Отзыв рецензента на статью
М. Коровиной и О. Кудинова
"On the computability of ordered fields"

Пусть K — некоторый класс функций $f : \omega \to \omega$. С каждым таким классом можно связать множество вещественных чисел, порождённых функциями из K. Точное определение можно выбрать разными способами. Например, $\tilde{K} = \{m + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)-1}{2^{i+1}}\}$, где $m \in \mathbb{Z}$, а $f : \omega \to \{0, 1, 2\}$ — функция из K. Это можно назвать знаковым бинарным представлением числа. Другой подход состоит в приближении вещественного числа последовательностью рациональных чисел, номера которых задаются функциями из K, такие числа обозначаются как K^*. В статье рассматривается очень естественная проблема — когда множества $\tilde{K}$ и K^* образуют подполе в $\mathbb{R}$, и когда такое поле имеет изоморфное вычислимое представление.

Авторам удалось получить ряд ответов на эти вопросы. В статье указаны естественные и компактные достаточные условия, при которых $\tilde{K} = K^*$, при которых множество K^* образует поле, и при которых оно является вещественно замкнутым полем.

Основной же и наиболее сложный факт, доказанный в статье — достаточные условия, при которых поле $\tilde{K}$ не имеет вычислимого представления. В частности, мы получаем, что поле всех примитивно рекурсивных вещественных чисел не имеет вычислимого представления. То же самое касается полей, порождённых классами $\mathcal{E}^n$, $n \geqslant 3$, иерархии Гжегорчика. Этот факт некоторым образом можно обобщить и на классы $\mathcal{E}^2$ и P, класс функций, вычислимых за полиномиальное время.

Полученные результаты очень интересны и вполне могут быть опубликованы в "Сибирских электронных математических известиях". Вместе с тем, у рецензента есть ряд замечаний к тексту, и перед публикацией их необходимо учесть в окончательном варианте статьи. Некоторые из них достаточно серьёзны.

Список замечаний

Стр. 2, 17 строка снизу. Пропущена запятая после "recursion theory".

Стр. 2, 11 снизу. Запись $< l(n), r(n) >$ неудачно смотрится в таких местах. Особенно оно режет глаз в сложных формулах на стр. 16, например. Рецензент советует использовать для пар то же обозначение, что и на стр. 3, 5 строка сверху.

Стр. 2, 4 снизу. По-видимому, в этих формулах присутствует неточность. Неясно, чему равно, например, $q(2c(m, 0))$ и $q(2c(m, 0)+1)$. Та же проблема присутствует в последней строке.

Стр. 3, 18 снизу. Здесь рассматривается некоторый класс K вычислимых функций. Рецензент не смог понять, зачем здесь нужна вычислимость. Кажется, она в первый раз появляется только в разделе 3.4. Возможно, этот материал стоило бы изложить для произвольного класса функций (сюда входят, например, функции, вычислимые с некоторым оракулом).

Стр. 4, 11 снизу. Здесь должно быть $n \geqslant N$.

Стр. 4, 5 снизу. Неясно, зачем здесь упоминаются п.р.ф. Видимо, речь идёт про функцию ϕ из K.

Стр. 5, 13–15 сверху. Рецензенту кажется, что в доказательстве предложения 1 отсутствует проверка ключевого факта: что $\bar{f} = x$. Это само по себе не очень хорошо, а если попробовать проверить это, то становится видно, что в этих строках нужно использовать J_{n+3} вместо J_{n+1}. Равенство $\bar{f} = x$ равносильно тому, что $|x - q_{\psi(n)}| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

Стр. 5, 1 снизу. Здесь i.e. нужно заменить на such that.

Стр. 6, 1 сверху. Видимо, здесь формулировка слилась с доказательством. Со слова "Indeed" начинается доказательство.

Стр. 6, 10 сверху. Приводимое ниже утверждение верно для любого вещественного числа, а не только вычислимого.

Стр. 6, 10 снизу. Лучше написать, что вещественные корни полиномов лежат в K^*.

Стр. 7, 13 сверху. Пропущена запятая после Ψ_1.

Стр. 7, 6 снизу. В целом доказательство предложения 3 кажется рецензенту достаточно понятным. Однако в конце присутствует какая-то путаница, которую необходимо исправить. В этой строке приведена оценка $|p(y)| \leqslant \frac{1}{2^{2m}}$. Что такое y и откуда взялась оценка, осталось для рецензента загадкой. С другой стороны, $\tilde{p}(y_m)$ исчезает из текста после строки 10 снизу. Может быть, здесь приведена оценка на $|p(y_m) - \tilde{p}(y_m)|$? Она верна, но тогда оценку на $p(y_m)$ в строке 3 снизу нужно уточнить.

Стр. 7, 1 снизу. Написано x вместо x_0.

Стр. 8, 11 снизу. Пропущена точка после "computable".

Стр. 9, 17 снизу. Пропущена запятая после "computable".

Стр. 9, 9 снизу. Видимо, должно быть $\tilde{\mu}(n)$ вместо $\mu(n)$ (дважды).

Стр. 9, 6 снизу. Приведённая здесь эквивалентность кажется рецензенту верной, но она опирается на следующий факт: если $f : \omega \to \{0, 1, 2\}$ и $\bar{f} \in \mathrm{Dyad}$, то $f \in AC$. В противном случае неясно, как от условия $\nu(m) \in AC$ перейти к условию $\varphi_n \in AC$.

По-видимому, указанный факт верен, но необходимо пояснить, откуда он следует. В общем случае описание отношения $\bar{f} = \bar{g}$ устроено довольно сложно.

Стр. 10, 10 сверху. "either" лучше поставить после "where".

Стр. 10, 4 снизу. Стоило бы привести определение того, что $(X_0, \ldots, X_{s-1}) \leqslant_m (A_0, \ldots, A_{s-1})$.

Стр. 10, 1 снизу. Стоило бы привести определение того, что набор $(A_0, \ldots, A_{s-1})$ является m-полным в некотором классе.

Стр. 11, 7 сверху. Тут стоило бы указать квантор по $\bar{x}$. То же для строки 11 сверху.

Стр. 12, 11 сверху. Попытки понять это доказательство привели рецензента к гипотезе, что здесь должно быть написано $\varphi_{h(\bar{x})}(3k + i) = \varphi_{x_i}(k)$.

Стр. 12, 15–18 сверху. Не очень понятно, зачем нужен этот повтор. Не лучше ли записать, что $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots$?

Стр. 12, 12 снизу. Что означает "if only"? То же самое, что "if and only if"?

Аналогичный вопрос к 11 строке снизу.

Стр. 12, 7 снизу. Выше авторы уже использовали обозначение $\varphi_n(x)$ для универсальной ч.р.ф. Стоит ли вводить ещё одно обозначение для универсальной ч.р.ф. с оракулом, а не использовать просто φ^{4,z_l}? Рецензент не настаивает на этом замечании.

Стр. 12, 3 снизу. Здесь желательно привести теорему Смульяна в явном виде, иначе дальнейшие рассуждения недостаточно понятны.

Стр. 12, 1 снизу. Здесь в выражении $n_0(\bar{g}(\bar{x}))$ отсутствует правая скобка, зато в самом конце есть одна лишняя.

Стр. 13, 14 сверху. Написано sow вместо show.

Стр. 13, 7–5 снизу. Во всех трёх определениях условие “W_n is finite” очевидно лишнее, и немного режет глаз при чтении.

Стр. 14, 14 снизу. Написано E_1 вместо E_0.

Стр. 14, 6–5 снизу. Вновь в определении Y_1 и Y_2 условие “W_n is finite” является лишним.

Стр. 15, 3 сверху. Слово “among” вызывает у рецензента сомнения. Может быть, лучше сказать “together with” или “besides”?

Стр. 15, 16 снизу. Поскольку теорема 2 является одним из основных утверждений статьи, лучше ещё раз указать, в какой сигнатуре рассматривается структура $\tilde{K}$.

Стр. 15, 16 снизу. Тут нужно написать “the structure generated”.

Стр. 16, 6 сверху. Тут лучше написать про $\mathcal{F}_{H(t_s(n))}(s+1)$. Хотя на доказательство это не влияет.

Стр. 16, 15 сверху. Вероятно, тут должно быть написано $m_n^0 = 0$.

Стр. 16, 19 сверху. В данном виде доказательство предложения 6 явно неработоспособно. Ситуация улучшится, если мы заменим равенство $m_n^{s+1} = m_n^s$ на $m_n^{s+1} = 2m_n^s$. То же самое касается и подслучая 2.3 ниже. Далее рецензент считает, что авторы именно это и имели в виду.

Стр. 16, 19 снизу. Пропущена точка перед “We proceed”.

Стр. 17, 15 сверху. Равенство $\varphi_{f(n)} = F_n$ повторяется в тексте два раза, в этой и предыдущей строке.

Стр. 17, 14 снизу. Видимо, имеется в виду $x \geqslant m_n$.

Рецензент

19.01.23