S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.63
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35K05

ЭКОНОМИЧНЫЕ АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М.Х. БЕШТОКОВ

Abstract. In this paper, we consider a multidimensional heat equation of fractional order with conditions of the third kind in an area with a complicated border. A locally one-dimensional difference scheme is constructed. The stability and uniform convergence of a locally one-dimensional difference scheme are proved.

Keywords: locally one-dimensional scheme, differential equation, fractional derivative, stability, uniform convergence of difference schemes, heat equation.

1. Введение

Работа посвящена исследованию многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в области со сложной границей. Построена локально-одномерная разностная схема А.А. Самарского. С помощью принципа максимума для решения разностной задачи получена априорная оценка в сеточной норме C, выражающая устойчивость локально-одномерной разностной схемы. Доказана равномерная сходимость локально-одномерной схемы.

Локально-одномерные схемы для дифференциальных уравнений диффузии дробного порядка с самосопряженным оператором с краевыми условиями I рода рассмотрены в [1], в области произвольной формы в [2], а с краевыми условиями III рода в [3], [4]. В [1]-[4] априорные оценки были получены лишь

Beshtokov, M.Kh., Cost-effective additive schemes for a multidimensional fractional-order heat equation with conditions of the third kind in an arbitrary domain.

.

Поступила 06 июля 2020 г., опубликована 31 декабря 2015г.

при условии, когда $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. В настоящей работе предлагается экономичный метод решения многомерного уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода в области со сложной границей. Доказаны устойчивость и равномерная сходимость локально-одномерной схемы при любых $\alpha \in (0,1)$.

Разностным методам решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка посвящены многие работы [5]-[11]. В [5] показано, что для получения априорных оценок при численном решении уравнения диффузии дробного порядка можно применять метод энергетических неравенств. В [6] предложен разностный аналог дробной производной Капуто с порядком аппроксимации $O(\tau^{3-\alpha})$. В работах [7], [8] исследуются локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения влагопереноса с дробной производной в смысле Капуто и Римана-Лиувилля. В [8] представлен алгоритм экстраполяционного типа для численного решения дифференциальных уравнений дробного порядка. В [9] исследуется конечно-разностная аппроксимация производной Капуто на неоднородных сетках для решения уравнения дробной диффузии. Доказана безусловная устойчивость и сходимость. В работах [10], [11] рассматриваются локальные и нелокальные краевые задачи для одномерного уравнения конвекции-диффузии дробного порядка. Методом энергетических неравенств доказаны единственность, устойчивость, а также сходимость решения разностной задачи к решению рассматриваемой дифференциальной задачи.

2. Постановка задачи

В цилиндре $\overline{Q}_T = \overline{G} \times [0 \le t \le T]$ рассмотрим третью краевую задачу для уравнения теплопроводности дробного порядка:

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$\Theta_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x,t)u - \mu_{-k}(x,t), \quad x_k = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.2}$$

$$-\Theta_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x,t)u - \mu_{+k}(x,t), \quad x_k = l_k, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{2.4}$$

где

$\partial_{0t}^{\alpha} u = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\partial u(x,\eta)}{\partial \eta} \frac{d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1-$ дробная производная Капуто порядка α,

$$L = \sum_{k=1}^{p} L_k, \quad L_k u = \frac{\partial}{\partial x_k}\Big(\Theta_k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) - q_k(x,t)u, \quad k = 1,2,...,p,$$

$$0 < c_0 \le \Theta_k(x,t), q_k(x,t) \le c_1, \quad \beta_{\pm k} \ge c_0 > 0, \quad c_0, c_1 = const > 0,$$

$$\mu_{+k} = \mu(l_k, x', t),\ \mu_{-k} = \mu(0, x', t), \quad Q_T = G \times (0 < t \le T], \quad k = 1, \dots, p,$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_p), \quad x' = (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_p).$$

$\Gamma-$ граница области G, $x = (x_1, x_2, ..., x_p)-$ точка p-мерного евклидового пространства R_p.

Относительно области $\overline{G}$ используются два предположения (см. [15], стр. 486):

а) пересечение области G с прямой C_k, параллельной оси координат O_{x_k}, состоит из одного интервала Δ_k;

б) возможно построение в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$ связной сетки $\bar{\omega}_h$ с шагами $h_k, k = 1, 2, ..., p$. Множество ω_h внутренних узлов сетки состоит из точек $x = (x_1, x_2, ..., x_p) \in G$ пересечения гиперплоскостей $x_k = i_k h_k,\ i_k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,\ k = 1, 2, ..., p$, а множество γ_h граничных узлов – из точек пересечения прямых $C_k,\ k = 1, 2, ..., p$, проходящих через внутренние узлы $x \in \omega_h$, с границей Γ.

Обозначим через $\gamma_{h,k}$ множество граничных по направлению x_k узлов, γ_h– множество всех граничных узлов $x \in \Gamma$, $\omega^*_{h,k}$– множество приграничных по направлению x_k узлов, ω^*_h– множество всех приграничных узлов, $\omega^{**}_{h,k}$– множество нерегулярных по направлению x_k узлов, ω^{**}_h– множество всех нерегулярных узлов, $\omega_{h,k}$– множество регулярных по направлению x_k узлов, ω_h– множество всех регулярных узлов.

В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты уравнения и граничных условий (2.1) – (2.4) удовлетворяют необходимым по ходу изложения условиям, обеспечивающим нужную гладкость решения $u(x,t)$ в цилиндре Q_T.

В той же области вместо задачи (2.1) - (2.4) рассмотрим следующую задачу с малым параметром ε

$$\varepsilon u^\varepsilon_t + \partial^\alpha_{0t} u^\varepsilon = L u^\varepsilon + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.5}$$

$$\Theta_k(x,t)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x,t)u^\varepsilon - \mu_{-k}(x,t), \quad x_k = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.6}$$

$$-\Theta_k(x,t)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x,t)u^\varepsilon - \mu_{+k}(x,t), \quad x_k = l_k, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.7}$$

$$u^\varepsilon(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{2.8}$$

где $\varepsilon = const > 0$.

Так как при $t = 0$ начальное условие для уравнения (2.1) и (2.5) совпадают, то в окрестности $t = 0$ у производной u^ε_t не возникает особенности типа пограничного слоя [13], [14, стр. 10].

Покажем, что $u^\varepsilon \to u$ в некоторой норме при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через $\tilde{z} = u^\varepsilon - u$ и подставим $u^\varepsilon = \tilde{z} + u$ в задачу (2.5)-(2.8). Тогда получим

$$\varepsilon \tilde{z}_t + \partial^\alpha_{0t}\tilde{z} = L\tilde{z} + \tilde{f}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.9}$$

$$\Theta_k(x,t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x,t)\tilde{z}, \quad x_k = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.10}$$

$$-\Theta_k(x,t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x,t)\tilde{z}, \quad x_k = l_k, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.11}$$

$$\tilde{z}(x,0) = 0, \quad x \in \overline{G}, \quad \overline{G} = G + \Gamma, \tag{2.12}$$

где $\tilde{f}(x,t) = -\varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t}$.

Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (2.9) скалярно на $\tilde{\mathbf{z}}$ и получим энергетическое тождество:

$$\left(\varepsilon\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}, \tilde{z}\right) + \left(\partial^\alpha_{0t}\tilde{z}, \tilde{z}\right) = \left(\sum_{k=1}^p \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k(x,t)\frac{\partial \tilde{z}}{\partial x_k}\right), \tilde{z}\right) -$$

$$-\left(\sum_{k=1}^p q_k(x,t)\tilde{z}, \tilde{z}\right) + \left(\tilde{f}(x,t), \tilde{z}\right). \tag{2.13}$$

Будем пользоваться скалярным произведением и нормой

$$(u,v)=\int_G uvdx,\quad (u,u)=\|u\|_0^2,\quad \|u\|_0^2=\int_G u^2dx,$$

$$u_x^2=\sum_{k=1}^p u_{x_k}^2,\ \|u\|^2_{L_2(0,l_k)}=\int_0^{l_k}u^2(x,t)dx_k.$$

Далее через $M_i,\ i=1,2,...$ обозначаются положительные постоянные, зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

Используя лемму 1 [5] и применяя ε-неравенство Коши, из (2.13) получаем неравенство

$$\frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde z\|_0^2+\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2+c_0\|\tilde z\|_0^2+c_0\|\tilde z_x\|_0^2\le$$
$$\le\sum_{k=1}^p\int_{G'}\Theta_k(x,t)\tilde z\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\Big|_0^{l_k}dx'+\varepsilon_1\|\tilde z\|_0^2+\frac{1}{4\varepsilon_1}\|\tilde f\|_0^2,\tag{2.14}$$

где $G'=\{x'=(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_p):\ 0<x_k<l_k\}$, $dx'=dx_1dx_2\cdots dx_{k-1}dx_{k+1}\cdots dx_p$.

Преобразуем первое слагаемое в правой части (2.14) следующим образом

$$\sum_{k=1}^p\int_{G'}\Theta_k(x,t)\tilde z\frac{\partial\tilde z}{\partial x_k}\Big|_0^{l_k}dx'=$$
$$=\sum_{k=1}^p\int_{G'}\Big(-\beta_{-k}\tilde z^2(0,x',t)-\beta_{+k}\tilde z^2(l_k,x',t)\Big)dx'.\tag{2.15}$$

Выбирая $\varepsilon_1=\dfrac{c_0}{2}$, из неравенства (2.14) с учетом (2.15) находим

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\|\tilde z\|_0^2+\partial_{0t}^{\alpha}\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z_x\|_0^2+$$
$$+\sum_{k=1}^p\int_{G'}\big(\tilde z^2(0,x',t)+\tilde z^2(l_k,x',t)\big)dx'\le M_2\|\tilde f\|_0^2.\tag{2.16}$$

Проинтегрируем (2.16) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+D_{0t}^{\alpha-1}\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z\|_{2,Q_t}^2+\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2\le$$
$$\le M\int_0^t\|\tilde f\|_0^2d\tau=\varepsilon^2M\int_0^t\|u_\tau\|_0^2d\tau=O(\varepsilon^2).\tag{2.17}$$

где $\tilde z=u^\varepsilon-u$, $M-$ зависит только от входных данных задач (2.9-(2.12), $\|\tilde z\|_{2,Q_t}^2=\int\limits_0^t\|\tilde z\|_0^2d\tau$, $G'=\{x'=(x_1,x_2,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_p):\ 0<x_k<l_k\}$, $D_{0t}^{\alpha-1}u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^\alpha}-$ дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha, 0<\alpha<1$.

Из априорной оценки (2.17) следует сходимость u^ε к u при $\varepsilon\to0$ в норме $\|\tilde z\|_1^2=\varepsilon\|\tilde z\|_0^2+D_{0t}^{\delta-1}\|\tilde z\|_0^2+\|\tilde z\|_{2,Q_t}^2+\|\tilde z_x\|_{2,Q_t}^2$. Поэтому при малом ε решение задачи (2.5)-(2.8) будем принимать за приближенное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности дробного порядка с условиями третьего рода (2.1)-(2.4).

3. Построение локально-одномерной схемы (ЛОС)

Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_k с шагом $h_k = \frac{l_k}{N_k}, k = 1, 2, ..., p:$

$$\bar{\omega}_{h_k} = \{x_k^{(i_k)} = i_k h_k : i_k = 0, 1, ..., N_k, h_k = \frac{l_k}{N_k},\ k = 1, 2, ..., p\},\ \bar{\omega} = \prod_{k=1}^{p} \bar{\omega}_{h_k}.$$

На отрезке $0 \le t \le T$ введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}'_\tau = \{0, t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j + \frac{k}{p}\right)\tau, \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1; \quad k = 1, 2, ..., p\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{k}{p}}, \quad k = 1, 2, ..., p-1.$ Будем обозначать через $\omega'_\tau-$ множество узлов сетки $\bar{\omega}'_\tau$, для которых t>0.

На равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ по аналогии с [15] уравнению (2.5) поставим в соответствие цепочку "одномерных" уравнений, для этого перепишем уравнение (2.5) в виде

$$\pounds u^\varepsilon = \varepsilon u_t^\varepsilon + \partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon - Lu^\varepsilon - f = 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^{p} \pounds_k u^\varepsilon = 0, \quad \pounds_k u^\varepsilon = \frac{\varepsilon}{p} u_t^\varepsilon + \frac{1}{p}\partial_{0t}^\alpha u^\varepsilon - L_k u^\varepsilon - f_k.$$

где $f_k(x,t),\ k = 1, 2, ..., p$ – произвольные функции, обладающие той же гладкостью, что и $f(x,t)$ и удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k=1}^{p} f_k = f.$

На каждом полуинтервале $\Delta_k = \left(t_{j+\frac{k-1}{p}}, t_{j+\frac{k}{p}}\right], \quad k = 1, 2, ..., p$ будем последовательно решать задачи

$$\pounds_k \vartheta_{(k)} = \frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t + \frac{1}{p}\partial_{0t}^\alpha \vartheta_{(k)} - L_k \vartheta_{(k)} - f_k = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_k, \quad k = 1, 2, ..., p, \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} \Theta_k(x,t)\frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = \beta_{-k}(x,t)\vartheta_{(k)} - \mu_{-k}(x,t), \quad x_k = 0, \\ -\Theta_k(x,t)\frac{\partial \vartheta_{(k)}}{\partial x_k} = \beta_{+k}(x,t)\vartheta_{(k)} - \mu_{+k}(x,t), \quad x_k = l_k, \end{cases} \tag{3.2}$$

полагая при этом

$$\vartheta_{(1)}(x,0) = u_0(x), \quad \vartheta_{(1)}(x,t_j) = \vartheta_{(p)}(x,t_j), \tag{3.3}$$

$$\vartheta_{(k)}(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}) = \vartheta_{(k-1)}(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}), \quad k = 2, 3, ..., p; \quad j = 0, 1, .., j_0 - 1,$$

где Γ_k- множество граничных точек по направлению x_k.

Каждое из уравнений (3.1) заменим разностной схемой на Δ_k

$$\frac{\varepsilon}{p} y_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} =$$

$$= \Lambda_k\left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1-\sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}}\right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}},$$

$$x \in \omega_h, \quad k = 1, 2, ..., p, \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} a_k^{(1_k)} y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} = \beta_{-k} y_0^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{-k}, \quad x_k = 0, \\ -a_k^{(N_k)} y_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \beta_{+k} y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} - \mu_{+k}, \quad x_k = l_k. \end{cases} \tag{3.5}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G}, \tag{3.6}$$

где

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^{t_{j+\frac{k}{p}}}\frac{\partial u(x,\eta)}{\partial\eta}\frac{d\eta}{(t_{j+\frac{k}{p}}-\eta)^{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)u_{\bar t}^{\frac{s}{p}}+O\left(\frac{\tau}{p}\right),$$

- дискретный аналог дробной производной порядка α [1],

$$y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=\frac{y^{\frac{s}{p}}-y^{\frac{s-1}{p}}}{\frac{\tau}{p}},\quad \mu_{\pm k}^{j+\frac{k}{p}}=\mu_{\pm k}\left(x,t_{j+\frac{k}{p}}\right),\quad \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}=f_k\left(x,t_{j+\frac{k}{p}}\right),\quad k=1,2,...,p,$$

σ_k-произвольные параметры,$\gamma_{h,k}-$ множество граничных по направлению x_k узлов,

$$x\in\overline{\omega}_h=\{x_i=(i_1h_1,...,i_ph_p)\in\overline{G},i_k=0,1,...N_k,\ h_k=\frac{l_k}{N_k}\},$$

$$d_k^{j+\frac{k}{p}}=q(x_i,t^{j+\frac{k}{p}}),\quad a^{(+1)}=a_{i+1},a_i=\Theta_{i-1/2}(\bar t),\quad \bar t=t_{j+\frac{1}{2}},$$

разностный оператор $\Lambda_k\sim L_k$ имеет следующий вид:

1) В регулярных узлах:

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}}=\left(a_k y_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}-d_k y^{j+\frac{k}{p}},\quad a^{(+1)}=a_{i+1},a_i=\Theta_{i-1/2}(\bar t),$$

2) В нерегулярных узлах:

$$\Lambda_k y_{(k)}=\begin{cases}\frac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\frac{y^{(+1_k)}-y}{h_k}-a_{k,i_k}\frac{y-y^{(-1_k)}}{h_k^*}\right)-d_k y_{(k)},\ x^{(-1_k)}\in\gamma_{h,k}\\ \frac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\frac{y^{(+1_k)}-y}{h_k^*}-a_{k,i_k}\frac{y-y^{(-1_k)}}{h_k}\right)-d_k y_{(k)},\ x^{(+1_k)}\in\gamma_{h,k}\end{cases}$$

где h_k^*- расстояние от нерегулярного узла x до граничного узла $x^{(+1_k)}$ или $x^{(-1_k)}$. Если оба соседних с $x\in\omega_{h,k}^*$ узла $x^{(+1_k)}$ и $x^{(-1_k)}$ являются граничными, т.е. $x^{(\pm1_k)}\in\gamma_{h,k}$, то

$$\Lambda_k y^{j+\frac{k}{p}}=\frac{1}{h_k}\left(a_{k,i_k+1}\frac{y^{(+1_k)}-y}{h_k^*}-a_{k,i_k}\frac{y-y^{(-1_k)}}{h_k^*}\right)-d_k y^{j+\frac{k}{p}},$$

$-$ общий вид оператора, где $h_{k\pm}^*-$ расстояние между x и $x^{(+1_k)}$, $h_{k\pm}^*\le h_k$.

В регулярных узлах Λ_k имеет второй порядок аппроксимации, $\Lambda_k u-L_k u=O(h_k^2)$, а в нерегулярных узлах $\Lambda_k u-L_k u=O(1)$. (см. [15], стр. 232).

Условия (3.5) имеют порядок аппроксимации $O(h_k)$. Повысим порядок аппроксимации до $O(h_k^2)$ на решениях уравнения (3.1) при каком-либо k.

Так как

$$\Theta_k\frac{\partial\vartheta_{(k)}}{\partial x_k}=a_k^{(1_k)}\vartheta_{(k)x_k,0}-0.5h_k\left(\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t+\frac{1}{p}\partial_{0t}^{\alpha}\vartheta_{(k)}+q_k(x,t)\vartheta_{(k)}-f_k\right)_0+O(h_k^2),$$

то

$$a_k^{(1_k)}\vartheta_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-0.5h_k\left(\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\vartheta_{\bar t}^{\frac{s}{p}}+q_k(x,t)\vartheta^{j+\frac{k}{p}}-f_k\right)_0=$$

$$=\beta_{-k}\vartheta_0^{j+\frac{k}{p}}-\mu_{-k}+O(h_k^2)+O(h_k\tau),$$

или

$$a_k^{(1_k)}\vartheta_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-0.5h_k\left(\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\vartheta_{\bar t}^{\frac{s}{p}}-0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}\vartheta_t+\right.$$

$$\left.+q_k(x,t)\vartheta^{j+\frac{k}{p}}-f_k\right)_0=\beta_{-k}\vartheta_0^{j+\frac{k}{p}}-\mu_{-k}+O(h_k^2)+O(h_k\tau). \qquad (3.7)$$

В (3.7) отбросим величины порядка малости $O(h_k^2),\ O(h_k\tau)$, тогда после замены $\vartheta_{(k)}$ на y получим

$$a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}y_{t,0}-\frac{0.5h_k}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}y_0=\bar\beta_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}}-\mu_{-k}-0.5h_kf_{k,0},$$

или

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{t,0}+\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}y_0=\frac{a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar\beta_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}+\frac{\bar\mu_{-k}}{0.5h_k}. \qquad (3.8)$$

Аналогично при $x_k=l_k$ получаем:

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{t_N}+\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}y_{N_k}=-\frac{a_k^{(N_k)}y_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}-\bar\beta_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}+\frac{\bar\mu_{+k}}{0.5h_k}, \qquad (3.9)$$

где

$$\bar\beta_{-k}=\beta_{-k}+0.5h_kd_k^{(0)},\quad \bar\beta_{+k}=\beta_{+k}+0.5h_kd_k^{(N_k)},$$

$$\bar\mu_{-k}=\mu_{-k}+0.5h_kf_{k,0},\quad \bar\mu_{+k}=\mu_{+k}+0.5h_kf_{k,N_k}.$$

Итак, разностный аналог задачи (2.5)-(2.8) имеет вид:

$$\frac{\varepsilon}{p}y_t+\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}y=\bar\Lambda_ky^{j+\frac{k}{p}}+\Phi_k^{j+\frac{k}{p}},\quad k=1,2,...,p, \qquad (3.10)$$

$$y(x,0)=u_0(x), \qquad (3.11)$$

где

$$\bar\Lambda_ky=\begin{cases}\Lambda_ky=(a_ky_{\bar x_k})_{x_k}-d_ky, & x_k\in\omega_{h_k},\\ \Lambda_k^-y=\frac{a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}-\bar\beta_{-k}y_0}{0.5h_k}, & x_k=0,\\ \Lambda_k^+y=-\frac{a_k^{(N_k)}y_{\bar x_k,N_k}+\bar\beta_{+k}y_{N_k}}{0.5h_k}, & x_k=l_k,\end{cases}$$

$$\Phi_{(k)}=\begin{cases}\varphi_k, & x_k\in\omega_{h_k},\\ \frac{\bar\mu_{-k}}{0.5h_k}, & x_k=0,\\ \frac{\bar\mu_{+k}}{0.5h_k}, & x_k=l_k,\end{cases}$$

$$\bar\beta_{-k}=\beta_{-k}+0.5h_kd_k^{(0)},\quad \bar\beta_{+k}=\beta_{+k}+0.5h_kd_k^{(N_k)},$$

$$\bar\mu_{-k}=\mu_{-k}+0.5h_kf_{k,0},\quad \bar\mu_{+k}=\mu_{+k}+0.5h_kf_{k,N_k}.$$

Заметим, что при повышении порядка аппроксимации краевых условий третьего рода (3.5) на решениях уравнения (3.1) до $O(h_k^2+\tau)$, естественным образом возникает разностная задача (3.10), (3.11) с нелокальным по каждому направлению $x_k,\ (k=1,2,...,p)$ граничным условием.

4. Погрешность аппроксимации ЛОС

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации (невязки) локально-одномерной схемы и убедимся в том, что каждое в отдельности уравнение (3.4) номера k не аппроксимирует уравнение (2.5), но сумма погрешностей аппроксимации

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + ... + \psi_p$$

стремится к нулю при τ и $|h|$ стремящимся к нулю.

Будем считать $\sigma_k = 1, k = 1, 2, .., p$. Пусть $u = u(x,t)$-решение задачи (2.5)-(2.8), а $y^{j+\frac{k}{p}}$-решение разностной задачи (3.4). Характеристикой точности локально-одномерной схемы является разность $y^{j+1} - u^{j+1} = z^{j+1}$. Промежуточные значения $y^{j+\frac{k}{p}}$ будем сравнивать с $u^{j+\frac{k}{p}} = u(x, t_{j+\frac{k}{p}})$, полагая $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$. Подставляя $y^{j+\frac{k}{p}} = z^{j+\frac{k}{p}} + u^{j+\frac{k}{p}}$ в разностное уравнение (3.4), получим

$$\frac{\varepsilon}{p} z_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) z_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k z^{j+\frac{k}{p}} + \psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{4.1}$$

где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) u_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} u_t^{j+\frac{k}{p}}.$$

Обозначив через

$$\overset{\circ}{\psi}_k = (L_k u + f_k - \frac{\varepsilon}{p} u_t - \frac{1}{p}\partial_{ot}^{\alpha} u)^{j+\frac{1}{2}}, \tag{4.2}$$

и замечая, что

$$\sum_{k=1}^{p} \overset{\circ}{\psi}_k = 0,$$

если

$$\sum_{k=1}^{p} f_k = f,$$

представим $\psi_k = \psi_k^{j+\frac{k}{p}}$ в виде

$$\psi_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

где

$$\psi_k^{j+\frac{k}{p}} = \left(\Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} u^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\left(\partial_{0t}^{\alpha} u\right)^{j+\frac{1}{2}}\right) -$$

$$- \left(\frac{\varepsilon}{p} u_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} u_t^{j+\frac{1}{2}}\right) + \overset{\circ}{\psi}_k = \overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k,$$

$$\overset{*}{\psi}_k = \left(\Lambda_k u^{j+\frac{k}{p}} - L_k u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_k^{j+\frac{k}{p}} - f_k^{j+\frac{1}{2}}\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} u^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\left(\partial_{0t}^{\alpha} u\right)^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{\varepsilon}{p} u_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{\varepsilon}{p} u_t^{j+\frac{1}{2}}\right)$$

Ясно, что

$$\overset{*}{\psi}_k = \begin{cases} O(h_k^2 + \tau) \text{ в регулярных узлах,} \\ O(1) \text{ в нерегулярных узлах,} \end{cases}$$

так как каждая из схем (3.4) номера κ аппроксимирует в обычном смысле соответствующее уравнение (2.5). Таким образом

$$\overset{*}{\psi}_k = O(h_k^2+\tau), \quad \overset{\circ}{\psi}_k = O(1), \quad \sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k = 0,$$

$$\psi = \sum_{k=1}^{p}\psi_k = \sum_{k=1}^{p}\left(\overset{\circ}{\psi}_k + \overset{*}{\psi}_k\right) = \sum_{k=1}^{p}\overset{*}{\psi}_k = O(|h|^2+\tau).$$

в регулярных узлах сетки ω_h.

Рассмотрим погрешность краевых условий разностной схемы (3.8), (3.9), обозначив через $z^{j+\frac{k}{p}} = y^{j+\frac{k}{p}} - u^{j+\frac{k}{p}}$. Запишем граничное условие при $x_k=0$ следующим образом

$$0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}y_{t,0} + \frac{0.5h_k}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}y_0 = a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}} + 0.5h_kf_{k,0} + \mu_{-k}, \quad (4.3)$$

Тогда, подставляя $y^{j+\frac{k}{p}} = z^{j+\frac{k}{p}} + u^{j+\frac{k}{p}}$ в (4.3), получим

$$0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}z_{t,0} + \frac{0.5h_k}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}z_0 = a_k^{(1_k)}z_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k}z_0^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k}u_0^{j+\frac{k}{p}} -$$

$$-0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}u_{t,0} - \frac{0.5h_k}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}u_0 + a_k^{(1_k)}u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} + 0.5h_kf_{k,0} + \mu_{-k}.$$

К правой части полученного выражения добавим и вычтем

$$0.5h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k} = 0.5h_k\left(L_ku + f_k - \frac{\varepsilon}{p}u_t - \frac{1}{p}\partial^{\alpha}_{ot}u\right)_0^{j+\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\psi_{-k} = 0.5h_k\left(f_{k,0} - \frac{\varepsilon}{p}u_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}u_0^{j+\frac{k}{p}}\right) + a_k^{(1_k)}u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k}u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} -$$

$$-0.5h_k\left(L_ku + f_k - \frac{\varepsilon}{p}u_t - \frac{1}{p}\partial^{\alpha}_{0t}u\right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k} =$$

$$= 0.5h_k\left(f_{k,0} - \frac{\varepsilon}{p}u_{t,0}^{j+\frac{k}{p}} - \frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}u_0^{j+\frac{k}{p}}\right) + a_k^{(1_k)}u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k}u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} -$$

$$-0.5h_k\left(L_ku\right)_0^{j+\frac{1}{2}} - 0.5h_k\left(f_k - \frac{\varepsilon}{p}u_t - \frac{1}{p}\partial^{\alpha}_{0t}u\right)_0^{j+\frac{k}{p}} + 0.5h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k\tau) =$$

$$= a_k^{(1_k)}u_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k}u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} - 0.5h_k\left(L_ku\right)_0^{j+\frac{1}{2}} + 0.5h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k\tau) =$$

$$= \Theta_k\frac{\partial u^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} + 0.5h_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^{j+\frac{k}{p}} - \beta_{-k}u_0^{j+\frac{k}{p}} - 0.5h_kd_{k,0}u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k} -$$

$$-0.5h_k\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\Theta_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) - q_ku\right)_0^{j+\frac{k}{p}} + 0.5h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k\tau) =$$

$$= \left[\Theta_k\frac{\partial u^{j+\frac{k}{p}}}{\partial x_k} - \beta_{-k}u_0^{j+\frac{k}{p}} + \mu_{-k}\right]\Bigg|_{x_k=0} + 0.5h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k} + O(h_k^2) + O(h_k\tau).$$

В силу граничных условий (2.2) выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Поэтому

$$\psi_{-k} = 0.5h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k} + \overset{*}{\psi}_{-k}.$$

Итак,

$$0.5h_k\frac{\varepsilon}{p}z_{t,0}+\frac{0.5h_k}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}z_0=a_k^{(1_k)}z_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar{\beta}_{-k}z_0^{j+\frac{k}{p}}+0.5h_k\overset{\circ}{\psi}_{-k}+\overset{*}{\psi}_{-k}.$$

или

$$\frac{\varepsilon}{p}z_{t,0}+\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}z_0=\Lambda_k^-z^{j+\frac{k}{p}}+\psi_{-k},\quad \psi_{-k}=\overset{\circ}{\psi}_{-k}+\frac{\overset{*}{\psi}_{-k}}{0.5h_k}.$$

Аналогично при $x_\alpha=l_\alpha$ имеем

$$\frac{\varepsilon}{p}z_{t,N_k}+\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}z_{N_k}=\Lambda_k^+z^{j+\frac{k}{p}}+\psi_{+k},\quad \psi_{+k}=\overset{\circ}{\psi}_{+k}+\frac{\overset{*}{\psi}_{+k}}{0.5h_k},$$

$$\overset{\circ}{\psi}_{\pm k}=O(1),\quad \sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_{\pm k}=0.$$

Очевидно, что

$$\overset{*}{\psi}_{\pm k}=\begin{cases}O(h_k^2+\tau)+O(h_k\tau), & \text{в регулярных узлах,}\\ O(1) & \text{в нерегулярных узлах.}\end{cases}$$

Таким образом, для погрешности $z^{j+\frac{k}{p}}$ получаем задачу:

$$\frac{\varepsilon}{p}z_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}}z=\bar{\Lambda}_kz^{j+\frac{k}{p}}+\Psi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{4.4}$$

$$z(x,0)=0, \tag{4.5}$$

где

$$\bar{\Lambda}_k=\begin{cases}\Lambda_k, & x_k\in\omega_{h_k}\\ \Lambda_k^-, & x_k=0,\\ \Lambda_k^+, & x_k=l_k,\end{cases}\qquad \Psi_k=\begin{cases}\psi_k, & x_k\in\omega_{h_k}\\ \psi_{-k}, & x_k=0,\\ \psi_{+k}, & x_k=l_k,\end{cases}$$

$$\psi_k=\overset{\circ}{\psi}_k+\overset{*}{\psi}_k,\quad \overset{\circ}{\psi}_k=O(1),\quad \overset{*}{\psi}_k=O\left(h_k^2+\tau\right),\quad \sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_k=0,$$

$$\psi=\sum_{k=1}^{p}\psi_k=\sum_{k=1}^{p}\left(\overset{\circ}{\psi}_k+\overset{*}{\psi}_k\right)=\sum_{k=1}^{p}\overset{*}{\psi}_k=O(|h|^2+\tau),$$

$$\psi_{-k}=\overset{\circ}{\psi}_{-k}+\frac{\overset{*}{\psi}_{-k}}{0.5h_k},\quad \psi_{+k}=\overset{\circ}{\psi}_{+k}+\frac{\overset{*}{\psi}_{+k}}{0.5h_k},$$

$$\psi_{\pm k}=O(h_k^2+\tau),\quad \overset{*}{\psi}_{\pm k}=O(h_k^2)+O(h_k\tau),\quad \overset{\circ}{\psi}_{\pm k}=O(1),\quad \sum_{k=1}^{p}\overset{\circ}{\psi}_{\pm k}=0.$$

Таким образом, ЛОС (3.10)-(3.11) обладает суммарной аппроксимацией $O(|h|^2+\tau)$ в регулярных узлах сетки $\bar{\omega}_h$. В нерегулярных узлах $\psi=O(1)$.

5. Устойчивость ЛОС

Получим априорную оценку в сеточной норме C для решения разностной задачи (3.10)-(3.11), выражающую устойчивость локально-одномерной схемы по начальным данным и правой части. Разностную задачу (3.10), (3.11) перепишем в виде

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)y_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\left(a_k y_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}-d_k y^{j+\frac{k}{p}}+\varphi_k^{j+\frac{k}{p}},\quad x_k\in\omega_{h_k},\tag{5.1}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t,0}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)y_{\bar t,0}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\frac{a_k^{(1_k)}y_{x_k,0}^{j+\frac{s}{p}}-\bar\beta_{-k}y_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}+\frac{\bar\mu_{-k}}{0.5h_k},\quad x_k=0,\tag{5.2}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}y_{\bar t,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)y_{\bar t,N_k}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=-\frac{a_k^{(N_k)}y_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{s}{p}}+\bar\beta_{+k}y_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}+\frac{\bar\mu_{+k}}{0.5h_k},\quad x_k=l_k,\tag{5.3}$$

$$y(x,0)=u_0(x).\tag{5.4}$$

Исследование устойчивости разностной схемы (5.1)-(5.4) будем проводить с помощью принципа максимума [15, с.226]. Получим априорную оценку для (5.1)-(5.4), для этого решение задачи (5.1)-(5.4) представим в виде суммы

$$y=\overline{y}+v+w,$$

где $\overline{y}$ решение однородных уравнений (5.1) с неоднородными краевыми условиями (5.2)-(5.3) и однородными начальными условиями (5.4):

$$\frac{\varepsilon}{p}\overline{y}_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\overline{y}_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\left(a_k\overline{y}_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}-d_k\overline{y}^{j+\frac{k}{p}},\quad k=1,2,...,p,\tag{5.5}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}\overline{y}_{\bar t,0}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\overline{y}_{\bar t,0}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\frac{a_k^{(1_k)}\overline{y}_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar\beta_{-k}\overline{y}_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}+\frac{\bar\mu_{-k}}{0.5h_k},\ x_k=0,\tag{5.6}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}\overline{y}_{\bar t,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\overline{y}_{\bar t,N_k}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=-\frac{a_k^{(N_k)}\overline{y}_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\bar\beta_{+k}\overline{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}+\frac{\bar\mu_{+k}}{0.5h_k},\ x_k=l_k,\tag{5.7}$$

$$\overline{y}(x,0)=0,\tag{5.8}$$

а $v-$решение неоднородного уравнения (5.1) с однородными краевыми (5.2)-(5.3) и неоднородными начальными условиями (5.4):

$$\frac{\varepsilon}{p}v_t^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\left(a_k v_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}-d_k v^{j+\frac{k}{p}}+\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{5.9}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}v_{\bar t,0}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar t,0}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\frac{a_k^{(1_k)}v_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar\beta_{-k}v_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k},\ x_k=0, \tag{5.10}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}v_{\bar t,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar t,N_k}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=-\frac{a_k^{(N_k)}v_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\bar\beta_{+k}v_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k},\ x_k=l_k, \tag{5.11}$$

$$v(x,0)=u_0(x), \tag{5.12}$$

и $w-$решение неоднородного уравнения (5.1) с однородными краевыми и начальными условиями (5.2)-(5.4):

$$\frac{\varepsilon}{p}w_t^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)w_{\bar t}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\left(a_k w_{\bar x_k}^{j+\frac{k}{p}}\right)_{x_k}-d_k w^{j+\frac{k}{p}}+\overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{5.13}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}w_{\bar t,0}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)w_{\bar t,0}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=\frac{a_k^{(1_k)}w_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}}-\bar\beta_{-k}w_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k},\ x_k=0, \tag{5.14}$$

$$\frac{\varepsilon}{p}w_{\bar t,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)w_{\bar t,N_k}^{\frac{s}{p}}=$$

$$=-\frac{a_k^{(N_k)}w_{\bar x_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}}+\bar\beta_{+k}w_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k},\ x_k=l_k, \tag{5.15}$$

$$w(x,0)=0, \tag{5.16}$$

где $\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}$, $\overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}$ определяются условиями

$$\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}=\begin{cases}\varphi_k,\ x\in\overset{\circ}{\omega}_h,\\ 0,\ x\in\overset{*}{\omega}_h,\end{cases}\qquad \overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}=\begin{cases}\varphi_k,\ x\in\overset{*}{\omega}_h,\\ 0,\ x\in\overset{\circ}{\omega}_h,\end{cases}$$

так, что $\overset{\circ}{\varphi}_k+\overset{*}{\varphi}_k=\varphi_k$ при $x\in\omega_h$, т.е. $\overset{*}{\varphi}_k$ отлична от нуля только в приграничных узлах.

Получим оценку для $\bar{y}$. Для этого уравнение (5.5) приведем к каноническому виду.

В точке $P = P(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} + d_k\right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} =$$

$$= \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} \bar{y}_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} \bar{y}_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} + \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right] \bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} +$$

$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)\bar{y}^0_{i_k} + \left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)\bar{y}^{\frac{1}{p}}_{i_k} + \right.$$

$$\left. + ... + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\bar{y}_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right],$$

где $\gamma = \dfrac{1}{p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$.

К каноническому виду следует привести и граничные условия.

В точке $P = P(x_0, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_k^{(1_k)}}{0.5h_k h^*_{k_+}} + \frac{\overline{\beta}_{-k}}{0.5h_k}\right]\bar{y}_0^{j+\frac{k}{p}} =$$

$$= \frac{a_k^{(1_k)}}{0.5h_k h^*_{k_+}}\bar{y}_1^{j+\frac{k}{p}} + \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}(2-2^{1-\alpha})\right]\bar{y}_0^{j+\frac{k-1}{p}} +$$

$$+\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)\bar{y}^0_0 + \left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)\bar{y}^{\frac{1}{p}}_0 + \right.$$

$$\left. + ... + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\bar{y}_0^{j+\frac{k-2}{p}}\right].$$

В точке $P = P(x_{N_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_k^{(N_k)}}{0.5h_k h^*_{k_-}} + \frac{\overline{\beta}_{+k}}{0.5h_k}\right]\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_k^{(N_k)}}{0.5h_k h^*_{k_-}}\bar{y}_{N_k-1}^{j+\frac{k}{p}} +$$

$$+\left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}(2-2^{1-\alpha})\right]\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right)\bar{y}^0_{N_k} + \right.$$

$$\left. + \left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right)\bar{y}^{\frac{1}{p}}_{N_k} + ... + \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\bar{y}_{N_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\right].$$

Справедлива следующая [1]

Лемма. Пусть $l = pj + k - 1 \geq 1$, тогда имеет место неравенство

$$-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}} > 0, \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1; \quad k = 2, 3, ..., p. \tag{5.17}$$

В [15] доказан принцип максимума и получены априорные оценки для решения сеточного уравнения общего вида

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \Omega,$$

где P,Q - узлы сетки Ω+S, $Ш'(P)-$ окрестность узла P, не содержащего самого узла P. Коэффициенты A(P), B(P,Q) удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0, \quad D(P) = A(P) - \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q) \geq 0. \tag{5.18}$$

Обозначим через $P(x,t')$, где $x \in \omega_h, \quad t' \in \omega'_\tau$ узел $(p+1)-$мерной сетки $\Omega = \omega_h \times \omega'_\tau$, через S $-$ границу Ω, состоящую из узлов P(x,0) при $x \in \overline{\omega}_h$ и узлов $P(x, t_{j+\frac{k}{p}})$ при $t_{j+\frac{k}{p}} \in \omega'_\tau$ и $x \in \gamma_{h,k}$ для всех $k = 1, 2, ..., p; \quad j = 0, 1, ..., j_0$, $\overset{*}{\Omega}_k-$ множество узлов $P(x, t_{j+\frac{k}{p}})$, где $x \in \overset{*}{\omega}_{h,k}-$ приграничный по направлению x_k узел сетки $\bar{\omega}_h$.

Справедливы следующие [16]

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения*

$$A(P)y(P) = \sum_{Q \in Ш'(P)} B(P,Q)y(Q) + F(P), \quad P \in \Omega, \tag{$*$}$$

удовлетворяют условиям

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) \geq 0, \quad D(P) > 0, \quad P \in \overset{*}{\omega},$$

$$A(P) > 0, \quad B(P,Q) > 0, \quad D(P) = F(P) = 0, \quad P \in \overset{o}{\omega},$$

где $\overset{o}{\omega}-$ *некоторое связное подмножество множества* ω, *а* $\overset{*}{\omega}-$ *дополнение* $\overset{o}{\omega}$ *до* ω.

Тогда для решения задачи (*) справедлива оценка

$$\|y\|_C \leq \left\| \frac{F(P)}{D(P)} \right\|_{C^*},$$

где

$$\|f\|_C = \max_{P \in \omega} |f(P)|, \quad \|f\|_{C^*} = \max_{P \in \omega^*} |f(P)|.$$

Теорема 2. *Если выполнены условия*

$$D'(P_{(n+1)}) > 0 \text{ для всех } P_{(n+1)} \in \omega, \quad A(P_{(n+1)}) > 0, \quad B(P_{(n+1)}, Q) \geq 0$$

для всех $Q \in Ш''_n, Q \in Ш'_{n+1}$,

$$\sum_{Q \in Ш''_n} B(P_{(n+1)}, Q) > 0, \quad \frac{1}{D'(P_{(n+1)})} \sum_{Q \in Ш''_n} B(P_{(n+1)}, Q) \leq 1 + c_1\tau,$$

где $c_1 = const > 0$ *не зависит от* $\tau, \ h$.

Тогда для решения задачи

$$A(P_{(n+1)})y(P_{(n+1)}) = \sum_{Q \in Ш'_{n+1}} B(P_{(n+1)}, Q)y(Q) + \Phi(P_{(n+1)}),$$

где $P_{(n+1)} = P(x, t_{n+1})$

$$\Phi(P_{(n+1)}) = \sum_{Q \in Ш''_n} B(P_{(n+1)}, Q)y(Q) + F(P_{(n+1)}),$$

$$D'(P_{(n+1)}) = A(P_{(n+1)}) - \sum_{Q \in Ш''_n} B(P_{(n+1)}, Q).$$

Справедлива оценка

$$\|y_{n+1}\|_{C_h} \le e^{c_1 t_n}\left(\|y_0\|_{C_h} + \sum_{k=1}^{n+1}\tau\|\widetilde{F}_k\|_{C_h}\right).$$

Проверим, учитывая положительность выражений, стоящих в круглых скобках (согласно Лемме), выполнимость условий Теоремы 1.

В точке $P = P(x_{i_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P) = \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}} + d_k\right] > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}; \frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right); \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right);\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right); ...; \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\} > 0,$$

$$D(P) = d_k \ge c_0 > 0;$$

а в точке $P = P(x_0, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P) = \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a^{(1_k)}_k}{0.5h_k h^*_{k_+}} + \frac{\bar\beta_{-k}}{0.5h_k}\right] > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{a^{(1_k)}_k}{0.5h_k h^*_{k_+}}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right); \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right);\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right); ...; \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\} > 0,$$

$$D(P) = \frac{\bar\beta_{-k}}{0.5h_k} > \frac{\beta_{-k}}{0.5h_k} \ge \frac{c_0}{0.5h_k} > 0;$$

в точке $P = P(x_{N_k}, t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P) = \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a^{(N_k)}_k}{0.5h_k h^*_{k_-}} + \frac{\bar\beta_{+k}}{0.5h_k}\right] > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{a^{(N_k)}_k}{0.5h_k h^*_{k_-}}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right); \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right);\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right); ...; \left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}} + 2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\} > 0,$$

$$D(P) = \frac{\bar\beta_{+k}}{0.5h_k} > \frac{\beta_{+k}}{0.5h_k} \ge \frac{c_0}{0.5h_k} > 0.$$

Таким образом, на основании Теоремы 1 для $\bar y$ получаем оценку:

$$\|\bar y^{j+1}\|_C \le \frac{1}{c_0}\max_{0<t'\le t_j}\left(\|\bar\mu_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\bar\mu_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right), \quad \beta_{\pm k} \ge c_0 > 0, \quad (5.19)$$

где

$$\|y\|_C = \max_{x\in\bar\omega_h}|y|, \quad \|y\|_{C_\gamma} = \max_{x\in\gamma_h}|y|.$$

Переходим к оценке функции v. Уравнение (5.9)-(5.12) перепишем в виде:

$$\left(\frac{\varepsilon}{p}+\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(\frac{\tau}{p}\right)^{1-\alpha}\right)v_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}=\Lambda_k v^{j+\frac{k}{p}}+\widetilde{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{5.20}$$

где

$$\widetilde{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}-\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-1}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)v_{\bar t}^{j+\frac{k}{p}}.$$

Уравнение (5.20) приведем к каноническому виду:

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}+d_k\right]v_{i_k}^{j+\frac{k}{p}}=\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}v_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}v_{i_{k-1}}^{j+\frac{k}{p}}+\Phi(P_{j+\frac{k}{p}}),$$

где

$$\Phi(P_{j+\frac{k}{p}})=\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}(2-2^{1-\alpha})\right]v_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}}+\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}},$$

$$\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}=\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}-$$

$$-\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\left(v_{i_k}^{\frac{s}{p}}-v_{i_k}^{\frac{s-1}{p}}\right).$$

Проверим выполнимость условий Теоремы 2, тогда в точке $P_{(k)}=P(x,t_{j+\frac{k}{p}})$ имеем:

$$A(P_{(k)})=\left[\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}}+\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}}+d_k\right]>0,$$

$$B(P_{(k)},Q)=\left\{\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h^*_{k_+}};\frac{a_{k,i_k}}{h_k h^*_{k_-}};\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right);\frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}\right);\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k}{p}}+2t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-1}{p}}-t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-2}{p}}\right);...;\left(-t^{1-\alpha}_{\frac{3}{p}}+2t^{1-\alpha}_{\frac{2}{p}}-t^{1-\alpha}_{\frac{1}{p}}\right)\right]\right\}>0,$$

$$D'(P_{(k)})=A(P_{(k)})-\sum_{Q\in Ш'_k(P)}B(P_{(k)},Q)=\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}+d_k\geq\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}>0,$$

для всех $Q\in Ш''_{k-1}, Q\in Ш'_k$,

$$\sum_{Q\in Ш''_{k-1}}B(P_{(k)})=\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)>0, \tag{5.21}$$

$$\frac{1}{D'(P_{(k)})}\sum_{Q\in Ш''_{k-1}}B(P_{(k)})=\frac{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^\alpha}}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}}\leq 1,$$

где

$$Ш'_{(P(k))}=Ш_k+Ш''_{k-1},\quad Ш'_k-\text{множество узлов } Q=Q(\xi,t_k)\in Ш'_{(P(x,t_k))}$$

$$Ш''_{k-1}-\text{множество узлов } Q=Q(\xi,t_{k-1})\in Ш'_{(P(x,t_{k-1}))}.$$

На основании Теоремы 2 и в силу (5.21) для v получаем оценку:

$$\|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C\leq\frac{1}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}}\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C+\frac{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma(2-2^{1-\alpha})}{\tau^\alpha}}{\frac{\varepsilon}{\tau}+\frac{\gamma}{\tau^\alpha}}\|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C. \tag{5.22}$$

Оценим $\|\bar{\varphi}^{j+\frac{k}{p}}\|_C$

$$\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}} = \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\left(t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}} -$$

$$-\frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k-2}\left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} =$$

$$= \overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau}\Bigg[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{0} +$$

$$+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{\frac{1}{p}} + ... + \left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)v_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\Bigg]. \tag{5.23}$$

Так как, выражения, стоящие в круглых скобках положительны, то из (5.23) получаем оценку

$$\|\bar{\varphi}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C \le \|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}\|_C + \frac{\gamma(2^{1-\alpha}-1)}{\tau^\alpha}\max_{0\le s\le k-2}\|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{5.24}$$

С помощью (5.24) из (5.22) находим

$$\max_{0\le s\le k}\|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C \le \max_{0\le s\le k-1}\|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C + \left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}+\tau d_k}\right)\max_{0\le s\le k}\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{s}{p}}\|_C \le$$

$$\le \max_{0\le s\le k-2}\|v^{j+\frac{s}{p}}\|_C + \left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right)\max_{0\le s\le k}\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{5.25}$$

Суммируем (5.25) сначала по $k = 1, 2, ..., p$ затем по $j' = 0, 1, 2, ..., j$. Тогда получим

$$\|v^{j+\frac{k}{p}}\|_C \le \|v^0\|_C + \sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\le s\le k}\|\overset{\circ}{\varphi}{}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_C. \tag{5.26}$$

Рассмотрим теперь задачу (5.13)-(5.16) для w. Перепишем уравнение (5.13) в каноническом виде

$$\left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k_+}^*} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k_-}^*} + d_k\right]w_{i_k}^{j+\frac{k}{p}} = \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k_+}^*}w_{i_k+1}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k_-}^*}w_{i_k-1}^{j+\frac{k}{p}} +$$

$$+\left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2-2^{1-\alpha}\right)\right]w_{i_k}^{j+\frac{k-1}{p}} + \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\Bigg[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right)w_{i_k}^{0} +$$

$$+\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right)w_{i_k}^{\frac{1}{p}} + ... + \left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)w_{i_k}^{j+\frac{k-2}{p}}\Bigg] + \overset{*}{\varphi}{}_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{5.27}$$

и присоединим граничные и начальные условия (5.14-4.16)

$$\frac{\varepsilon}{p}w_{\bar{t},0}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right)w_{\bar{t},0}^{\frac{s}{p}} =$$

$$= \frac{a_k^{(1_k)}w_{x_k,0}^{j+\frac{k}{p}} - \bar{\beta}_{-k}w_0^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k},\ x_k = 0, \tag{5.28}$$

$$\frac{\varepsilon}{p} w_{\bar{t},N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{p}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t_{j+\frac{k-s+1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-s}{p}}^{1-\alpha}\right) w_{\bar{t},N_k}^{\frac{s}{p}} =$$

$$= -\frac{a_k^{(N_k)} w_{\bar{x}_k,N_k}^{j+\frac{k}{p}} + \bar{\beta}_{+k} w_{N_k}^{j+\frac{k}{p}}}{0.5h_k}, \ x_k = l_k, \tag{5.29}$$

$$w(x,0) = 0, \tag{5.30}$$

т.е. $w = 0$ на границе S сетки Ω, т.е. $w(P) = 0$ при $P \in S$.

Правая часть $\overset{*}{\varphi}$ отлична от нуля лишь в узлах (x, t'), где $x \in \overset{*}{\omega}_h$. Видно, что

$$A(P) = \left[\frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + \frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k_+}^*} + \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k_-}^*} + d_k\right] > 0,$$

$$B(P,Q) = \left\{\frac{a_{k,i_k+1}}{h_k h_{k_+}^*}; \frac{a_{k,i_k}}{h_k h_{k_-}^*}; \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha}\left(2 - 2^{1-\alpha}\right); \frac{1}{\tau}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha}\right);\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(-t_{j+\frac{k}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{j+\frac{k-1}{p}}^{1-\alpha} - t_{j+\frac{k-2}{p}}^{1-\alpha}\right); ...; \left(-t_{\frac{3}{p}}^{1-\alpha} + 2t_{\frac{2}{p}}^{1-\alpha} - t_{\frac{1}{p}}^{1-\alpha}\right)\right]\right\} > 0,$$

$$D(P) = \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + d_k > 0.$$

Тогда в силу однородных краевых условий (5.28)-(5.29) имеем

$$D(P) = \frac{\varepsilon}{\tau} + \frac{\gamma}{\tau^\alpha} + d_k.$$

На основании теоремы 1, получаем

$$\max_{\Omega+S}|w(P)| \le \max_{t' \in w_\tau}\|\frac{\overset{*}{\varphi}(x,t')}{D}\|_{\overset{*}{C}} \le \max_{0<t'\le t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha} + \tau d_k} \le$$

$$\le \max_{0<t'\le t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \tag{5.31}$$

Из оценок (5.19) и (5.26) и (5.31) следует окончательная оценка

$$\|y^{j+1}\|_C \le \|u_0\|_C + \frac{1}{c_0}\max_{0<t'\le j\tau}\left(\|\bar{\mu}_{-k}(x,t')\|_{C_\gamma} + \|\bar{\mu}_{+k}(x,t')\|_{C_\gamma}\right) +$$

$$+ \max_{0<t'\le t_j}\frac{\tau\|\varphi^*\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} + \sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\le s\le k}\|\overset{\circ}{\varphi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_{\overset{\circ}{C}}, \tag{5.32}$$

где

$$h = \max_{1\le k\le p} h_k, \quad \|y\|_C = \max_{x\in\omega_h}|y|, \quad \|y\|_{C_\gamma} = \max_{x\in\gamma_h}|y|, \quad \|\varphi\|_{\overset{*}{C}} = \max_{x\in\overset{*}{\omega}_h}|\varphi|, \quad \|\varphi\|_{\overset{\circ}{C}} = \max_{x\in\overset{\circ}{\omega}_h}|\varphi|$$

Таким образом справедлива

Теорема 3. *Локально-одномерная схема (3.10), (3.11) устойчива по начальным данным и правой части, так что для решения задачи (3.10), (3.11) справедлива оценка(5.32).*

6. Равномерная сходимость ЛОС

Чтобы использовать свойство $\sum\limits_{k=1}^{p} \psi^{\circ}{}_k = 0, \quad \psi^{\circ}{}_k = O(1)$ представим по аналогии с [15], решение задачи для погрешности в виде суммы

$$z_{(k)} = v_{(k)} + \eta_{(k)}, \quad z_{(k)} = z^{j+\frac{k}{p}}, \tag{6.1}$$

где $\eta_{(k)}$ определяется условиями

$$\frac{\varepsilon}{p}\eta_{\bar{t}}^{j+\frac{k}{p}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{p}\sum_{s=1}^{pj+k}\left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \overset{\circ}{\Psi}_k, \quad x \in \omega_h + \gamma_{h,k}, \tag{6.2}$$

$$\eta(x,0) = 0,$$

$$\overset{\circ}{\Psi}_k = \begin{cases} \overset{\circ}{\psi}_k, & x_k \in \omega_{h_k}, \\ \overset{\circ}{\psi}_{-k}, & x_k = 0, \\ \overset{\circ}{\psi}_{+k}, & x_k = l_k. \end{cases}$$

Функция $v_{(k)}$ определяется условиями

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} v_{(k)} = \Lambda_k v_{(k)} + \widetilde{\Psi}_k, \quad \widetilde{\Psi}_k = \Lambda_k \eta_{(k)} + \overset{*}{\Psi}, \quad x_k \in \omega_{h_k}, \tag{6.3}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} v_{(k)} = \Lambda_k^- v_{(k)} + \widetilde{\Psi}_{-k}, \quad \widetilde{\Psi}_{-k} = \Lambda_k^- \eta_{(k)} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{-k}}{0.5h_k}, \quad x_k = 0, \tag{6.4}$$

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\frac{k}{p}}} v_{(k)} = \Lambda_k^+ \vartheta_{(k)} + \widetilde{\Psi}_{+k}, \quad \widetilde{\Psi}_{+k} = \Lambda_k^+ \eta_{(k)} + \frac{\overset{*}{\Psi}_{+k}}{0.5h_k}, \quad x_k = l_k, \tag{6.5}$$

$$v(x,0) = 0, \tag{6.6}$$

где

$$\widetilde{\Psi}_k = \overset{*}{\Psi} + \Lambda_k \eta_{(k)}, \quad \overset{*}{\Psi} = O\left(h_k^2 + \tau\right), \quad \overset{*}{\Psi}_{\pm k} = O\left(h_k^2 + \tau\right).$$

Покажем, что $\eta^{j+\frac{k}{p}} = O\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right), \quad k = 1, 2, ..., p, \quad j = 0, 1, 2, ..., j_0 - 1.$

Ради простоты рассмотрим двумерный случай (p = 2). Сначала положим $j = 0$, т.е. рассмотрим первый слой $(0, t_1]$. Тогда задача (6.2) примет вид

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{s=1}^{k}\left(t^{1-\alpha}_{\frac{k-s+1}{2}} - t^{1-\alpha}_{\frac{k-s}{2}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\psi}_k, \quad k = 1, 2.$$

Пусть $k = 1$, тогда получим

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha}_{\frac{1}{2}}\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} = \overset{\circ}{\psi}_1\,. \tag{6.7}$$

При $k = 2$, получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\left(t_1^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}_{\frac{1}{2}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + t^{1-\alpha}_{\frac{1}{2}}\eta_{\bar{t}}^{1}\right] = \overset{\circ}{\psi}_2\,. \tag{6.8}$$

Складывая выражения (6.7) и (6.8), получаем

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{\frac{1}{2}} + \frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\tau^{\alpha}}\left[\left(1 - \frac{1}{2^{1-\alpha}}\right)\eta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^{1-\alpha}}\eta^{1}\right] = 0. \tag{6.9}$$

Из (6.7) находим

$$\eta^{\frac{1}{2}} = \frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \overset{\circ}{\psi}_1 = -\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} \overset{\circ}{\psi}_2, \tag{6.10}$$

где $\gamma = \frac{1}{2^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha)}$.

Выражая η^1 из (6.9) и учитывая (6.10), получаем

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^1 = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \tag{6.11}$$

Допустим, что при $j = n$ выполнено условие

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^1, \eta^{1+\frac{1}{2}}, ..., \eta^{n+1} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \tag{6.12}$$

Опираясь на допущение (6.12) покажем, что аналогичное условие выполнено и при $j = n+1$. Для чего запишем уравнение (6.2) при $j = n+1,\ p = 2:$

$$\frac{\varepsilon}{2}\eta_{\bar{t}}^{n+1+\frac{k}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{2(n+1)+k} \left(t^{1-\alpha}_{n+1+\frac{k-s+1}{2}} - t^{1-\alpha}_{n+1+\frac{k-s}{2}}\right)\eta_{\bar{t}}^{\frac{s}{2}} = \overset{\circ}{\psi}_k, \quad k = 1, 2. \tag{6.13}$$

Полагая в (6.13) $k = 1$, находим

$$\tau^{1-\alpha}\left[\left(n + \frac{3}{2}\right)^{1-\alpha} - 2\,(n+1)^{1-\alpha} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}\right]\eta^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\tau^{1-\alpha}\left[(n+1)^{1-\alpha} - 2\left(n + \frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} + n^{1-\alpha}\right]\eta^1 + \cdots -$$

$$-\Gamma(2-\alpha)\left(\varepsilon - \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\,(1 - 2^{\alpha})\right)\eta^{n+1} +$$

$$+\Gamma(2-\alpha)\left(\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}\right)\eta^{n+\frac{3}{2}} = 2\Gamma(2-\alpha)\tau\, \overset{\circ}{\psi}_1\,. \tag{6.14}$$

Откуда, с учетом (6.12) и достаточной ограниченности коэффициентов при $\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^1, ..., \eta^{n+\frac{3}{2}}$, находим $\eta^{n+\frac{3}{2}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right)$.

Положим теперь в (6.13) $k = 2$, затем сложим полученное таким образом выражение с выражением (6.14) с учетом равенства

$$\overset{\circ}{\psi}_1 + \overset{\circ}{\psi}_2 = 0.$$

Тогда получим

$$\eta^{\frac{1}{2}}, \eta^1, ..., \eta^{n+1}, \eta^{n+\frac{3}{2}}, \eta^{n+2} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right). \tag{6.15}$$

Итак, равенство (6.15) выполнено при любом значении j. Нетрудно заметить, что аналогично можно показать, что

$$\eta^{j+\frac{k}{p}} = O\left(\frac{\tau}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}}\right), \quad k = 1, 2, ..., p, \quad j = 0, 1, ..., j_0 - 1.$$

Для оценки решения задачи (6.3)-(6.6) воспользуемся Теоремой 3:

$$\|v^{j+1}\|_C \le \max_{0<j'+\frac{k}{p}\le j+1}\left(\frac{\tau\|\widetilde{\psi}\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon + \gamma\tau^{1-\alpha}} + \|\eta^{j'+\frac{k}{p}}\|_{C_\gamma}\right) +$$

$$+\sum_{j'=0}^{j}\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{k=1}^{p}\max_{0\le s\le k}\|\widetilde{\psi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_C, \qquad (6.16)$$

где $\widetilde{\psi}_k=\overset{*}{\psi}_k+\Lambda_k\eta_{(k)}$.

Если существуют непрерывные в замкнутой области $\bar{Q}_T$, производные $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x_k^2\partial x_\nu^2}$, $1\le k,\ \nu\le p,\quad k\ne\nu$, то

$$\bar{\Lambda}_k\eta_{(k)}=-\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right)a_k\bar{\Lambda}_k\left(\overset{\circ}{\Psi}_{k+1}+...+\overset{\circ}{\Psi}_p\right)=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right),$$

во всех узлах $x\in\omega_h$, так как $\eta_{(k)}$ определяется из уравнения (6.2) всюду в $\omega_h+\gamma_h$, где a_k- известные постоянные. С другой стороны, имеем $\overset{*}{\psi}_k=O\left(h^2+\dfrac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right)$ в регулярных узлах ω_h и $\overset{*}{\psi}_k=O(1)$ в нерегулярных узлах сетки.

Поэтому

$$\frac{\tau\|\widetilde{\psi}\|_{\overset{*}{C}}}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}=O\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right),\quad \|\widetilde{\psi}_k^{j'+\frac{s}{p}}\|_C=O\left(h^2+\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right).$$

Тогда из оценки (6.16) находим

$$\|v^{j+1}\|_C\le M\left(\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}+p\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\sum_{j'=0}^{j}\left(h^2+\frac{\tau}{\varepsilon+\gamma\tau^{1-\alpha}}\right)\right)\le$$

$$\le M\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}}+\frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}\right),\quad h=\max_{1\le k\le p}h_k.$$

Следовательно,

$$\|z^{j+1}\|_C\le\|\eta^{j+1}\|_C+\|v^{j+1}\|_C\le O\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}}+\frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}\right).$$

Итак, справедлива

Теорема 4. *Пусть задача (2.5)-(2.8) имеет единственное непрерывное решение $u(x,t)$ в $\overline{Q}_T$ при всех значениях ε и существуют непрерывные в $\overline{Q}_T$ производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2\partial x_\nu^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x_k^2\partial t},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2},\quad 1\le k,\ \nu\le p,\quad k\ne\nu,\quad 0<\alpha<1,$$

тогда решение разностной задачи (3.10), (3.11) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (2.1)-(2.4) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}}+\frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}+\varepsilon\right),$$

$h^2=o(\varepsilon+\tau^{1-\alpha}),\quad \tau=o((\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2)$, *где $\varepsilon-$ малый параметр.*

Очевидно, что скорость сходимости будет определяться наилучшим образом, если

$$\frac{h^2}{\varepsilon+\tau^{1-\alpha}}+\frac{\tau}{(\varepsilon+\tau^{1-\alpha})^2}=\varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = \tau^\gamma$, тогда из последнего получаем

$$h^2\left(\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha}\right) + \tau = \tau^\gamma\left(\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha}\right)^2.$$

или

$$\tau \le \tau^\gamma\left(\tau^\gamma + \tau^{1-\alpha}\right)^2.$$

Следовательно,

$$\min\{\gamma, 1-\alpha\} = \frac{1-\gamma}{2},$$

откуда получаем, что

$$\varepsilon = \begin{cases} \tau^{\frac{1}{3}}, & 0 < \alpha \le \frac{2}{3}, \\ \tau^{2\alpha-1}, & \frac{2}{3} < \alpha < 1. \end{cases} \tag{6.17}$$

Тогда справедлива следующее

Следствие. Если ε определяется из условия (6.17), тогда решение разностной задачи (3.4)-(3.6) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (2.1)- (2.4) со скоростью

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{\frac{1}{3}}} + \tau^{\frac{1}{3}}\right), \text{ если } 0 < \alpha \le \frac{2}{3},$$

и

$$O\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right), \text{ если } \frac{2}{3} < \alpha < 1.$$

References

[1] M.M. Lafisheva, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional difference schemes for the fractional order diffusion equation*, Comput. Math. and Math. Phys. **48** (2008), 1875–1884.

[2] A.K. Bazzaev, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional schemes for the diffusion equation with a fractional time derivative in an arbitrary domain*, Comput. Math. and Math. Phys. **56**:(1) (2016), 106—115.

[3] A.K. Bazzaev, M.Kh. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional scheme for fractional diffusion equations with robin boundary conditions*, Comput. Math. and Math. Phys. **50** (2010), 1141–1149.

[4] B.A. Ashabokov, Z.V. Beshtokova and M.K. Shkhanukov-Lafishev, *Locally one-dimensional difference scheme for a fractional tracer transport equation*, Comput. Math. and Math. Phys. **57** (2017), 1498–1510.

[5] A. A. Alikhanov, *Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings*, Appl. Math. **219** (2012), 3938—3946.

[6] A. A. Alikhanov, *A new difference scheme for the time fractional diffusion equation*, J. Comput. Phys. **280** (2015), 424—438.

[7] M.KH. Beshtokov, *Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann-Liouville fractional derivative* Differential Equations, **54**:6 (2018), 758–774.

[8] M.KH. Beshtokov, *To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov-Caputo fractional derivative* Russian Mathematics, **62**:10 (2018), 1–14.

[9] K. Diethelm, G. Walz, *Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation*, Numer. Algorithms. **16** (1997), 231—253.

[10] Y. N. Zhang, Z. Z. Sun, H. L. Liao, *Finite difference methods for the time fractional diffusion equation on non-uniform meshs*, J. Comput. Phys. **265** (2014), 195–210.

[11] M.Kh. Beshtokov, V.A. Vodakhova, *Nonlocal boundary value problems for a fractionalorder convection–diffusion equation*, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **29**:4 (2019), 459-–482.

[12] M.Kh. Beshtokov, F.A. Erzhibova, To boundary value problems for integro-differential equations of fractional order // Matematicheskiye trudy, **23**:1 (2020), 16–36.

[13] M.I. Vishik, L.A. Lyusternik, *Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter*, Uspekhi Matematicheskikh Nauk **12**:5 (1967), 3–122.
[14] S.K. Godunov, V.S. Ryben'kiy, *Difference Schemes* Nauka, Moscow, 1977.
[15] A.A. Samarskii, *The theory of difference schemes* Nauka, Moscow, 1983.
[16] A.A. Samarskii, A.V. Gulin, *Stability of difference schemes* Nauka, Moscow, 1973.

Murat Khamidbievich Beshtokov
Institute of applied mathematics and automation, Kabardino-Balkarian scientific center of RAS,
ul. Shortanova, 89A,
360000, Nalchik, Russia
Email address: beshtokov-murat@yandex.ru