О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

А.К. БАЗЗАЕВ, Д.К. ГУТНОВА

Аннотация. В данной работе получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках для решения нелокальной задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка.

Ключевые слова: краевая задача, нелокальная краевая задача, нелокальное условие, псевдопараболическое уравнение третьего порядка, разностная схема, устойчивость разностной схемы, сходимость разностной схемы, априорная оценка, метод энергетических неравенств.

Введение

Многие вопросы фильтрации жидкости в пористых средах, передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почво - грунтах приводят к дифференциальным уравнениям в частных производных псевдопараболического типа [1] — [5].

Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным условием возникают при изучении диффузии частиц в турбулентной плазме, переноса влаги в почво - грунтах, распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон изменения общего количества тепла стержня. К первым работам для параболических уравнений с неклассическими (интегральными) граничными условиями относятся, по - видимому, работы Камынина Л.И. [6] и Чудновского А.Ф. [7]. После появления работы Бицадзе А.В. и Самарского А.А. [8] внимание математиков все чаще стали привлекать нелокальные задачи математической физики. Различные классы нелокальных краевых задач изучались в работах Ионкина Н.И. [9], [10], Ильина В.А., Моисеева Е.И. [11], Ионкина Н.И., Моисеева Е.И. [12], Гордезиани Д.Г. [13], Нахушева А.М. [14], Солдатова А.П., Шханукова М.Х. [15] и др.

Чудновский А.Ф. в работе [7] обратил внимание на недостаточно критический подход к формулировке граничных условий для уравнения влагопереноса

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D(w)\frac{\partial w}{\partial x}\right),\ 0 < x < \ell,\ 0 < t \leqslant T, \tag{1}$$

где $D(w)$ — коэффициент диффузивности, w — влажность в долях единицы, x — глубина.

Для уравнения (1) Чудновский А.Ф. сформулировал задачу с нелокальным условием:

$$D\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = \int\limits_0^\alpha w dx, \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=\ell}=0, \tag{3}$$

$$w(x,0)=\varphi(x),\ 0\leqslant x\leqslant \ell. \tag{4}$$

Нелокальное условие (2) означает, что поток влаги через поверхность $x=0$ равен содержанию влаги в активном слое почвы от 0 до α, условие (3) означает изоляцию в смысле обмена влагой между слоем почвы $x=\ell$ и ее нижними слоями, и в начальный момент задан глубинный ход влажности (4). Отметим, что работа [16] посвящена исследованию локально-одномерных схем для уравнения теплопроводности с нелокальным условием типа (3) на границе. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка для построенной локально-одномерной схемы, доказана ее устойчивость и сходимость.

Численным методам решения псевдопараболических уравнений третьего порядка работы М.Х. Бештокова [17] — [19]. В этих работах рассматриваются краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка. Для решения поставленных задач получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовках.

Работы [20] — [23] рассмотрены разностные методы решения локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений.

Работы [24] — [26] посвящены разностным методам решения дифференциального уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями третьего порядка в многомерной области. Отметим, что при повышении порядка аппроксимации краевых условий третьего рода на решениях уравнения диффузии дробного порядка приходим к разностным задачи с нелокальными граничными условиями.

Для решения сеточных уравнений, получающихся при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений с нелокальным условием, следует применять метод окаймления ([27], с. 187).

1. Постановка задачи

В прямоугольнике $\overline{Q}_T\equiv\{(x,t):0\le x\le\ell,\ 0\le t\le T\}$ рассмотрим задачу с нелокальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right]+f(x,t), \tag{5}$$

$$\begin{cases} k\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial t}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=\beta_1(t)u+\displaystyle\int\limits_0^\ell u\,dx-\mu_1(t), \text{ при } x=0,\\ -\left[k\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial}{\partial t}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right]=\beta_2(t)u-\mu_2(t), \text{ при } x=\ell, \end{cases} \tag{6}$$

$$u(x,0)=u_0(x). \tag{7}$$

Коэффициенты задачи (5) — (7) удовлетворяют следующим условиям:

$$0<c_1\le k(x,t)\le c_2,\ |k_t(x,t)|,|\beta_2|,|\beta_1|\le c_3. \tag{8}$$

В дальнейшем будем предполагать, что для задачи (5) — (7) существует единственное решение, обладающее необходимыми по ходу изложения производными, а коэффициенты уравнения (5) и граничных условий (6) удовлетворяют необходимым условиям гладкости, обеспечивающие нужный порядок аппроксимации разностной схемы. Также в ходе изложения будем использовать положительные постоянные $M_i, i = 1, 2, \ldots$, зависящие от входных данных задачи (5) — (7).

Уравнение (5) называется модифицированным уравнением влагопереноса в почво-грунтах.

2. Априорная оценка для дифференциальной задачи

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (8). Тогда для решения дифференциальной задачи (5) — (7) верна априорная оценка*

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,\ell)} \leq M(t)\left(\int\limits_0^t F(\tau)d\tau + \|u_0\|_0^2 + \|u_{0x}\|_0^2\right), \tag{9}$$

где $F(t) = \int\limits_0^t \left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)\right) d\tau + \|u_0\|_0^2 + \|u_0'\|_0^2$, $M(t)$ *зависит от входных данных задачи (5) — (7).*

Доказательство. Предположим, что в прямоугольнике $\overline{Q}_T$ существует решение задачи (5) — (7). Для получения априорной оценки решения задачи (5) — (7) воспользуемся методом энергетических неравенств. Для этого умножим уравнение (5) скалярно на u:

$$(u_t, u) = ((ku_x)_x, u) + ((ku_x)_{xt}, u) + (f, u), \tag{10}$$

где

$$(u, v) = \int\limits_0^\ell uv dx,\ \|u\|_0^2 = (u, u).$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (10):

$$(u_t, u) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2,$$

$$((ku_x)_x, u) = ku_x u\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell ku_x^2 dx,$$

$$((ku_x)_{xt}, u) = \int\limits_0^\ell (ku_x)_{xt} u\ dx = (ku_x)_t\, u\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell (ku_x)_t\, u_x\ dx =$$

$$= (ku_x)_t\, u\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell \left(k_t u_x^2 + ku_x u_{xt}\right) dx =$$

$$= (ku_x)_t\, u\Big|_0^\ell - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\ell ku_x^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell k_t u_x^2 dx,$$

$$(f,u) \le \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2.$$

Подставим полученные выражения в равенство (10), тогда получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^\ell ku_x^2dx + \int\limits_0^\ell ku_x^2dx \le$$

$$\le (ku_x)_t\, u\Big|_0^\ell + ku_xu\Big|_0^\ell - \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell k_tu_x^2dx + \frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2. \tag{11}$$

Используя краевые условия (6), из последнего неравенства получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \frac{c_1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u_x\|_0^2 + \int\limits_0^\ell ku_x^2dx \le -\frac{1}{2}\int\limits_0^\ell k_tu_x^2dx -$$

$$-\beta_2(t)u^2(\ell,t) + \mu_2(t)u(\ell,t) - u(0,t)\int\limits_0^\ell udx - \beta_1(t)u^2(0,t) + \mu_1(t)u(0,t) +$$

$$+\frac{1}{2}\|f\|_0^2 + \frac{1}{2}\|u\|_0^2.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + c_1\frac{\partial}{\partial t}\|u_x\|_0^2 + 2c_1\|u_x\|_0^2 \le c_2\|u_x\|_0^2 -$$

$$-2u(0,t)\int\limits_0^\ell udx + 2c_3\left(u^2(\ell,t)+u^2(0,t)\right) + \mu_2^2(t) + u^2(\ell,t) + \mu_1^2(t) + u^2(0,t) + \|f\|_0^2 + \|u\|_0^2.$$

Применим к слагаемым $u^2(l,t)$ и $u^2(0,t)$ теорему о вложении. Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + c_1\frac{\partial}{\partial t}\|u_x\|_0^2 + 2c_1\|u_x\|_0^2 \le -2u(0,t)\int\limits_0^\ell udx + c_2\|u_x\|_0^2 +$$

$$+4c_3\varepsilon\|u_x\|_0^2 + 4c_3c_\varepsilon\|u\|_0^2 + \mu_2^2(t) + \mu_1^2(t) + 2\varepsilon\|u_x\|_0^2 + 2c_\varepsilon\|u\|_0^2 + \|f\|_0^2 + \|u\|_0^2. \tag{12}$$

Оценим слагаемое, содержащее интеграл:

$$-2u(0,t)\int\limits_0^\ell udx \le \left(\int\limits_0^\ell udx\right)^2 + u^2(0,t) \le$$

$$\le \ell\int\limits_0^\ell u^2dx + \varepsilon\|u_x\|_0^2 + c_\varepsilon\|u\|_0^2 = (\ell + c_\varepsilon)\|u\|_0^2 + \varepsilon\|u_x\|_0^2.$$

Полученный результат подставим в неравенство (12). Получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + c_1\frac{\partial}{\partial t}\|u_x\|_0^2 \le M_1\|u_x\|_0^2 + M_2\|u\|_0^2 + \mu_2^2(t) + \mu_1^2(t) + \|f\|_0^2$$

где

$M_1 = 4c_3\varepsilon + 3\varepsilon + c_2 - 2c_1$, $M_2 = 4c_3c_\varepsilon + 3c_\varepsilon + \ell + 1$.

Проинтегрируем полученное неравенство по τ в пределах от 0 до t:

$$\|u\|_0^2 + c_1\|u_x\|_0^2 \le M_3 \left[\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + \int_0^t \|u_x\|_0^2 d\tau\right] + \int_0^t \left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)\right) d\tau +$$
$$+\|u_0\|_0^2 + \|u_0'\|_0^2$$

или

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le M_4 \int_0^t \left(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\right) d\tau + F(t),$$

где

$F(t) = \int\limits_0^t \left(\|f\|_0^2 + \mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau)\right) d\tau + \|u_0\|_0^2 + \|u_0'\|_0^2$, M_4 — известная положительная постоянная.

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла [28], получаем оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,\ell)} \le M(t) \left(\int_0^t F(\tau)d\tau + \|u_0\|_0^2 + \|u_0'\|_0^2\right). \tag{13}$$

Из априорной оценки (13) следует единственность решения задачи (5) — (7), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных в норме $\|u\|_{W_2^1(0,\ell)} = \|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2$. □

3. Разностная схема

На отрезке $[0,\ell]$ введем равномерную сетку $\bar\omega_h$ с шагом $h = \frac{\ell}{N}$:

$$\bar\omega_h = \{x_i = i\hbar : i = 0, 1, \ldots, N\},$$

$$\hbar = \begin{cases} h, & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \dfrac{h}{2}, & i = 0, N. \end{cases}$$

На отрезке $[0,T]$ также введем равномерную сетку $\bar\omega_\tau$ с шагом $\tau = \dfrac{T}{j_0}$:

$$\bar\omega_\tau = \{t_j = j\tau : j = 0, 1, \ldots, j_0\}.$$

Тогда $\bar\omega_{h\tau} = \bar\omega_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x \in \bar\omega_h, t \in \bar\omega_\tau\}$ — равномерная сетка в прямоугольнике $\overline{Q}_T$.

Уравнение (5) аппроксимируем двухслойной чисто неявной схемой на полуинтервале $[t_{j-1}, t_j]$, тогда получим разностное уравнение

$$y_{\bar t} = \Lambda y + (ay_{\bar x})_{x\bar t} + \varphi, \tag{14}$$

$$\Lambda y = (ay_{\bar x})_x,$$

где коэффициенты a_i — сеточные функции, которые выбираются из условий второго порядка аппроксимации на равномерной сетке.

Будем использовать следующую аппроксимацию коэффициента $k(x,t)$ [29]:

$$a_i = k_{i-\frac{1}{2}} = k(x_i - \frac{h}{2}, t).$$

Разностный аналог для граничных условий (6) имеет вид:

$$\begin{cases} a_1 y_{x,0} + (a_1 y_{x,0})_{\bar{t}} = \beta_1 y_0 + \dfrac{1}{0.5h} \displaystyle\sum_{i=1}^{N} y_i \hbar - \mu_1, \ x = 0, \\ -a_N y_{\bar{x},N} - (a_N y_{\bar{x},N})_{\bar{t}} = \beta_2 y_N - \mu_2, \ x = \ell. \end{cases} \tag{15}$$

Условия (15) имеют порядок аппроксимации $O(h)$. Повышая известным образом порядок аппроксимации до $O(h^2)$ на решениях уравнения (5), имеем:

$$a_1 y_{x,0} = k y_0' + \frac{h}{2}(k y_0')' + O(h^2),$$

$$(a_1 y_{x,0})_{\bar{t}} = \frac{a_1 y_{x,0} - \check{a}_1 \check{y}_{x,0}}{\tau} = \frac{1}{\tau}\left(k y_0' + \frac{h}{2}(k y_0')' + O(h^2) - \check{k}\check{y}_0' + \frac{h}{2}(\check{k}\check{y}_0')' \right),$$

где

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \ \check{y} = y_i^{j-1}, \ y_{\bar{t}} = \frac{y^j - y^{j-1}}{\tau}, \ y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau},$$

$$y_{\bar{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \ y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}.$$

Отсюда

$$k y_0' = a_1 y_{x,0} - 0.5h(k y_0')' + O(h^2),$$

$$(k y_0')_{\bar{t}} = (a_1 y_{x,0})_{\bar{t}} - 0.5h(k y_0')'_{\bar{t}} + O(h^2).$$

Таким образом,

$$k y_0' + (k y_0')_{\bar{t}} = a_1 y_{x,0} + (a_1 y_{x,0})_{\bar{t}} - 0.5h(y_{\bar{t},0} - f_0) + O(h^2).$$

Итак,

$$a_1 y_{x,0} + (a_1 y_{x,0})_{\bar{t}} - 0.5h(y_{\bar{t},0} - f_0) = \beta_1 y_0 + \frac{1}{0.5h}\sum_{i=1}^{N} y_i \hbar - \mu_1 + O(h^2). \tag{16}$$

Отбросим величину порядка малости $O(h^2)$, тогда в (15) граничное условие при $x = 0$ примет вид:

$$y_{\bar{t},0} = \frac{a_1 y_{x,0} + (a_1 y_{x,0})_{\bar{t}} - \beta_1 y_0}{0.5h} - \frac{1}{0.5h}\sum_{i=1}^{N} y_i \hbar + \bar{\mu}_1, \ x = 0,$$

где

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{0.5h} + f_0.$$

Аналогично при $x = \ell$ получаем

$$y_{\bar{t},N} = -\frac{a_N y_{\bar{x},N} + (a_N y_{\bar{x},N})_{\bar{t}} + \beta_2 y_N}{0.5h} + \bar{\mu}_2,$$

где

$$\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_2}{0.5h} + f_N.$$

Таким образом, дифференциальной задаче (5) — (7) на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ поставим в соответствие чисто неявную разностную схему:

$$y_{\bar{t}} = \bar{\Lambda} y + \Phi, \tag{17}$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \tag{18}$$

где

$$\bar{\Lambda}y = \begin{cases} \dfrac{a_1 y_{x,0} + (a_1 y_{x,0})_{\bar{t}} - \beta_1 y_0}{0.5h} - \dfrac{1}{0.5h}\sum\limits_{i=1}^{N} y_i \hbar, & \text{при } x = 0, \\ (a y_{\bar{x}})_x + (a y_{\bar{x}})_{x\bar{t}}, & \text{при } x \in \omega_h, \\ -\dfrac{a_N y_{\bar{x},N} + (a_N y_{\bar{x},N})_{\bar{t}} + \beta_2 y_N}{0.5h}, & \text{при } x = \ell, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \bar{\mu}_1, & \text{при } x = 0, \\ \varphi, & \text{при } x \in \omega_h, \\ \bar{\mu}_2, & \text{при } x = \ell. \end{cases}$$

При условии достаточной гладкости решения входных данных задачи (5) — (7), согласно [29], разностная схема (17) — (18) имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + \tau)$.

4. Устойчивость разностной схемы

Так как для нелокальных краевых задач не установлен принцип максимума, то априорную оценку для разностной задачи (17) — (18) будем получать с помощью метода энергетических неравенств.

Введем скалярное произведение и норму

$$[u, v] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \hbar, \ (u, v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i \hbar, \ \|u]|_0^2 = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 \hbar = (1, u^2],$$

$$\hbar = \begin{cases} h, & i = 1, 2, \ldots, N-1, \\ \dfrac{h}{2}, & i = 0, N. \end{cases}$$

Умножим уравнение (17) скалярно на y:

$$[y_{\bar{t}}, y] - [\bar{\Lambda}y, y] = [\Phi, y]. \tag{19}$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (19):

$$[y_{\bar{t}}, y] = \sum_{i=0}^{N} y_{\bar{t},i} y_i \hbar = \sum_{i=0}^{N} \frac{y_i - \check{y}_i}{\tau} y_i \hbar = \frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{N}(y_i^2 - y_i \check{y}_i)\hbar = \frac{1}{\tau}|[y]|_0^2 -$$

$$-\frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{N} \check{y}_i^2 \hbar + \frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{N}(\check{y}_i^2 - \check{y}_i y_i)\hbar = \left(|[y]|_0^2\right)_{\bar{t}} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=0}^{N}\left[\frac{y_i^2 - 2y_i\check{y}_i + \check{y}_i^2}{\tau^2}\tau^2\hbar + (y_i\check{y}_i - y_i^2)\hbar\right] =$$

$$= \left(|[y]|_0^2\right)_{\bar{t}} + \tau|[y_{\bar{t}}]|_0^2 - [y_{\bar{t}}, y].$$

Отсюда получим

$$[y_{\bar{t}}, y] = \frac{1}{2}\left(|[y]|_0^2\right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2}|[y_{\bar{t}}]|_0^2. \tag{20}$$

$$[\bar{\Lambda}y, y] = \sum_{i=0}^{N} \bar{\Lambda}y_i \cdot y_i \hbar = \sum_{i=1}^{N-1}\left[(a y_{\bar{x}})_{x,i} + a y_{\bar{x}})_{x\bar{t},i}\right] y_i h +$$

$$+ \frac{a_1 y_{x,0} + (a_1 y_{x,0})_{\bar{t}} - \beta_1 y_0}{0.5h} \cdot y_0 \cdot 0.5h + \frac{1}{0.5h}\sum_{i=0}^{N} y_i \hbar \cdot y_0 \cdot 0.5h +$$

$$+ \frac{-a_N y_{\bar{x},N} - (a_N y_{\bar{x},N})_{\bar{t}} - \beta_2 y_N}{0.5h} \cdot y_N \cdot 0.5h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{a_{i+1}y_{\bar{x},i+1} - a_i y_{\bar{x},i}}{h}\cdot y_i h + \frac{(ay_{\bar{x}})_{\bar{t},i+1} - (ay_{\bar{x}})_{\bar{t},i}}{h}\cdot y_i h\right) +$$

$$+a_1 y_{\bar{x},1}\ y_0 + (a_1 y_{\bar{x},1})_{\bar{t}}\ y_0 - \beta_1 y_0^2 + \sum_{i=0}^{N} y_i \hbar\cdot y_0 - a_N y_{\bar{x},N}\ y_N - (ay_{\bar{x}})_{\bar{t},N}\ y_N -$$

$$-\beta_2 y_N^2 = \sum_{i=2}^{N} a_i y_{\bar{x},i} y_{i-1} - \sum_{i=1}^{N-1} a_i y_{\bar{x},i} y_i + \sum_{i=2}^{N} (ay_{\bar{x}})_{\bar{t},i} y_{i-1} - \sum_{i=1}^{N-1}(ay_{\bar{x}})_{\bar{t},i} y_i +$$

$$+a_1 y_{\bar{x},1}\ y_0 - a_N y_{\bar{x},N}\ y_N + (ay_{\bar{x}})_{\bar{t},1}\ y_0 - (ay_{\bar{x}})_{\bar{t},N}\ y_N -$$

$$-\beta_1 y_0^2 - \beta_2 y_N^2 + \sum_{i=0}^{N} y_i\hbar\cdot y_0 = \sum_{i=1}^{N} a_i y_{\bar{x},i} y_{i-1} - \sum_{i=1}^{N} a_i y_{\bar{x},i} y_i + \sum_{i=1}^{N}(ay_{\bar{x}})_{\bar{t},i} y_{i-1} -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}(ay_{\bar{x}})_{\bar{t},i} y_i - \beta_1 y_0^2 - \beta_2 y_N^2 + \sum_{i=0}^{N} y_i\hbar\cdot y_0 =$$

$$= -\sum_{i=1}^{N} a_i (y_{\bar{x},i})^2 h - \sum_{i=1}^{N}(ay_{\bar{x}})_{t,i} y_{\bar{x},i} h - \beta_1 y_0^2 - \beta_2 y_N^2 + \sum_{i=1}^{N} y_i\hbar\cdot y_0 =$$

$$= -\left(a, (y_{\bar{x}})^2\right] - ((ay_{\bar{x}})_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}] - \beta_1 y_0^2 - \beta_2 y_N^2 + \sum_{i=0}^{N} y_i\hbar\cdot y_0. \tag{21}$$

$$[\Phi, y] = \sum_{i=0}^{N}\Phi_i y_i\hbar = \sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i y_i h + \bar{\mu}_1 y_0\cdot 0.5h + \bar{\mu}_2 y_N\cdot 0.5h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i y_i h + \left(\frac{\mu_1}{0.5h} + f_0\right) y_0\cdot 0.5h + \left(\frac{\mu_2}{0.5h} + f_N\right) y_N\cdot 0.5h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1}\varphi_i y_i h + \mu_1 y_0 + 0.5h y_0\varphi_0 + \mu_2 y_N + 0.5h y_N\varphi_N =$$

$$= \sum_{i=0}^{N}\varphi_i y_i\hbar + \mu_1 y_0 + \mu_2 y_N = [\varphi, y] + \mu_1 y_0 + \mu_2 y_N. \tag{22}$$

Подставляя (20), (21) и (22) в тождество (19), получаем

$$\left(|[y]|_0^2\right)_{\bar{t}} + \tau|[y_{\bar{t}}]|_0^2 + 2\left(a, (y_{\bar{x}})^2\right] + 2\left((ay_{\bar{x}})_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}\right] + 2\beta_1 y_0^2 + 2\beta_2 y_N^2 -$$

$$-2\sum_{i=0}^{N} y_i\hbar\cdot y_0 = 2[\varphi, y] + 2\mu_1 y_0 + 2\mu_2 y_N. \tag{23}$$

Преобразуем отдельно сумму

$$\left(a, (y_{\bar{x}})^2\right] + ((ay_{\bar{x}})_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}] = \sum_{i=1}^{N} a(y_{\bar{x}})^2 h + \sum_{i=1}^{N}(ay_{\bar{x}})_{\bar{t}} y_{\bar{x}} h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a(y_{\bar{x}})^2 h + \sum_{i=1}^{N}(a_{\bar{t}} y_{\bar{x}}^2 + a y_{\bar{x}\bar{t}} y_{\bar{x}})h =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} a(y_{\bar{x}})^2 h + \sum_{i=1}^{N} a_{\bar{t}}(y_{\bar{x}})^2 h + \sum_{i=1}^{N} a y_{\bar{x}\bar{t}} y_{\bar{x}} h. \tag{24}$$

Оценим последнее слагаемое в (24):

$$\sum_{i=1}^{N} a y_{\bar{x}\bar{t}} y_{\bar{x}} h \geq c_1 \sum_{i=1}^{N} y_{\bar{x}\bar{t}} y_{\bar{x}} h = c_1 \sum_{i=1}^{N} \frac{y_{\bar{x}} - \check{y}_{\bar{x}}}{\tau} y_{\bar{x}} h =$$

$$= \frac{c_1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_{\bar{x}}^2 - 2y_{\bar{x}}\check{y}_{\bar{x}} + \check{y}_{\bar{x}}^2}{\tau^2}\ \tau + \frac{y_{\bar{x}}^2 - \check{y}_{\bar{x}}^2}{\tau} \right) h = \frac{c_1}{2} \tau \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{y_{\bar{x}} - \check{y}_{\bar{x}}}{\tau} \right)^2 h +$$

$$+ \frac{c_1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{y_{\bar{x}}^2 - \check{y}_{\bar{x}}^2}{\tau} h = \frac{c_1}{2} \tau \sum_{i=1}^{N} (y_{\bar{x}\bar{t}})^2 h + \frac{c_1}{2} \cdot \frac{\|y_{\bar{x}}]|_0^2 - \|\check{y}_{\bar{x}}]|_0^2}{\tau} =$$

$$= \frac{c_1}{2} \tau \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + \frac{c_1}{2} \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \right)_{\bar{t}}.$$

Таким образом,

$$\big(a, (y_{\bar{x}})^2\big] + ((a y_{\bar{x}})_{\bar{t}}, y_{\bar{x}}] \geq \sum_{i=1}^{N} a(y_{\bar{x}})^2 h + \sum_{i=1}^{N} a_{\bar{t}}(y_{\bar{x}})^2 h +$$

$$+ \frac{c_1}{2} \tau \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + \frac{c_1}{2} \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \right)_{\bar{t}}. \tag{25}$$

Подставляя (25) в равенство (23), получим:

$$\left(|[y]|_0^2\right)_{\bar{t}} + \tau |[y_{\bar{t}}]|_0^2 + c_1 \tau \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + c_1 \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \right)_{\bar{t}} \leq$$

$$\leq -2 \sum_{i=1}^{N} a_{\bar{t}}(y_{\bar{x}})^2 h - 2 \sum_{i=1}^{N} a(y_{\bar{x}})^2 h - 2\beta_1 y_0^2 - 2\beta_2 y_N^2 + 2 \sum_{i=0}^{N} y_i \hbar \cdot y_0 +$$

$$+ 2[\varphi, y] + 2\mu_1 y_0 + 2\mu_2 y_N \leq 2(c_2 + c_3)\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + 2 \sum_{i=0}^{N} y_i \hbar \cdot y_0 -$$

$$-2\beta_1 y_0^2 - 2\beta_2 y_N^2 + 2[\varphi, y] + 2\mu_1 y_0 + 2\mu_2 y_N. \tag{26}$$

Так как

$$2[\varphi, y] \leq \|\varphi]|_0^2 + \|y]|_0^2,$$

$$-2\beta_1 y_0^2 - 2\beta_2 y_N^2 \leq 4c_3(\varepsilon \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + c_\varepsilon \|y]|_0^2),$$

$$2\mu_1 y_0 + 2\mu_2 y_N \leq \mu_1^2 + y_0^2 + \mu_2^2 + y_N^2 \leq 2(\varepsilon \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + c_\varepsilon \|y]|_0^2) + \mu_1^2 + \mu_2^2,$$

то неравенство (26) примет вид

$$\left(|[y]|_0^2\right)_{\bar{t}} + \tau |[y_{\bar{t}}]|_0^2 + c_1 \tau \|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + c_1 \left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \right)_{\bar{t}} \leq 2(c_2 + c_3)\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|\varphi]|_0^2 + \|y]|_0^2 +$$

$$+ (4c_3\varepsilon + 2\varepsilon)\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + (4c_3 c_\varepsilon + 2c_\varepsilon)\|y]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + 2 \sum_{i=0}^{N} y_i \hbar \cdot y_0. \tag{27}$$

Оценим сумму

$$2 \sum_{i=0}^{N} y_i \hbar \cdot y_0 \leq \sum_{i=0}^{N} (y_i^2 + y_0^2) \hbar \leq 2 \sum_{i=0}^{N} (\varepsilon \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + c_\varepsilon \|y]|_0^2) \hbar =$$

$$= 2hN(\varepsilon \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + c_\varepsilon \|y]|_0^2).$$

Подставляя полученный результат в неравенство (27), получаем:

$$\left(|[y]|_0^2\right)_{\bar{t}} + \tau|[y_{\bar{t}}]|_0^2 + c_1\tau\|y_{\bar{x}\bar{t}}]|_0^2 + c_1\left(\|y_{\bar{x}}]|_0^2\right)_{\bar{t}} \le c_4|[y_{\bar{x}}]|_0^2 + c_5|[y]|_0^2 +$$

$$+|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2,$$

где

$$c_4 = 2c_2 + 2c_3 + 4c_3\varepsilon + 2\varepsilon + 2Nh\varepsilon,$$

$$c_5 = 1 + 4c_3c_\varepsilon + 2c_\varepsilon + 2Nh\varepsilon.$$

Отсюда

$$\|y^j]|_0^2 - \|y^{j-1}]|_0^2 + c_1\|y^j_{\bar{x}}]|_0^2 - c_1\|y^{j-1}_{\bar{x}}]|_0^2 \le$$

$$\le M_1\left(\|y^j]|_0^2 + \|y^j_{\bar{x}}]|_0^2\right)\tau + \left(\|\varphi^j]|_0^2 + \mu_1^2(t_j) + \mu_2^2(t_j)\right)\tau.$$

Просуммировав последнее неравенство по всем j' от 1 до $j+1$, получаем:

$$\|y^{j+1}]|_0^2 + \|y^{j+1}_{\bar{x}}]|_0^2 \le M_2\sum_{j'=1}^{j+1}\left(\|y^{j'}]|_0^2 + \|y^{j'}_{\bar{x}}]|_0^2\right)\tau +$$

$$+M_3\left(\|u_0]|_0^2 + \|u_{0x}]|_0^2 + \sum_{j'=1}^{j+1}\left(\|\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu_1^2(t_j) + \mu_2^2(t_j)\right)\tau\right).$$

Имеет место следующее неравенство:

$$\|y^{j+1}]|_0^2 + \|y^{j+1}_{\bar{x}}]|_0^2 \le \nu_1\sum_{j'=1}^{j}\left(\|y^{j'}]|_0^2 + \|y^{j'}_{\bar{x}}]|_0^2\right)\tau +$$

$$\nu_2\left(\|u_0]|_0^2 + \|u_{0x}]|_0^2 + \sum_{j'=1}^{j+1}\left(\|\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu_1^2(t_j) + \mu_2^2(t_j)\right)\tau\right),$$

где ν_1, ν_2 — известные положительные постоянные.

На основании леммы 4 (см. [30], с.171) получаем следующую оценку:

$$\|y^{j+1}]|_0^2 + \|y^{j+1}_{\bar{x}}]|_0^2 \le$$

$$\le M(t)\left(\|u_0]|_0^2 + \|u_{0x}]|_0^2 + \sum_{j'=1}^{j+1}\left(\|\varphi^{j'}]|_0^2 + \mu_1^2(t_j) + \mu_2^2(t_j)\right)\tau\right). \tag{28}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (8). Тогда существуют такие h_0, τ_0, что при $h \le h_0, \tau \le \tau_0$ для решения разностной задачи (17) — (18) справедлива априорная оценка (28), из которой следует единственность и устойчивость решения разностной задачи (17) — (18) по начальным данным и правой части.*

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (5) — (7), $y = y_i^j = y(x_i^j)$ — решение разностной задачи (17) — (18). Обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность. Подставляя $y = z + u$ в (17) — (18), получим задачу для погрешности z:

$$z_{\bar{t}} = \bar{\Lambda}z + \Psi, \tag{29}$$

$$z(x,0) = 0, \tag{30}$$

где

$$\bar{\Lambda}z = \begin{cases} \dfrac{a_1 z_{x,0} + (a_1 z_{x,0})_{\bar{t}} - \beta_1 z_0}{0.5h} - \dfrac{1}{0.5h}\sum\limits_{i=1}^{N} z_i \hbar, & \text{при } x = 0, \\ (az_{\bar{x}})_x + (az_{\bar{x}})_{x\bar{t}}, & \text{при } x \in \omega_h, \\ -\dfrac{a_N z_{\bar{x},N} + (a_N z_{\bar{x},N})_{\bar{t}} + \beta_2 z_N}{0.5h}, & \text{при } x = \ell, \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \bar{\psi}_-, & \text{при } x = 0, \\ \psi, & \text{при } x \in \omega_h, \\ \bar{\psi}_+, & \text{при } x = \ell, \end{cases}$$

где $\psi = O(h^2 + \tau),\ \psi_- = O(h^2 + \tau),\ \psi_+ = O(h^2 + \tau)$ — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (5) — (7) разностной схемой (17) — (18) в классе решений задачи (5) — (7).

Применяя к решению задачи (29) — (30) априорную оценку (28), получаем:

$$\|z^{j+1}]|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2 \le M \sum_{j'=1}^{j+1} \Big(\|\psi^{j'}]|_0^2 + \psi_-^2(t_j) + \psi_+^2(t_j) \Big) \tau, \tag{31}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ.

Из оценки (31) следует сходимость решения разностной задачи (17) — (18) к решению дифференциальной задачи (29) — (30) по норме $\|z^{j+1}]|_1^2 = \|z^{j+1}]|_0^2 + \|z_{\bar{x}}^{j+1}]|_0^2$ со скоростью $O(h^2 + \tau)$.

References

[1] Дзекцер Е. С., *Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах, Докл. АН СССР, 220:3 (1975), 540–543 mathnet zmath [Dzektser E. S., Equations of motion of free-surface underground water in layered media, Doklady Mathematics, 220:3 (1975), 540–543 (in Russian)]*

[2] Рубинштейн Л. И., *К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах, Изв. АН СССР. Сер. геогр., 12:1 (1948), 27–45 [Rubinshtein L. I., On heat propagation in heterogeneous media, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr., 12:1 (1948), 27–45 (in Russian)]*

[3] Ting T. W., *A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction, J. Math. Anal. Appl., 45:9 (1974), 23–31 crossref mathscinet zmath*

[4] Hallaire M., *L'eau et la production vegetable, №9, Institut National de la Recherche Agronomique, 1964*

[5] Чудновский А. Ф., *Теплофизика почв, Наука, М., 1976, 352 с. [Chudnovskii A. F., Thermal Physics of Soils, Nauka, M., 1976, 352 pp. (in Russian)]*

[6] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т.4. №6. С. 1006 — 1023.

[7] Чудновский А.Ф. Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло - и влагопереноса в почве // «Сб. трудов по агрофизике», вып. 23, Гидрометеоиздат, 1969. С. 41 — 54.

[8] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т.185. №4. С. 739 — 740.

[9] Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальным условием // Дифференц. ур - ия. 1977, Т.13, №2. С. 294 — 304.

[10] Ионкин Н. И. О равномерной сходимости разностной схемы для одной нестационарной нелокальной краевой задачи // Актуальные вопросы прикладной математики. Изд - во МГУ. 1989, С. 240.

[11] Ильин В.А.,Моисеев Е.И. Нелокальная задача для оператора Штурма - Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // ДАН СССР. 1986. Т.291. №3. С. 534 — 539.

[12] Ионкин Н. И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. ур - ия. 1979, Т.15, №7. С. 1284 — 1295.

[13] Гордезиани Д.Г. О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. // Препринт института прикладной математики при ТГУ. — Тбилиси. 1981.

[14] Нахушев А.М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги. // ДАН СССР. 1978. Т.242. №5. С. 1008 — 1011.

[15] Солдатов А.П., Шхануков М.Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием Самарского А.А. для псевдопараболических уравнений высокого порядка. // ДАН СССР. 1987. Т.297. №3. С. 547 — 552.

[16] Баззаев А.К., Гутнова Д.К., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально - одномерная схема для параболического уравнения с нелокальным условием. // ЖВМ и МФ, 2012, том 52, №6, с. 1048 — 1057.

[17] М. Х. Бештоков, Разностный метод решения нелокальной краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами", Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 56:10 (2016), 1780 — 1794; Comput. Math. Math. Phys., 56:10 (2016), 1763 — 1777

[18] М. Х. Бештоков, Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 57:12 (2017), 2021 — 2041; Comput. Math. Math. Phys., 57:12 (2017), 1973–1993

[19] М.Х. Бештоков, В.З. Канчукоев, Ф.А. Эржибова, О сходимости разностных схем, аппроксимирующих краевую задачу для псевдопараболического уравнения с вырождением, Владикавк. матем. журн., 19:4 (2017), 13 — 26

[20] Бештоков М. Х., Метод функции Римана и разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа, Изв. высш. уч. зав. Сев.-Кавк. рег., 2007, №5, 6 — 9.

[21] Бештоков М. Х., Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка, Диф. уравнения, 49:9 (2013), 1170 — 1177.

[22] Бештоков М. Х., Об одной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка с нелокальным условием, Изв. высш. уч. зав. Сев.-Кавк. рег., 2013, №1, 5 — 10.

[23] Бештоков М. Х., Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа, Журн. вычисл. математики и мат. физики, 54:9 (2014), 1497 — 1514

[24] Баззаев А.К., Шхануков М.Х. Локально-одномерная схема для уравнения диффузии дробного порядка с краевыми условиями III рода // ЖВМ и МФ., 2010, Т. 50, №7, С. 1200 — 1208.

[25] Баззаев А.К. Третья краевая задача для обобщенного уравнения параболического типа с дробной производной по времени в многомерной области // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2010.№2, С. 5 — 14.

[26] Баззаев А.К., Мамбетова А.Б., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная схема для уравнения теплопроводности дробного порядка с сосредоточенной теплоемкостью // ЖВМ и МФ, 2012, том 52, №9, с. 1656 — 1665.

[27] Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз. 1960. — 656 с.

[28] Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 407 с..*

[29] Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука. 1983. — 616 с.

[30] Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.*