 2) при  $L = 2$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{3}{\binom{3}{1}}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}\}$ ,  $d(\Gamma_n) = l + 1$ ;
- 3) при  $L = 3$ :  $\{6, 3, \binom{3}{2}, \dots, \binom{3}{2}, \binom{3}{\binom{3}{1}}, \binom{1}{0}; 1, \binom{1}{2}, \dots, \binom{1}{2}, \binom{1}{2}, \binom{2}{4}, 6\}$ ,  $d(\Gamma_n) = l + 2$ ;
- 4) при  $L \geq 4$ :  $\{6, 3, b_2(x, y), \dots, b_{l+t}(x, y); 1, c_2(x, y), \dots, c_{l+t+1}(x, y)\}$ ,  $d(\Gamma) = l + t + 1$ ,

$$\text{где } b_i(x, y) = \binom{3}{2}, c_i(x, y) = \binom{1}{2} \text{ для всех } i = 2, \dots, l - 1,$$

$$b_l(x, y) = \binom{3}{\binom{3}{1}} \text{ при } n < t, \text{ и } b_l(x, y) = \binom{3}{2} \text{ при } n = t, c_l(x, y) = \binom{1}{2},$$

$$b_{l+1}(x, y) = \binom{\binom{1}{2}}{0}, c_{l+1}(x, y) = \binom{2}{\binom{3}{4}},$$

$$b_i(x, y) = \binom{\binom{2}{1}}{0}, c_i(x, y) = \binom{2}{4} \text{ для всех } i = l + 2, \dots, l + t - 1,$$

$$b_{l+t}(x, y) = \binom{\binom{2}{1}}{0}, c_{l+t}(x, y) = \binom{2}{4} \text{ при } L \not\equiv 0 \pmod{3},$$

$$b_{l+t}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_{l+t}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ при } L \equiv 0 \pmod{3},$$

$$c_{l+t+1}(x, y) = \begin{cases} 6 & \text{при } L \equiv 0 \pmod{3}, \\ 4 & \text{при } L \equiv 1 \pmod{3}, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \text{при } L \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases}$$

$t$  – вообще говоря, неполное частное от деления  $L$  на 3.

**Предложения 2.10** и **2.11** доказывают утверждение пункта **(4) Теоремы**, и **Теорема** доказана полностью.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.А. Махнев, *О сильной регулярности некоторых рёберно регулярных графов* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2004, том 68, выпуск 1. – С. 159 – 182.
- [2] М.М. Деза, М.Д. Сикирич, *Геометрия химических графов: полициклы и библициклы*. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. – 384 с.
- [3] И.Т.Мухаметьянов, *Об одном локально шестиугольном графе на элементах кольца  $Z_n$*  // Материалы Международной алгебраической конференции "Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем посвящённой 70-летию А.Х.Журтова, Нальчик, 29 июня – 3 июля 2019 г. – Нальчик: Издательство КБГУ, 2019 – С. 95 – 97.
- [4] И.Т.Мухаметьянов, *К вопросу о геометрии графа на элементах кольца  $Z_n$*  // Материалы Международной алгебраической конференции "Алгебра, теория чисел и математическое моделирование динамических систем посвящённой 70-летию А.Х.Журтова, Нальчик, 29 июня – 3 июля 2019 г. – Нальчик: Издательство КБГУ, 2019 – С. 98 – 100.
- [5] И.Т.Мухаметьянов, *Об одном семействе локально шестиугольных графов на элементах кольца  $Z_n$*  // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Орёл, 22 – 25 ноября 2018 г. – Орёл: ОГУ. – С. 114 – 119.
- [6] А.С.Иванова, И.Т.Мухаметьянов, *Об графе с шестиугольной окрестностью вершин* // Современные проблемы физико-математических наук. Материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Орёл, 26 – 29 сентября 2019 г. – Орёл: ОГУ. – С. 112 – 117.

Ильдар Талгатович Мухаметьянов  
 Лысьвенский филиал Пермского нац. исслед. политехн. ун-та,  
 ул. Ленина 2,  
 618900, Пермский край, Россия  
 E-mail address: muiltal@yandex.ru