

Отзыв рецензента

на статью А. М. Мейрманова и С. А. Гриценко

*'Filtration in Composite Incompressible Media
with Variable Pore Space Structure'*,

представленную для опубликования в

«Сибирских электронных математических известиях»

В статье Анварбека Мукатовича Мейрманова и Светланы Александровны Гриценко рассматривается математическая модель, описывающая совместное движение упругого несжимаемого пористого тела и вязкой несжимаемой жидкости, полностью насыщающей поры. При этом считается, что пористое тело состоит из нескольких взаимно непересекающихся частей $K_n^{(\delta)}$, геометрические и механические свойства которых различаются между собой, а жидкость — одна и та же во всём пространстве пор. На границах между двумя различными упругими компонентами и на границе между жидкой компонентой (с одной стороны) и упругими компонентами (с другой стороны) ставятся условия непрерывности поля перемещений и нормальных напряжений.

На геометрию порового пространства накладываются условия пространственной периодичности, причём, как уже указано, шаблонная периодическая структура задаётся обособленно в каждом из множеств $K_n^{(\delta)}$, и объединяющими свойствами являются только свойства связности жидкой и твёрдой компонент и один и тот же характерный диаметр пор $O(\varepsilon)$ ($\varepsilon \ll 1$) во всём континууме.

Авторами изучается задача гомогенизации микроструктуры, то есть задача проведения и обоснования предельного перехода в семействе решений исходной задачи при стремлении малого параметра ε к нулю и построения предельных уравнений. При этом предполагается, что от малого параметра ε зависит коэффициент вязкости. Корректность исходной постановки при фиксированных значениях $\varepsilon > 0$ уже установлена в предыдущих работах авторов ([21,22] по списку литературы).

Изучены два предельных асимптотических режима. В случае «большой вязкости» предельными макроскопическими усреднёнными уравнениями оказываются уравнения, описывающие поведение упругого несжимаемого тела, в которых информация о микроскопическом «вязком жидком» поведении компоненты в порах сублимируется в эффективных усреднённых коэффициентах. Эта модель является односкоростной. В случае «слабой вязкости» система предельных уравнений оказывается моделью двухскоростного континуума: движение упругой компоненты описывается уравнениями теории упругости, в то время как движение вязкой жидкой компоненты подчиняет-

ся закону Дарси. Обоснование процедур гомогенизации и вывод предельных макроскопических уравнений проведены методом двухмасштабной сходимости Аллера–Нгуэтсенга и стандартным методом асимптотической декомпозиции.

На мой взгляд, результаты, изложенные в статье А. М. Мейрманова и С. А. Гриценко являются новыми и интересными в теории усреднения уравнений поромеханики. Они вносят в эту теорию ценное дополнение и являются естественным продолжением цикла предыдущих работ авторов. Считаю, что все результаты работы достоверны. Все проведённые в статье доказательства корректны.

Вместе с этим имеются серьёзные замечания к стилю изложения результатов в статье. В целом, некоторые рассуждения во введении и пункте 2 оставляют неясность и затрудняют восприятие результатов. Приведу замечания по порядку.

1. Аннотация (abstract) не отражает содержания статьи. Во-первых, в аннотации во втором предложении написано: ‘Unlike previous works here the poroelastic medium has a variable pore space structure’. Это утверждение некорректно, потому что в статьях авторов [21,22] как раз рассматривалась переменная пористая структура: она менялась через границу двух частей пористого тела. Во-вторых, в аннотации никак не сформулировано, в чём состоит результат статьи.
2. На странице 145 в списке безразмерных величин упомянут параметр α_τ , который далее фигурирует только в выражении для τ_0 и нигде больше. Смысл α_τ и τ_0 в статье никак не проясняется, впрочем, описание этих величин в контексте статьи излишне.
3. Второй абзац на странице 146 содержит предложение, смысл которого совершенно неясен: ‘The homogenization model obtained, depending on the parameter δ , has been already studied above and admits a subsequent limit as $\delta \rightarrow 0$, which leads to the final homogenized model, taking into account the macroscopic inhomogeneity of the continuum’. Дело в том, что выше в статье никакая модель не изучалась и не ставилась (стр. 146 является лишь третьей страницей статьи). Если речь идёт об исследованиях, изложенных в каких-либо других статьях, то необходимо дать ссылки на эти статьи. В предыдущих статьях авторов [21,22] малый параметр δ не вводился и, соответственно, вопрос о предельном переходе при $\delta \rightarrow 0$ тоже не ставился.
4. В следующих двух абзацах на странице 146 содержатся рассуждения о предельных переходах при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$ и об очерёдности этих пере-

ходов. При этом в контексте статьи δ является фиксированным, по сути — «немым», параметром: зависимость механических и геометрических данных задачи от δ никак не вводится, за исключением того свойства, что множества $K_n^{(\delta)}$ ($n = 1, \dots, N_\delta$) попарно не пересекаются.

Поэтому рассуждения о предельном переходе при $\delta \rightarrow 0$ выглядят очень странными.

Вообще, есть ощущение, что представленный текст статьи изначально был частью какого-то гораздо более объёмного материала, и при выделении в отдельную рукопись авторам не удалось добиться самодостаточности изложения, что повлекло ряд неясностей.

5. Геометрия микроструктуры в начале параграфа 2 изложена сбивчиво. В последней строке на стр. 146 вводится характеристическая функция $\chi_0(\mathbf{x}) = \chi_n\left(\frac{\mathbf{x}}{\delta}\right)$, где $\chi_n(\mathbf{y})$ — 1-периодическая функция по \mathbf{y} , что однозначно указывает на то, что области $K_n^{(\delta)}$ расположены периодически. Однако далее это нигде не используется, но вводятся характеристические функции $\chi^{(\delta)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \chi_n(\mathbf{y})$, $\chi^{\delta, \varepsilon}(\mathbf{x}) = \chi^{(\delta)}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$, что указывает на то, что с помощью χ_n также вводится периодическая структура внутри каждого $K_n^{(\delta)}$. Из дальнейшего изложения становится понятно, что в связи с параметром δ никакой структуры не вводится. В связи с этим, последняя строка на стр. 146 только вводит в заблуждение и ясного смысла не несёт.

По-видимому, начало параграфа 2 требует серьёзной переработки: уместно заново изложить то, как вводятся параметры δ и ε и более подробно написать зависимость коэффициентов в уравнении (2) от этих параметров.

6. Параграф 2 озаглавлен как ‘The Problem Statements and Main Results’. Однако явно на главные результаты статьи не указано. Из контекста можно предположить, что речь идёт о теоремах 2 и 3.
7. На стр. 150 вводится в рассмотрение матрица $\mathbb{B}_0^s(\mathbf{y})$, однако в явном виде она нигде не определяется. О том, как она выглядит, можно догадаться из формулы (19), но лучше написать её вид явно.
8. На стр. 153 в формуле (28) замечена опечатка ($\dots\chi(\mathbf{y})(\mathbf{y})\dots$). В строчке перед формулой (30) некорректна дана ссылка на условие регулярности.
9. На стр. 154 в конце параграфа 2 вместо пространного комментария ‘We have not formulated all statements ... variable properties of the medium.’,

наверное, лучше явно указать на ближайшую цель дальнейшего исследования, или убрать этот комментарий вовсе.

Вообще, следует заметить, что проведённое в статье исследование обладает достаточной законченностью для опубликования и дополнительные комментарии, в принципе, не нужны.

На основании вышеизложенного считаю, что статья А. М. Мейрманова и С. А. Гриценко 'Filtration in Composite Incompressible Media with Variable Pore Space Structure' требует серьёзной стилистической доработки, и только после неё может быть опубликована в «Сибирских электронных математических известиях».