**Рецензия на статью**
**M. V. Korovina, O. V. Kudinov**
**“On the computability of ordered fields”**

Статья в первую очередь посвящена изучению упорядоченных полей, образованных вычислимыми вещественными числами с определёнными ограничениями на сложность их вычисления: числами, вычислимыми за полиномиальное время, порождаемыми классами иерархии Гжегорчика или всеми примитивно рекурсивными функциями. Основные утверждения статьи состоят в том, что все такие поля не имеют вычислимого представления. И тематика статьи, и полученные результаты достаточно интересны и последние несомненно заслуживают опубликования.

К сожалению, внимательное чтение статьи и анализ доказательств вызвал у рецензента существенные трудности. Во-первых, в тексте присутствует большое число опечаток. Во-вторых, многие доказательства отличаются сверхкраткостью: авторы как будто методично пропускают промежуточные шаги рассуждений, приводя лишь их начало и конец. Такой быстрый переход можно назвать скачком. В-третьих, обозначения и терминология статьи в некоторых важных моментах довольно запутаны. Например, обозначение $\tilde{K}$ имеет три определения, или даже четыре. В-четвёртых, рецензент так и не смог понять некоторые доказательства, и истинность соответствующих теорем пока остаётся для него открытым вопросом. Наконец, в-пятых некоторые утверждения статьи, например теорема 1, прямо неверны. Доказательство неверной теоремы, состоящее из серии скачков и щедро усыпанное опечатками, объективно представляет собой непростое чтение для любого рецензента.

Тем самым текст в нынешнем виде не может быть опубликован и требует существенной доработки. Подробный перечень конкретных замечаний приведён ниже. Сейчас выскажем несколько общих замечаний.

Рецензент обращается к авторам с настоятельной просьбой соблюдать принцип “один термин (обозначение) — одно определение”. Особенно это касается ключевого класса $\tilde{K}$. Для разных определений необходимо ввести разные обозначения, инструменты Tex’а предоставляют для этого широкие возможности. Затем в виде отдельного утверждения можно отметить, что эти обозначения в каких-то случаях совпадают. Тоже самое касается понятия “$K$-число”.

Кроме того, рецензент призывает авторов не экономить байты и писать доказательства более подробно, не выбрасывать середину из цепочки равенств, добавлять больше пояснений к логическим переходам и т.п. Например, на стр. 5 утверждается, что любое позитивно нумерованное поле является конструктивным. Это верно, но читатель может быть недостаточно хорошо знаком с теорией позитивно нумерованных полей. В этом месте лучше поставить конкретную ссылку на литературу, с указанием теоремы, или (что ещё лучше) просто отметить, что отношение $x \neq 0$ выражается $\exists$-формулой $\exists y\,(y \cdot x = 1)$. Все термины и обозначения, которые появляются в тексте, лучше снабжать хотя бы краткими пояснениями.

**Перечень замечаний**

**1.** Проблема с обозначением $\tilde{K}$. Первое значение этого символа указано на стр. 3, второе на стр. 7 и третье на стр. 8 (определение 2). Кроме того, на стр. 7 присутствует ещё обозначение $\tilde{P}$, которое снабжено отдельным определением. При этом в разных местах на класс $K$ накладываются разные требования. Добравшись до четвёртого определения, рецензент понял, что не в силах дальше читать статью, поэтому все дальнейшие замечания относятся только к стр. 1 – 8.

Возможно, для всех этих определений стоит ввести разные обозначения и собрать все определения в отдельный параграф, а затем обсудить, в каких случаях они эквивалентны.

**2.** Проблема с термином "$K$-число". На стр. 3 указано, что $K$-числами называются элементы класса $\tilde{K}$ при условии, что $K$ содержит функцию $2^x$. Однако на стр. 7 появляются P-числа и SP-числа, которые, кажется, не подпадают под предыдущее определение. Рецензент хотел бы повторить свою просьбу: зафиксировать для каждого термина из статьи одно явное определение и затем пользоваться только им. Например, можно вообще не использовать понятие $K$-числа, если его определение вызывает трудности.

**3.** Стр. 1, ссылка [14]: в работе А.С.Морозова было найдено описание только для разрешимых однородных булевых алгебр, а описание вычислимых однородных булевых алгебр было получено в работе П.Е.Алаева, Алгебра и логика, т. 43, №2, 2004.

**4.** Стр. 1, ссылки [6,7]: это две ссылки на одну и ту же книгу.

**5.** Стр. 2, 6 строка снизу: неудачные скобки вокруг $l(n), r(n)$.

**6.** Стр. 2, 4 снизу: здесь говорится про стандартную вычислимую нумерацию $q : \omega \to \mathbb{Q}$, но не указано, как именно она строится. Например, в доказательстве предложения 1 утверждается, что замкнутость $\tilde{K}$ относительно сложения легко проверяется. Однако для этого нам, по-видимому, нужна функция $h \in K$ т.ч. $q(s)+q(t) = q(h(s,t))$. Для произвольного $K$ и произвольной нумерации $q$ такой $h$ может и не найтись. Возможно, $q$ лучше построить в явном виде.

**7.** Стр. 3, 6 сверху: пропущена запятая.

**8.** Стр. 3, определение вычислимых представлений. Указанное определение годится только для конечной сигнатуры $\sigma$. Заодно здесь же можно привести определение позитивно нумерованной структуры, которое используется на стр. 5 в теореме 1.

**9.** Стр. 3, предложение 1. Как уже отмечалось в замечании 6, замкнутость $\tilde{K}$ относительно операций требует некоторых условий на нумерацию $q$. Произвольная вычислимая нумерация поля $\mathbb{Q}$ здесь не будет работать.

**10.** Стр. 3, 3 снизу: опечатка $x_i$.

**11.** Стр. 4, 1 сверху: рецензент не смог понять, какой смысл здесь имеет фраза "exact knowledge of zero coefficients".

**12.** Стр. 4, 8 сверху: здесь упоминается Uniformity Principal, и стоило бы хотя бы кратко привести его общую формулировку: к каким формулам и в каких случаях он применяется. Кроме того, чтение дальнейшего доказательства вызвало у рецензента чувство, что этот принцип является здесь чрезмерно сильным инструментом, требующим от читателя знакомства со свойствами $\exists$-формул без равенства и т.п.

Пусть $p(x) = \sum_{i=0}^{n} z_i x^i$, $p(x_0) = 0$ и $p'(x_0) > 0$. Если рассматривать $p'$ как функцию $p'(\bar{z}, x)$, то она непрерывна. Если $p'(\bar{a}, x_0) > 0$, то найдётся окрестность точки $(\bar{a}, x_0)$ и $\delta > 0$ т.ч. $p'(\bar{z}, x) > \delta$ в этой окрестности. Если внутри этой окрестности найти интервал $[A, B]$, содержащий $x_0$, то мы получим, что $p(\bar{a}, A) < \varepsilon$ и $p(\bar{a}, B) > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $p(\bar{z}, A) < 0$ и $p(\bar{z}, B) > 0$ в некоторой окрестности точки $\bar{a}$. Кажется, ничего большего в доказательстве не требуется.

Если авторы всё же хотят использовать Uniformity Principal, просьба уточнить его формулировку и указать нужные свойства $\exists$-формул (какого языка?) Кроме того, неясно, как связаны константы $A, B, \epsilon$ из определения формул $\psi_i$ и константы $A, B, \epsilon$ в обозначении $\Theta_{A,B,\epsilon}$. Из текста какой-либо связи между ними не видно.

**13.** Стр. 4, 12 снизу: если число $M$ ограничивает $|B|$, то почему оно не ограничивает $|A|$? Границы интервала, кажется, по смыслу равноправны.

**14.** Стр. 4, 11 снизу: фраза "find $y \in \mathbb{Q} \cap [A, B]$" приведена здесь без каких-либо пояснений. Рецензент не смог понять, как можно быстро и просто найти такой $y$. Если авторы имели в виду какой-то алгоритм, то нужно проверить, что соответствующая функция лежит в $K$. Для этого алгоритм нужно как минимум указать. Это место выглядит загадочно.

**15.** Стр. 4, 10 снизу: может быть, тут имеется в виду оценка $\frac{1}{2^{3m}}$, а не $\frac{1}{3m}$?

**16.** Стр. 4, 9 снизу: фраза "it is worth noting that $2^m \cdot \epsilon > 1$" звучит загадочно. Выше ничего не говорилось про связь $m$ и $\epsilon$.

**17.** Стр. 4, 8 снизу: необходимо подробнее расписать оценку для $|p(y)|$. Последнее равенство в этой строчке не внушает доверия.

**18.** Стр. 4, 5 снизу: эта серия оценок, кажется, использует тот факт, что $p'(c) \geqslant \epsilon$. Но откуда это следует? В формуле $\psi(\bar{a})$ ничего не говорится про нижнюю оценку на $p'(x)$. Это место выглядит загадочно.

**19.** Стр. 5, теорема 1: здесь авторы в качестве критерия используют условие "семейство $S_F$ вычислимо". Точный смысл этой фразы остался для рецензента загадкой: $S_F$ это некоторое семейство элементов $P(\omega)$, и иногда под вычислимостью этого семейства понимают существование вычислимой нумерации $\nu : \omega \to S_F$, при которой нумерованное семейство $\{\nu(k)\}_{k \in \omega}$ станет равномерной последовательностью в.п. множеств.

Если авторы имели в виду это определение, то теорема будет, по-видимому, неверной. Правильная формулировка могла бы звучать так: $(F, \mu)$ — вычислимая структура тогда и только тогда, когда $\{S_k\}_{k \in \omega}$ — равномерная последовательность в.п. множеств. В доказательстве мы используем тот факт, что множество $S_k$ может быть найдено равномерно по $k$. Если же у семейства $S_F$ задана какая-то другая нумерация, никак не связанная с $\mu$, то доказательство не будет работать.

Можно предположить, что в определении семейства $S_L$ на стр. 5 подразумевается не подмножество $P(\omega)$, а именно нумерованное семейство $\{S_k\}_{k\in\omega}$. Но это противоречит дальнейшему тексту, а также замечанию 2 о том, что $S_L$ не зависит от выбора $\mu$. Нумерованное семейство, очевидно, зависит от конкретного $\mu$.

**20.** Стр. 5, 17 сверху: стрелка направлена не в ту сторону. То же самое относится к строке 18.

**21.** Стр. 5, 17 снизу: видимо, здесь должно стоять $\mu(n) \leqslant q_k$.

**22.** Стр. 5, определение 1: здесь $x \in F$, $y \in \mathbb{R}$, и что означает запись $|x-y| < \mathbb{Q}^+$, понять не так просто. Рецензенту кажется, что он понимает это определение, но для более широкого круга читателей обозначение стоит пояснить подробнее.

**23.** Стр. 5, 13 сверху: тут присутствует некоторый повтор, и стоит подробнее пояснить, почему такое $a$ существует.

**24.** Стр. 6, 21 сверху: рецензент не смог понять, в чём именно заключается противоречие. Мы лишь получили, что $q(x_0)B(x_0) \in F_0 \setminus \{0\}$.

**25.** Стр. 6, 1 снизу: поскольку формулировка теоремы 1 требует поправок, утверждение про вычислимость $S_F$ тоже, возможно, нуждается в поправках.

**26.** Стр. 7, 6 сверху: фраза “a function $f$ with the evidence $c$” показалась рецензенту не совсем понятной. Словари тоже не могут её перевести.

**27.** Стр. 7, 20 сверху: фраза “nobody can state” звучит не совсем ясно. Может, “nobody can prove”?

**28.** Стр. 7, 2 снизу: обычно пишут, что $\mathcal{E}_2 = \mathrm{LinSpace}$, так как стандартной мерой длины числа считается длина его двоичной записи. Равенство $\mathcal{E}_2 = \mathrm{LogSpace}$ может смутить читателя, хотя ниже поясняется её смысл.

**29.** Стр. 8, 5 сверху: желательно пояснить обозначение $\mathrm{DSpace}^{\{0,1,2\}}(n)$.