S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.63
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35K05

НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ ТЕПЛОЕМКОСТЬЮ

М.Х. БЕШТОКОВ, М.З. ХУДАЛОВ

Abstract. In a rectangular domain we study a nonlocal boundary value problems for a generalized integro-differential heat conduction equations of fractional-order with a specific heat concentrated at the boundary. Using the method of energy inequalities, a priori estimates are obtained in the differential and difference interpretations. The uniqueness and stability of the solution with respect to the initial data and the right-hand side, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the differential problem are proved.

Keywords: boundary value problems, a priori estimation, integro-differential equation, fractional order differential equation, fractional Caputo derivative, heat conduction equation.

1. Введение

Существует большое количество книг, посвящённых дробному математическому анализу, дробным дифференциальным уравнениям и их применениям в физике, механике, биологии [1-7]. В настоящее время стало очевидным, что при решении многих задач в механике, физике, биологии часто встречаются среды и системы, которые хорошо интерпретируются как фракталы, примерами последних могут служить сильно пористые среды, каковым, например, является почвогрунт. Решение различных задач для таких сред приводит к

Beshtokov, M.Kh., KHudalov, M.Z. A nonlocal boundary value problems for a generalized integro-differential equations of fractional-order diffusion convection with a specific heat concentrated at the boundary.

.

Поступила 8 июля 2020 г., опубликована 31 декабря 2015г.

краевым задачам для дифференциальных уравнений с дробной производной. Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка и вызывают большой теоретический и практический интерес.

В настоящей работе рассматривается нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности дробного порядка с нестандартными краевыми условиями, когда на границе помещается сосредоточенная теплоемкость величины C_0 и происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона [8, с. 396]. Такие условия возникают в случае, когда рассматривается тело с большой теплопроводностью, вследствие чего температуру по всему объёму этого тела можно считать постоянной (см. [9, с. 186]), а также при решении задачи об установлении температуры в ограниченной среде при наличии нагревателя, трактуемого как сосредоточенная теплоемкость [10]. Тогда краевое условие, например при $x = 0$, (выражающее уравнение теплового баланса) будет иметь вид

$$C_0\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial x} - h(u-u_0), C_0 = const > 0,$$

где u_0- температура внешней среды.

Условия такого рода возникают также в практике регулирования солевого режима почв, когда рассоление верхнего слоя достигается сливом слоя воды с поверхности, затопленного на некоторое время участка (см. [11, с. 233]). Если на поверхности поля имеется слой воды постоянной толщины h, то на верхней границе следует задать условие

$$h\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.1}$$

где $c-$ концентрация соли в почвенном растворе, D- диффузивности.

Для описания движения примеси в потоке однородной жидкости используется дифференциальное уравнение дробного порядка [12]. Для определения целесообразности режима смены воды может потребоваться решение краевой задачи с условиями на верхней границе толщи, отличающейся от (1.1). Так как почву следует рассматривать как среду фрактальную, то при написании граничных условий есть смысл также использовать концепцию фрактала

$$C_0\partial_{0t}^{\alpha}u = k\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Численным методам решения локальных и нелокальных краевых задач для различных уравнений дробного порядка посвящены работы [13-18]. В работах [11-15] получены результаты, позволяющие, как и в классическом случае ($\alpha = 1$), применять метод энергетических неравенств для нахождения априорных оценок краевых задач для уравнения дробного порядка в дифференциальной и разностной трактовках.

2. Постановка нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t),$$

$$0 < x < l,\ 0 < t \leq T, \tag{2.1}$$

$$k(0,t)u_x(0,t) = \beta_{11}(t)u(0,t) + \beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) - \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.2}$$

$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta_{21}(t)u(l,t) + \beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leq x \leq l, \tag{2.4}$$

где

$$0 < c_0 \leq k(x,t),\ \beta_{12}(t),\ \beta_{22}(t) \leq c_1,$$

$$|\beta_{11}(t),\ \beta_{21}(t),\ r(x,t),\ p(x,t,\tau),\ k_x(x,t),\ r_x(x,t)| \leq c_2, \tag{2.5}$$

$\partial_{0t}^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t \frac{u_\tau(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha}d\tau,$ – дробная производная в смысле Герасимова-Капуто порядка $\alpha,\ 0 < \alpha < 1,\ c_i = const > 0, i = 0,1,2.$

В дальнейшем будем предполагать, что решение задачи (2.1) – (2.4) существует и обладает нужными по ходу изложения производными.

По ходу изложения будем также использовать положительные постоянные числа $M_i,\ i = 1,2,...,$ зависящие только от входных данных рассматриваемой задачи.

3. Априорная оценка в дифференциальной форме

Для получения априорной оценки решения задачи (2.1) - (2.4) в дифференциальной форме умножим уравнение (2.1) скалярно на $U = u + \partial_{0t}^{\alpha}u$:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u, U\Big) = \Big(\big(ku_x\big)_x, U\Big) + \Big(ru_x, U\Big) + \Big(\int_0^t pud\tau, U\Big) + \Big(f, U\Big), \tag{3.1}$$

где $\Big(a,b\Big) = \int_0^l abdx,\ \Big(a,a\Big) = \|a\|_0^2,$ где a, b – заданные на $[0,l]$ функции.

Преобразовывая слагаемые, входящие в тождество (3.1), пользуясь неравенством Коши с ε и леммой 1 [13], после несложных преобразований, из (3.1) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2 + c_0\|u_x\|_0^2 + \frac{c_0}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|u_x\|_0^2 \leq$$

$$\leq Uku_x\Big|_0^l + M_1\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big) + M_2\int_0^t \|u\|_0^2 d\tau + M_3\|f\|_0^2. \tag{3.2}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (3.2), тогда получим

$$Uku_x\Big|_0^l = \Big(u(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)\Big(\mu_2(t) - \beta_{21}(t)u(l,t) - \beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big) +$$

$$+\Big(u(0,t) + \partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)\Big(\mu_1(t) - \beta_{11}u(0,t) - \beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big) =$$

$$= \mu_2(t)u(l,t) + \mu_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \beta_{21}(t)u^2(l,t) - \beta_{21}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) -$$

$$-\beta_{22}(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \beta_{22}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2 + \mu_1(t)u(0,t) + \mu_1(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) -$$

$$-\beta_{11}(t)u^2(0,t) - \beta_{11}u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) - \beta_{12}(t)u(0,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t) -$$

$$-\beta_{12}\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2 \leq M_4^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \varepsilon_1\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2 + \varepsilon_2\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2 +$$

$$+M_5^{\varepsilon}\Big(\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2\Big) - \beta_{22}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2 - \frac{1}{2}\beta_{22}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t) - \beta_{12}(t)\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\beta_{12}(t)\partial_{0t}^{\alpha}u^2(0,t) \leq -\frac{\beta_{12}(t)}{2}\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(0,t)\Big)^2 - \frac{\beta_{22}(t)}{2}\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)^2 - \frac{\beta_{12}(t)}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(0,t) -$$

$$-\frac{\beta_{12}(t)}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t)+M_6\Big(\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2\Big)+M_7\Big(\mu_1^2+\mu_2^2\Big). \tag{3.3}$$

Учитывая (3.3), из (3.2) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\le$$

$$\le M_8\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_9\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+M_{10}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big), \tag{3.4}$$

где $\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\|u\|_0^2+\|u_x\|_0^2$.

Применяя к обеим частям неравенства (3.4) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, получаем

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\Big)\le M_8D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+$$

$$+M_9D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau+M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \tag{3.5}$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (3.5) следующим образом

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\int_0^{\tau}\|u\|_0^2ds=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|_0^2\int_s^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\|u\|_0^2\Big(-\frac{(t-\tau)^{\alpha}}{\alpha}\Big|_s^t\Big)ds=\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha}\|u\|_0^2ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha}\|u\|_0^2d\tau\le\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}\int_0^t\frac{(t-\tau)\|u\|_0^2d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\le\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2.$$

Итак, получаем

$$D_{0t}^{-\alpha}\int_0^t\|u\|_0^2d\tau\le\frac{T}{\alpha}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|_0^2. \tag{3.6}$$

С помощью (3.6) из (3.5) находим

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\Big)\le M_{12}D_{0t}^{-\alpha}\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+$$

$$M_{11}\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \tag{3.7}$$

На основании леммы 2 [13] из (3.7) находим искомую априорную оценку

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\Big)\le$$

$$\le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|f\|_0^2+\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\Big)+\|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right), \tag{3.8}$$

где $M=const>0$, зависящее только от входных данных (2.1)-(2.4), $D_{0t}^{-\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t\frac{ud\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $\alpha, 0<\alpha<1$.

Теорема 1. *Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}\big(Q_T\big)\cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (2.5), тогда для решения задачи (2.1)-(2.4) справедлива априорная оценка (3.8).*

Из оценки (3.8) следуют единственность и устойчивость решения по начальным и правой части в смысле нормы

$$\|u\|_1^2 = \|u\|^2_{W_2^1(0,l)} + D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|u_x\|_0^2 + \|\partial_{0t}^{\alpha}u\|_0^2\Big).$$

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (2.1)-(2.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^2+\tau^2)$:

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \varkappa_i^j\Big(a_i^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x + b_i^{-j}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i} + b_i^{+j}a_{i+1}^j y^{(\sigma)}_{x,i} + \sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{i,s}^j y_i^s \bar{\tau} + \varphi_i^j, \qquad (4.1)$$

$$\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} = \beta_{11} y_0^{(\sigma)} - 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{0,s}^j y_0^s\bar{\tau} + \tilde{\beta}_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \tilde{\mu}_1,\ t\in\overline{\omega}_\tau, \qquad (4.2)$$

$$-\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} = \beta_{21} y_N^{(\sigma)} - 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}} \rho_{N,s}^j y_N^s\bar{\tau} + \tilde{\beta}_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N - \tilde{\mu}_2,\ t\in\overline{\omega}_\tau, \qquad (4.3)$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h \qquad (4.4)$$

где

$$\tilde{\beta}_{12} = \beta_{12} + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_1(t_{j+\sigma}) = \mu_1(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_0^j,$$
$$\tilde{\beta}_{22} = \beta_{22}(t_{j+\sigma}) + 0.5h, \quad \tilde{\mu}_2(t_{j+\sigma}) = \mu_2(t_{j+\sigma}) + 0.5h\varphi_N^j,$$
$$a_i^j = k(x_{i-0.5}, t^{j+\sigma}),\ b_i^j = \frac{r(x,t_{j+\sigma})}{k(x,t_{j+\sigma})},\ \varphi = f(x_i,t_{j+\sigma})$$
$$y^{(\sigma)} = \sigma y^{j+1} + (1-\sigma)y^j,\ d_i^j = d(x_i,t_{j+\sigma}),\ a_0^{(\alpha,\sigma)} = \sigma^{1-\alpha},$$
$$a_l^{(\alpha,\sigma)} = (l+\sigma)^{1-\alpha} - (l-1+\sigma)^{1-\alpha},\ l\ge 1,\ \sigma = 1-\frac{\alpha}{2},$$
$$\varkappa = \frac{1}{1+R},\ R = \frac{0.5h|r|}{k} - \text{разностное число Рейнольдса},$$
$$r_0 = r(0,t) = r_0^{(j+\sigma)} \le 0, \quad r_N = r(l,t) = r_N^{(j+\sigma)} \ge 0,$$
$$b_l^{(\alpha,\sigma)} = \frac{1}{2-\alpha}\Big[(l+\sigma)^{2-\alpha} - (l-1+\sigma)^{2-\alpha}\Big] - \frac{1}{2}\Big[(l+\sigma)^{1-\alpha} + (l-1+\sigma)^{1-\alpha}\Big],\ l\ge 1,$$
$$\text{при } j=0, \quad c_0^{(\alpha,\sigma)} = a_0^{(\alpha,\sigma)};$$
$$\text{при } j>0, \quad c_s^{(\alpha,\sigma)} = \begin{cases} a_0^{(\alpha,\sigma)} + b_1^{(\alpha,\sigma)},\ s=0,\\ a_s^{(\alpha,\sigma)} + b_{s+1}^{(\alpha,\sigma)} - b_s^{(\alpha,\sigma)},\ 1\le s\le j-1,\\ a_j^{(\alpha,\sigma)} - b_j^{(\alpha,\sigma)},\ s=j,\end{cases}$$
$$c_s^{(\alpha,\sigma)} > \frac{1-\alpha}{2}(s+\sigma)^{-\alpha} > 0,\ p_{i,s}^j = p(x_i,t^{j+\sigma},\tau_{s+\sigma}), \rho_{i,s}^j = p_{i,s}^{j+\sigma}.$$

$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y = \frac{\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum\limits_{s=0}^{j} c_{j-s}^{(\alpha,\sigma)} y_t^s$ - дискретный аналог дробной производной Герасимова-Капуто порядка $\alpha,\ 0<\alpha<1$, обеспечивающий порядок точности $O(\tau^{3-\alpha})$ [14]. Введем скалярные произведения и норму:

$$\big[u,v\big] = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i \hbar, \quad \hbar = \begin{cases} 0.5h,\ i=0,N,\\ h,\ i\ne 0,N.\end{cases}$$

$$\big(u,v\big]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,\ \big[u,u\big]=\big[1,u^2\big]=|[u]|_0^2,$$

Перепишем (4.1)-(4.4) в операторной форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y=\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}+\overline{\Phi}, \tag{4.5}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h, \tag{4.6}$$

где

$$\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}=$$

$$=\begin{cases}\tilde{\Lambda}y_i^{(\sigma)}=\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x+b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}+b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)}+\sum\limits_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{i,s}^jy_i^s\bar{\tau},\ i=\overline{1,N-1}\\ \Lambda^-y_0^{(\sigma)}=\frac{2}{h}\Big(\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\beta_{11}y_0^{(\sigma)}+0.5h\sum\limits_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{0,s}^jy_0^s\bar{\tau}-\beta_{12}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big),\ i=0,\\ \Lambda^+y_N^{(\sigma)}=\frac{2}{h}\Big(-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\beta_{21}y_N^{(\sigma)}+0.5h\sum\limits_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{N,s}^jy_N^s\bar{\tau}-\beta_{22}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big),\ i=N,\end{cases}$$

$$\overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i,\ i=\overline{1,N-1},\\ \varphi^-=\frac{2}{h}\Big(\mu_1(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_0^j\Big),\ i=0,\\ \varphi^+=\frac{2}{h}\Big(\mu_2(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N^j\Big),\ i=N.\end{cases}\qquad \begin{cases}\varkappa=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r|}{k}}\\ \varkappa_0=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{k_{0.5}}},\ r_0\le 0\\ \varkappa_N=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N|}{k_{N-0.5}}},\ r_N\ge 0.\end{cases}$$

Умножим теперь (4.5) скалярно на $\bar{y}=y^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y$:

$$\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,\bar{y}\Big]=\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},\bar{y}\Big]+\Big[\overline{\Phi},\bar{y}\Big]. \tag{4.7}$$

Оценим суммы, входящие в (4.7), с учетом леммы 1 [14]:

$$\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,\bar{y}\Big]=\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}+\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\Big]=\Big[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,y^{(\sigma)}\Big]+\Big[1,(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y)^2\Big]\ge$$

$$\ge\frac12\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2+|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2. \tag{4.8}$$

$$\Big[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},\bar{y}\Big]=\Big(\tilde{\Lambda}y^{(\sigma)},\bar{y}\Big)+0.5h\bar{y}_0\Lambda^-y_0^{(\sigma)}+0.5h\bar{y}_N\Lambda^+y_N^{(\sigma)}=$$

$$=\Big(\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x,\bar{y}\Big)+\Big(b^-ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\bar{y}\Big)+$$

$$+\Big(b^+a^{(+1)}y_x^{(\sigma)},\bar{y}\Big)+\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{i,s}^jy_i^s\bar{\tau},\bar{y}\Big)+\bar{y}_0\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\beta_{11}y_0^{(\sigma)}\bar{y}_0-\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\bar{y}_N-$$

$$-\beta_{12}\bar{y}_0\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0-\beta_{22}\bar{y}_N\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N+0.5h\bar{y}_0\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{0,s}^jy_0^s\bar{\tau}-$$

$$-\beta_{21}y_N^{(\sigma)}\bar{y}_N+0.5h\bar{y}_N+\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho_{N,s}^jy_N^s\bar{\tau}. \tag{4.9}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (4.9):

$$\Big(\varkappa(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)})_x,\bar{y}\Big)=\bar{y}\varkappa ay_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big|_0^N-\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},(\varkappa\bar{y})_{\bar{x}}\Big]=$$

$$=\bar{y}_N\varkappa_Na_Ny_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-\bar{y}_0\varkappa_0a_1y_{x,0}^{(\sigma)}-\Big(ay_{\bar{x}}^{(\sigma)},\varkappa_{\bar{x}}\bar{y}+\varkappa^{(-1)}\bar{y}_{\bar{x}}\Big]=$$

$$= \bar{y}_N \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} - \left(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa_{\bar{x}} y^{(\sigma)}\right] -$$
$$-\left(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa_{\bar{x}} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\right] - \left(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa^{(-1)} y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\right] -$$
$$-\left(a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \varkappa^{(-1)} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_{\bar{x}}\right] \le \bar{y}_N \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} +$$
$$+\varepsilon |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\left(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + |[y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\right) -$$
$$-\frac{1}{1+hM_2}\left(a\varkappa, (y^{(\sigma)}_{\bar{x}})^2\right] - \frac{c_0}{2(1+hM_2)}\left(\varkappa, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y^2_{\bar{x}}\right] \le$$
$$\le \bar{y}_N \varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar{x},N} - \bar{y}_0 \varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0} + \varepsilon |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2 +$$
$$+M_1^{\varepsilon}\left(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\right) - M_3 \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2 - M_4 \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} \|y_{\bar{x}}]|_0^2. \tag{4.10}$$

$$\left(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \bar{y}\right) + \left(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_{x}, \bar{y}\right) =$$
$$= \left(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, y^{(\sigma)}\right) + \left(b^- a y^{(\sigma)}_{\bar{x}}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\right) + \left(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_{x}, y^{(\sigma)}\right) +$$
$$+\left(b^+ a^{(+1)} y^{(\sigma)}_{x}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\right) \le \varepsilon |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2 + M_5^{\varepsilon}\left(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\right). \tag{4.11}$$

$$\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau}, \bar{y}\Big) + 0.5h\bar{y}_0 \sum_{s=0}^{j+\frac12} \rho^j_{0,s} y^s_0 \bar{\tau} + 0.5h\bar{y}_N \sum_{s=0}^{j+\frac12} \rho^j_{N,s} y^s_N \bar{\tau} - \beta_{11} y^{(\sigma)}_0 \bar{y}_0 -$$
$$-\beta_{21} y^{(\sigma)}_N \bar{y}_N = -\beta_{12} \bar{y}_0 \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \beta_{22} \bar{y}_N \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N = \Big[\sum_{s=0}^{j+\frac12} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau}, y^{(\sigma)}\Big] +$$
$$+\Big[\sum_{s=0}^{j+\frac12} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau}, \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y\Big] - \beta_{11} (y^{(\sigma)}_0)^2 - \beta_{11} y^{(\sigma)}_0 \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \beta_{21} (y^{(\sigma)}_N)^2 -$$
$$-\beta_{21} y^{(\sigma)}_0 \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N - \beta_{12} y^{(\sigma)}_0 \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0 - \beta_{12}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\right)^2 - \beta_{22} y^{(\sigma)}_N \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N -$$
$$-\beta_{22} (\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N)^2 \le \varepsilon_1 |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2 + M_6^{\varepsilon_1}\Big[1, \Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12} \rho^j_{i,s} y^s_i \bar{\tau}\Big)^2\Big] +$$
$$+M_7^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\left(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\right) + \varepsilon_2\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\right)^2 + \varepsilon_3\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\right)^2 -$$
$$-\frac{\beta_{12}}{2} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0^2 - \frac{\beta_{22}}{2} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N^2 - \beta_{12}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\right)^2 - \beta_{22}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\right)^2 \le$$
$$\le \varepsilon_1 |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2 + M_6^{\varepsilon_1}\Big[1, \sum_{s=0}^{j+\frac12} \rho^2_{i,s} \bar{\tau} \sum_{s=0}^{j+\frac12} (y^s_i)^2 \bar{\tau}\Big] + M_7^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\left(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\right) +$$
$$+\varepsilon_2\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\right)^2 + \varepsilon_3\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\right)^2 \le \varepsilon_1 |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2 + M_8^{\varepsilon_1} \sum_{s=0}^{j+\frac12} |[y]|_0^2 \bar{\tau} +$$
$$+M_7^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\left(|[y^{(\sigma)}]|_0^2 + \|y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2\right) + \varepsilon_2\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\right)^2 + \varepsilon_3\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\right)^2 -$$
$$-\frac{\beta_{12}}{2} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0^2 - \frac{\beta_{22}}{2} \Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N^2 - \beta_{12}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\right)^2 - \beta_{22}\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\right)^2. \tag{4.12}$$

Учитывая преобразования (4.10)-(4.12), из (4.9) получим

$$\left[\overline{\Lambda}(t_{j+\sigma}) y^{(\sigma)}, \bar{y}\right] \le \varepsilon_1 |[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y]|_0^2 + \varepsilon_2\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_0\right)^2 + \varepsilon_3\left(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}} y_N\right)^2 +$$

$$-\frac{\beta_{12}}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0^2-\frac{\beta_{22}}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N^2-\beta_{12}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2-\beta_{22}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+M_8^{\varepsilon_1}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}|[y]|_0^2\bar{\tau}+$$

$$+M_9^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)-M_3\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2-M_4\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2. \tag{4.13}$$

$$\Big[\overline{\Phi},\bar{y}\Big]=(\varphi,\bar{y})+0.5h\varphi^-\bar{y}_0+0.5h\varphi^+\bar{y}_N=(\varphi,\bar{y})+\bar{y}_0\Big(\mu_1+0.5h\varphi_0\Big)+$$

$$+\bar{y}_N\Big(\mu_2+0.5h\varphi_N\Big)=(\varphi,\bar{y})+\bar{y}_0\mu_1+0.5h\varphi_0\bar{y}_0+\bar{y}_N\mu_2+0.5h\varphi_N\bar{y}_N=$$

$$=\Big[\varphi,\bar{y}\Big]+\mu_1\bar{y}_0+\mu_2\bar{y}_N=\Big[\varphi,y^{(\sigma)}\Big]+\Big[\varphi,\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\Big]+$$

$$+\mu_1y_0^{(\sigma)}+\mu_1\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0+\mu_2y_N^{(\sigma)}+\mu_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\le$$

$$\le\varepsilon_1|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2+\varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+\varepsilon_3\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+$$

$$+M_{10}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\mu_1^2+\mu_2^2\Big)+M_{11}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)+M_{12}^{\varepsilon_1}|[\varphi]|_0^2. \tag{4.14}$$

Принимая во внимание преобразования (4.8)-(4.14), из (4.7) находим

$$\frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|_0^2+|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2+M_{13}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|y_{\bar{x}}]|_0^2+M_3\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\frac{\beta_{12}}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0^2+$$

$$+\frac{\beta_{22}}{2}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N^2+\beta_{12}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+\beta_{22}\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2\le\varepsilon_1|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2+$$

$$+\varepsilon_2\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+\varepsilon_3\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+M_{14}^{\varepsilon_1}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}|[y]|_0^2\bar{\tau}+M_{15}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(|[y^{(\sigma)}]|_0^2+\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)+$$

$$+M_{16}^{\varepsilon_2,\varepsilon_3}\Big(\mu_1^2+\mu_2^2\Big)+M_{17}^{\varepsilon_1}|[\varphi]|_0^2. \tag{4.15}$$

Выбирая $\varepsilon_1=\dfrac{1}{2},\ \varepsilon_2=\dfrac{\beta_{12}}{2},\ \varepsilon_3=\dfrac{\beta_{22}}{2}$ из (4.15) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|^2_{W_2^1(0,l)}+\|y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+|[\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y]|_0^2\le$$

$$\le M_{18}|[y^{(\sigma)}]|^2_{W_2^1(0,l)}+M_{19}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}|[y]|_0^2\bar{\tau}+M_{20}\Big(|[\varphi]|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2\Big), \tag{4.16}$$

где $|[y]|^2_{W_2^1(0,l)}=|[y]|_0^2+\|y_{\bar{x}}]|_0^2$.
Учитывая, что

$$\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}|[y^s]|_0^2\bar{\tau}=\sum_{s=0}^{j}|[y^s]|_0^2\bar{\tau}+0.5\tau|[y^j]|_0^2,$$

перепишем (4.16) в другой форме

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}|[y]|^2_{W_2^1(0,l)}\le M_{21}^{\sigma}|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}+M_{22}^{\sigma}|[y^j]|^2_{W_2^1(0,l)}+M_{23}F^j, \tag{4.17}$$

где $F^j=\sum\limits_{s=0}^{j}|[y^s]|_0^2\bar{\tau}+|[\varphi]|_0^2+\mu_1^2+\mu_2^2$.
На основании леммы 7 [20] из (4.17) получаем

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)}\le M_{24}\Bigg(|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)}+\max_{0\le j'\le j}F^{j'}\Bigg). \tag{4.18}$$

где $M_{24} = const > 0$, не зависящая от h и τ.
Из (4.18) получим

$$|[y^{j+1}]|^2_{W_2^1(0,l)} \le$$

$$\le M_{24}\left(|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\le j'\le j}\left(\sum_{s=0}^{j'}|[y^s]|_0^2\bar\tau + |[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right)\right). \quad (4.19)$$

Введя обозначение $g^j = \max\limits_{0\le j'\le j}|[y^{j'}]|_0^2$, с учетом $|[y]|^2_{W_2^1(0,l)} = |[y]|_0^2 + \|y_{\bar x}]|_0^2$ из (4.19) получим

$$g^{j+1} \le M_{25}\sum_{s=0}^{j} g^s\tau + M_{26}F_1^j, \quad (4.20)$$

где

$$F_1^j = |[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\le j'\le j}\left(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right).$$

На основании леммы 4 (см.[20, стр.171]) из (4.20) получаем

$$|[y^{j+1}]|_0^2 \le M\left(|[y^0]|^2_{W_2^1(0,l)} + \max_{0\le j'\le j}\left(|[\varphi]|_0^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2\right)\right). \quad (4.21)$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2.5), тогда существует такое τ_0, что если $\tau \le \tau_0$, то для решения разностной задачи (4.1)-(4.4) справедлива априорная оценка (4.21), из чего следуют единственность и устойчивость решения задачи (4.1)-(4.4) по начальным данным и правой части.*

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи (2.1) – (2.4), $y(x_i,t_j) = y_i^j -$решение разностной задачи (4.1) – (4.4). Для оценки точности разностной схемы (4.1) – (4.4) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y = z+u$ в соотношения (4.1) – (4.4), получаем задачу для функции z

$$\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}} z = \varkappa_i^j\left(a_i^j z_{\bar x}^{(\sigma)}\right)_x + b_i^{-j}a_i^j z_{\bar x,i}^{(\sigma)} + b_i^{+j}a_{i+1}^j z_{x,i}^{(\sigma)} + \sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{i,s}z_i^s\bar\tau + \Psi_i^j, \quad (4.22)$$

$$\varkappa_0 a_1 z_{x,0}^{(\sigma)} = \beta_{11}z_0^{(\sigma)} - 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{0,s}z_0^s\bar\tau + \tilde\beta_{12}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}z_0 - \tilde\nu_1,\ t\in\overline\omega_\tau, \quad (4.23)$$

$$-\varkappa_N a_N z_{\bar x,N}^{(\sigma)} = \beta_{21}z_N^{(\sigma)} - 0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{N,s}z_N^s\bar\tau + \tilde\beta_{22}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}z_N - \tilde\nu_2,\ t\in\overline\omega_\tau, \quad (4.24)$$

$$z(x,0) = 0,\ x\in\overline\omega_h, \quad (4.25)$$

где $\Psi = O\big(h^2+\tau^2\big),\ \tilde\nu_1 = O\big(h^2+\tau^2\big),\ \tilde\nu_2 = O\big(h^2+\tau^2\big)$ - погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (2.1) – (2.4) разностной схемой (4.1) – (4.4) в классе решении $u = u(x,t)$ задачи (2.1) – (2.4).

Применяя априорную оценку (4.21) к решению задачи (4.31) – (4.34), получаем неравенство

$$|[z^{j+1}]|_0^2 \le M\max_{0\le j'\le j}\left(|[\Psi^{j'}]|_0^2 + \nu_1^{j'2} + \nu_2^{j'2}\right), \quad (4.26)$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (4.26) следует сходимость решения разностной задачи (4.1) – (4.4) к решению дифференциальной задачи (2.1) – (2.4) в смысле нормы $|[z^{j+1}]|_0^2$ на каждом слое так, что существует такое τ_0, что при $\tau \leq \tau_0$ справедлива оценка

$$|[y^{j+1}-u^{j+1}]|_0^2 \leq M\Big(h^2+\tau^2\Big).$$

5. Постановка нелокальной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Бесселя и априорная оценка

В замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq l,\ 0 \leq t \leq T\}$ рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу

$$\partial_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{x^m}\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^m k\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + r\frac{\partial u}{\partial x} + \int_0^t p(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f(x,t),$$
$$0 < x < l,\ 0 < t \leq T, \tag{5.1}$$
$$\lim_{x\to 0} x^m k(x,t)u_x(x,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \tag{5.2}$$
$$-k(l,t)u_x(l,t) = \beta_1(t)u(l,t) + \beta_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - \mu(t),\ 0 \leq t \leq T, \tag{5.3}$$
$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \leq x \leq l, \tag{5.4}$$

где $0 \leq m \leq 2$.

При $x = 0$ ставится условие ограниченности решения $|u(0,t)| < \infty$, которое эквивалентно условию (5.2), равносильному в свою очередь тождеству $k(0,t)u_x(0,t) = 0$ [19, с.173], если функции $r(0,t), q(0,t), f(0,t)$ конечны.

Получим априорную оценку методом энергетических неравенств, для этого умножим уравнение (5.1) скалярно на $x^m U = x^m(u + \partial_{0t}^{\alpha}u)$:

$$\Big(\partial_{0t}^{\alpha}u, x^m U\Big) = \Big(\big(x^m k u_x\big)_x, U\Big) + \Big(r u_x, x^m U\Big) + \Big(\int_0^t p u d\tau, x^m U\Big) + \Big(f, x^m U\Big). \tag{5.5}$$

После несложных преобразований из (5.5) находим

$$\frac{1}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \frac{c_0}{2}\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + c_0\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 \leq$$
$$\leq x^m U k u_x|_0^l + M_1\int_0^t \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 d\tau + M_2\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big) + M_3\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2. \tag{5.6}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (5.6), тогда имеем

$$x^m U k u_x|_0^l = l^m\Big(u(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)k(l,t)u_x(l,t) =$$
$$= l^m\Big(u(l,t) + \partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big)\Big(\mu(t) - \beta_1(t)u(l,t) - \beta_2(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\Big) =$$
$$= l^m u(l,t)\mu(t) + l^m\mu(t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - l^m u^2(l,t)\beta_1(t) -$$
$$-l^m\beta_1(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) - l^m\beta_2(t)u(l,t)\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t) -$$
$$-l^m\beta_2(t)(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t))^2 \leq -l^m\beta_2(t)(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t))^2 -$$
$$-\frac{l^m\beta_2(t)}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t) + \varepsilon\big(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t)\big)^2 + M_4\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 +$$
$$+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big) + M_5\mu^2(t) \leq -\frac{l^m\beta_2(t)}{2}(\partial_{0t}^{\alpha}u(l,t))^2 - \frac{l^m\beta_2(t)}{2}\partial_{0t}^{\alpha}u^2(l,t) +$$

$$+M_4\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2\Big)+M_5\mu^2(t). \tag{5.7}$$

Учитывая (5.7), из (5.6) находим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\le$$

$$\le M_6\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+M_7\int_0^t\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2d\tau+M_8\Big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu_2(t)\Big), \tag{5.8}$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}=\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2+\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2$.

Применяя к обеим частям неравенства (5.8) оператор дробного интегрирования $D_{0t}^{-\alpha}$, на основании леммы 2 [13] из (5.8) получаем искомую априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\Big)\le$$

$$\le M\left(D_{0t}^{-\alpha}\big(\|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2+\mu_2^2(t)\big)+\|x^{\frac{m}{2}}u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\right). \tag{5.9}$$

где $M=const>0$, зависящая только от входных данных задачи (5.1)-(5.4).

Теорема 3. *Если $k(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $r(x,t),q(x,t),f(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$, $u(x,t)\in C^{2,0}\big(Q_T\big)\cap C^{1,0}\big(\overline{Q}_T\big)$, $\partial_{0t}^{\alpha}u(x,t)\in C(\overline{Q}_T)$ и выполнены условия (2.5), тогда для решения задачи (5.1)-(5.4) справедлива априорная оценка (5.9).*

Из оценки следуют единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части в смысле нормы

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_1^2=\|x^{\frac{m}{2}}u\|^2_{W_2^1(0,l)}+D_{0t}^{-\alpha}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2+\|\partial_{0t}^{\alpha}x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2\Big).$$

6. Устойчивость и сходимость разностной схемы

На равномерной сетке $\overline{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (5.1)-(5.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(\frac{h^2+\tau^2}{x})$:

$$\bar{\varkappa}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a^j y_{\bar{x}}^{(\sigma)}\Big)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\bar{x},i}^{(\sigma)}\Big)+$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x_{i+0.5}^m a_{i+1}^j y_{x,i}^{(\sigma)}\Big)+\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{i,s}^j y_i^s\bar{\tau}+\varphi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau} \tag{6.1}$$

$$\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}=\frac{0.5h}{m+1}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_0-\frac{0.5h}{m+1}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{0,s}^j y_0^s\bar{\tau}-\tilde{\mu}_1, \tag{6.2}$$

$$-\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}=\tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)}-0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho_{N,s}^j y_N^s\bar{\tau}+\tilde{\beta}_2\Delta_{0t_{j+\sigma}}^{\alpha}y_N-\tilde{\mu}_2, \tag{6.3}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\omega}_h, \tag{6.4}$$

где

$$\tilde{\beta}_1=\bar{\varkappa}\beta_1(t_{j+\sigma}),\ \tilde{\beta}_2=\bar{\varkappa}\beta_2+0.5h,\quad \tilde{\mu}_1=\frac{0.5h}{m+1}\varphi_0^j,\quad \tilde{\mu}_2=\bar{\varkappa}\mu(t_{j+\sigma})+0.5h\varphi_N^j,$$

$$\varkappa_0=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_0|}{(m+1)k_{0.5}^{j+\sigma}}},\ \text{если } r_0^{j+\sigma}\le 0,\quad \varkappa_N=\frac{1}{1+\frac{0.5h|r_N^{j+\sigma}|}{k_{N-0.5}}},\ \text{если } r_N^{j+\sigma}\ge 0,$$

$$r=r^{+}+r^{-},\ |r|=r^{+}-r^{-},\ r^{+}=0.5\Big(r+|r|\Big)\geq 0,\ r^{-}=0.5\Big(r-|r|\Big)\leq 0,$$

$$a_i^j=k(x_{i-0.5},t^{j+\sigma}),\ b_i^{\pm j}=\frac{\bar{\varkappa}_i r_i^{\pm j+\sigma}}{k_i^{j+\sigma}},\ d_i^j=\begin{cases}\bar{\varkappa}_i q_i^{j+\sigma},\ i=\overline{1,N-1},\\ q_i^{j+\sigma},\ i=0,N,\end{cases}$$

$$\varphi_i^j=\begin{cases}\overline{\varkappa}_i f_i^{j+\sigma},\ i=1,N-1,\\ f_i^{j+\sigma},\ i=0,N,\end{cases}\qquad \hbar=\begin{cases}0.5h,\ i=0,\\ h,\ i=\overline{1,N-1},\end{cases}$$

$$\bar{\varkappa}_i=1+\frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\ i=\overline{1,N-1},$$

$$\tilde{\varkappa}=1+\frac{0.5hm}{l}=\frac{1}{1-\frac{0.5hm}{l}},\ \varkappa_i=\frac{1}{1+R_i},\ R_i=\frac{0.5h|r_i|\bar{\varkappa}_i}{k_{i-0.5}}.$$

Найдем априорную оценку методом энергетических неравенств,для этого перепишем (6.1)-(6.4) в операторном виде

$$\bar{\bar{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{t_{j+\sigma}}y=\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)}+\bar{\Phi},\tag{6.5}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\tag{6.6}$$

где

$$\bar{\bar{\varkappa}}=\begin{cases}\bar{\varkappa}_i,\ x\in\omega_h,\\ 1,\ x=0,l,\end{cases}\qquad \bar{\varkappa}_i=1+\frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2},\qquad \overline{\Phi}=\begin{cases}\varphi=\varphi_i,\ (x,t)\in\omega_{h\tau},\\ \varphi^{-}=\frac{m+1}{0.5h}\tilde{\mu}_1,\ x=0,\\ \varphi^{+}=\frac{1}{0.5h}\tilde{\mu}_2,\ x=l.\end{cases}$$

$$\overline{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{\sigma}=$$

$$=\begin{cases}\tilde{\Lambda}(t^{j+\sigma})y_i^{(\sigma)}=\frac{\varkappa_i}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5}a_i^j y^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big)+\\ \qquad\qquad +\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_{x}\Big)+\sum\limits_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{i,s}y_i^s\bar{\tau},\\ \Lambda^{-}y_0^{(\sigma)}=\frac{m+1}{0.5h}\Big(\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}+\frac{0.5h}{m+1}\sum\limits_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{0,s}y_0^s\bar{\tau}\Big),\ x=0,\\ \Lambda^{+}y_N^{(\sigma)}=-\frac{2}{h}\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{x,N}+\tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)}-0.5h\sum\limits_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{N,s}y_N^s\bar{\tau}+\tilde{\varkappa}\beta_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big),\ x=l.\end{cases}$$

Умножим теперь (6.5) скалярно на $x^m\bar{y}=x^m y^{(\sigma)}+x^m\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y:$

$$\Big(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,x^m\bar{y}\Big)=\Big(\bar{\Lambda}(t_{j+\sigma})y^{(\sigma)},x^m\bar{y}\Big]+\Big(\bar{\Phi},x^m\bar{y}\Big],\tag{6.7}$$

где

$$(u,v]=\sum_{i=1}^{N}u_i v_i\hbar,\ \|u]|_0^2=\sum_{i=1}^{N}u_i^2\hbar,\quad \hbar=\begin{cases}0.5h,i=0,N\\ h,i\neq 0,N.\end{cases}$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (6.7), пользуясь неравенством Коши с ε

$$\Big(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,x^m\bar{y}\Big)=\Big(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,x^m y^{(\sigma)}\Big]+\Big(\bar{\bar{\varkappa}}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y,x^m\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}y\Big]\geq$$

$$\geq\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big]+\Big(\bar{\bar{\varkappa}},\Big(\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big],\tag{6.8}$$

$$\Big(\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)},x^m\bar{y}\Big]=\Big(\tilde{\Lambda}y^{(\sigma)},x^m\bar{y}\Big)+0.5h\Lambda^{+}y_N^{(\sigma)}x_N^m\bar{y}_N=\Big(\varkappa(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar{x}})_x,\bar{y}\Big)+$$

$$+\Big(b^-(x^m_{i-0.5}a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar x}),\bar y\Big)+\Big(b^+(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}y^{(\sigma)}_x),\bar y\Big)+\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{i,s}y^s_i\bar\tau,x^m_i\bar y\Big)-$$

$$-x^m_N\bar y_N\Big(\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar x,N}+\tilde\beta_1 y^{(\sigma)}_N-0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{N,s}y^s_N\bar\tau+\tilde\varkappa\beta_2\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)=$$

$$=-\Big(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar x},(\varkappa\bar y)_{\bar x}\Big]+\Big(b^-(\bar x^m a_i y^{(\sigma)}_{\bar x}),\bar y\Big)+$$

$$+\Big(b^+x^m_{i+0.5}a^{(+1)},y^{(\sigma)}_x\bar y\Big)+\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{i,s}y^s_i\bar\tau,x^m\bar y\Big)-\tilde\beta_1 x^m_N y^{(\sigma)}_N\bar y_N+$$

$$+x^m_N 0.5h\bar y_N\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{N,s}y^s_N\bar\tau-\tilde\varkappa\beta_2 x^m_N\bar y_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N+$$

$$+\Big(\bar x^m_N-x^m_N\Big)\bar y_N\varkappa_N a_N y^{(\sigma)}_{\bar x,N}-x^m_{0.5}\varkappa_0 a_1 y^{(\sigma)}_{x,0}\bar y_0. \tag{6.9}$$

Преобразуем слагаемые в правой части (6.9):

$$-\Big(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar x},(\varkappa\bar y)_{\bar x}\Big]=-\Big(x^m_{i-0.5}a_i y^{(\sigma)}_{\bar x},\varkappa_{\bar x}\bar y+\varkappa^{(-1)}\bar y_{\bar x}\Big]=-\Big(\bar x^m a y^{(\sigma)}_{\bar x},\varkappa_{\bar x}y^{(\sigma)}\Big]-$$

$$-\Big(\bar x^m a y^{(\sigma)}_{\bar x},\varkappa_{\bar x}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y\Big]-\Big(\bar x^m a y^{(\sigma)}_{\bar x},\varkappa^{(-1)}y^{(\sigma)}_{\bar x}\Big]-\Big(\bar x^m a y^{(\sigma)}_{\bar x},\varkappa^{(-1)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_{\bar x}\Big]\le$$

$$\le\varepsilon\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac m2}y]|^2_0+M^\varepsilon_1\Big(\|x^{\frac m2}y^{(\sigma)}]|^2_0+\|\bar x^{\frac m2}y^{(\sigma)}_{\bar x}]|^2_0\Big)-\frac{1}{1+hM_2}\Big(\bar x^m a\varkappa,(y^{(\sigma)}_{\bar x})^2\Big]-$$

$$-\frac{1}{2(1+hM_2)}\Big(\bar x^m a\varkappa,\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y^2_{\bar x}\Big]\le\varepsilon\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac m2}y]|^2_0+$$

$$+M^\varepsilon_1\Big(\|x^{\frac m2}y^{(\sigma)}]|^2_0+\|\bar x^{\frac m2}y^{(\sigma)}_{\bar x}]|^2_0\Big)-M_3\|\bar x^{\frac m2}y^{(\sigma)}_{\bar x}]|^2_0-M_4\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|\bar x^{\frac m2}y_{\bar x}]|^2_0. \tag{6.10}$$

$$\Big(b^-(\bar x^m a^j_i y^{(\sigma)}_{\bar x}),\bar y\Big)+\Big(b^+x^m_{i+0.5}a^{(+1)},y^{(\sigma)}_x\bar y\Big)=\Big(b^-\bar x^m a y^{(\sigma)}_{\bar x},y^{(\sigma)}\Big)+$$

$$+\Big(b^-\bar x^m a y^{(\sigma)}_{\bar x},\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y\Big)+\Big(b^+x^m_{i+0.5}a^{(+1)}y^{(\sigma)}_x,y^{(\sigma)}\Big)+$$

$$+\Big(b^+x^m_{i+0.5}a^{(+1)}y^{(\sigma)}_x,\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y\Big)\le\varepsilon\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac m2}y]|^2_0+$$

$$+M^\varepsilon_5\Big(\|x^{\frac m2}y^{(\sigma)}]|^2_0+\|\bar x^{\frac m2}y^{(\sigma)}_{\bar x}]|^2_0\Big). \tag{6.11}$$

$$\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{i,s}y^s_i\bar\tau,x^m\bar y\Big)-\tilde\beta_1 x^m_N y^{(\sigma)}_N\bar y_N+x^m_N 0.5h\bar y_N\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{N,s}y^s_N\bar\tau-\tilde\varkappa\beta_2 x^m_N\bar y_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N=$$

$$=\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{i,s}y^s_i\bar\tau,x^m\bar y\Big]-\tilde\beta_1 x^m_N y^{(\sigma)}_N\bar y_N-\tilde\varkappa\beta_2 x^m_N\bar y_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\le\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{i,s}y^s_i\bar\tau,x^m y^{(\sigma)}\Big]+$$

$$+\Big(\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{i,s}y^s_i\bar\tau,x^m\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y\Big]-\tilde\beta_1 x^m_N(y^{(\sigma)}_N)^2-\tilde\beta_1 x^m_N y^{(\sigma)}_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-$$

$$-\tilde\varkappa\beta_2 x^m_N y^{(\sigma)}_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-\tilde\varkappa\beta_2 x^m_N\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2\le\varepsilon_1\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac m2}y]|^2_0+$$

$$+\varepsilon_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+M^{\varepsilon_1}_6\sum_{s=0}^{j+\frac12}\|x^{\frac m2}y^s]|^2_0\bar\tau-\tilde\varkappa\frac{\beta_2}{2}x^m_N\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2-$$

$$-\tilde{\varkappa}x_N^m\beta_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+M_7^{\varepsilon_2}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big). \qquad (6.12)$$

Учитывая (6.9)-(6.12), из (6.9) получим

$$\Big(\bar{\Lambda}(t^{j+\sigma})y^{(\sigma)},x^m\bar{y}\Big]\le\varepsilon_1\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\varepsilon_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+$$

$$+M_7^{\varepsilon_2}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)+M_6^{\varepsilon_1}\sum_{s=0}^{j+\frac12}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2\bar{\tau}-$$

$$-M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2-M_4\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\bar{y}_N\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}-$$

$$-\tilde{\varkappa}\frac{\beta_2}{2}x_N^m\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2-\tilde{\varkappa}x_N^m\beta_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2-x_{0.5}^m\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}\bar{y}_0. \qquad (6.13)$$

$$\Big(\bar{\Phi},x^m\bar{y}\Big]=\Big(\varphi,x^m\bar{y}\Big)+0.5hx_N^m\bar{y}_N\varphi^+=\Big(\varphi,x^m\bar{y}\Big)+x_N^m\tilde{\mu}^2\bar{y}_N=$$

$$=\Big(\varphi,x^m y^{(\sigma)}\Big)+\Big(\varphi,x^m\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y\Big)+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N\le\varepsilon_1\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+$$

$$+M_8^{\varepsilon_1}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)+M_9^{\varepsilon_1}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N. \qquad (6.14)$$

Принимая во внимание преобразования (6.8)-(6.14) из (6.7) получаем

$$\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big]+M_{10}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\Big(\bar{\bar{\varkappa}},\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big]+$$

$$+\tilde{\varkappa}\frac{\beta_2}{2}x_N^m\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}(y_N)^2+\tilde{\varkappa}x_N^m\beta_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2\le\varepsilon_1\|\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\varepsilon_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+$$

$$+\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)x_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\bar{y}_N-x_{0.5}^m\bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}+M_6^{\varepsilon_1}\sum_{s=0}^{j+\frac12}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2\bar{\tau}+$$

$$+M_8(\varepsilon_1)\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N+M_{11}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big). \qquad (6.15)$$

Рассмотрим третье, четвертое и седьмое слагаемые в правой части (6.15)

$$\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\varkappa_N a_N y_{\bar{x},N}^{(\sigma)}\bar{y}_N-x_{0.5}^m\bar{y}_0\varkappa_0 a_1 y_{x,0}^{(\sigma)}+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N=$$

$$=x_{0.5}^m\bar{y}_0\bigg(\tilde{\mu}_1-\frac{0.5h}{m+1}\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0-\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{0,s}y_0^s\bar{\tau}\Big)\bigg)+$$

$$+\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\bar{y}_N\Big(\tilde{\mu}_2-\tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)}-\tilde{\beta}_2\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)+x_N^m\tilde{\mu}_2\bar{y}_N=$$

$$=x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\tilde{\mu}_1+x_{0.5}^m\tilde{\mu}_1\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0-\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0-\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+$$

$$+\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m y_0^{(\sigma)}\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{0,s}y_0^s\bar{\tau}+\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\sum_{s=0}^{j+\frac12}\rho^j_{0,s}y_0^s\bar{\tau}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0+\bar{x}_N^m y_N^{(\sigma)}\tilde{\mu}_2+$$

$$+\bar{x}_N^m\tilde{\mu}_2\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\tilde{\beta}_1(y_N^\sigma)^2-$$

$$-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\tilde{\beta}_1 y_N^{(\sigma)}\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)y_N^{(\sigma)}\tilde{\beta}_2\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N-$$

$$-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\tilde{\beta}_2\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2\le\varepsilon_3\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_0\Big)^2+\varepsilon_4\Big(\Delta^\alpha_{0t_{j+\sigma}}y_N\Big)^2+M_{12}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4}\Big(\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big)+$$

$$+M_{13}^{\varepsilon_3}\sum_{s=0}^{j+\frac12}(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0^s)^2\bar{\tau}+M_{14}^{\varepsilon_3,\varepsilon_4}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_0^2+(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0)^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2\Big)-$$

$$-\frac{h}{4(m+1)}x_{0.5}^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0^2-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(y_N)^2-$$
$$-\frac{0.5h}{m+1}x_{0.5}^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\Big)^2-\Big(\bar{x}_N^m-x_N^m\Big)\tilde{\beta}_2\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big)^2. \qquad (6.16)$$

Учитывая преобразования (6.16), из (6.15) находим при $\varepsilon_1=\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2}$, $\varepsilon_2=\frac{\beta_2 x_N^m}{2}$, $\varepsilon_3=\frac{hx_{0.5}^m}{4(m+1)}$, $\varepsilon_4=(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}$

$$\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big]+M_{10}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+M_3\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big]+$$
$$+\frac{h}{4(m+1)}x_{0.5}^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0^2+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(y_N)^2+$$
$$+\frac{0.5h}{2(m+1)}x_{0.5}^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_0\Big)^2+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big)^2\le$$
$$\le M_{15}\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+M_{16}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2\bar{\tau}+M_{17}\Big(\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big)+$$
$$+M_{18}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}y^\sigma]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}^{(\sigma)}]|_0^2+\Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0\Big)^2\Big), \qquad (6.17)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2=\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\Big(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0\Big)^2$.

Преобразуем первое, четвертое, шестое и восьмое слагаемые в левой части (6.17) с учетом $x_{N-0.5}^m\ge\frac{1}{6}x_N^m$

$$\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big]+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(y_N)^2+$$
$$+\Big(\frac{\bar{\bar{\varkappa}}}{2},\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big]+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big)^2=$$
$$=\Big(\frac{\bar{\varkappa}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)+\frac{0.5h}{2}x_N^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(y_N)^2+\Big(\frac{\bar{\varkappa}}{2},\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big)$$
$$+\frac{0.5h}{2}x_N^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big)^2+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(y_N)^2+$$
$$+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}x_N^m+(\bar{x}_N^m-x_N^m)\frac{\tilde{\beta}_2}{2}\right)\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big)^2=\Big(\frac{\bar{\varkappa}}{2},\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)+$$
$$+\Big(\frac{\bar{\varkappa}}{2},\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big)+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}\bar{x}_N^m+\frac{0.5h}{2}\bar{x}_N^m\right)\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(y_N)^2+$$
$$+\left(\frac{\tilde{\varkappa}\beta_2}{2}\bar{x}_N^m+\frac{0.5h}{2}\bar{x}_N^m\right)\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big)^2\ge\frac{M_{18}}{2}\Big(1,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)+$$
$$+\frac{h}{4}\bar{x}_N^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(y_N)^2+\frac{M_{19}}{2}\Big(1,\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big)+\frac{h}{4}\bar{x}_N^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big)^2\ge$$
$$\ge\frac{1}{4}\Big(1,\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)^2\Big)+\frac{0.5h}{12}x_N^m\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(y_N)^2+\frac{1}{4}\Big(1,\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha(x^{\frac{m}{2}}y)\Big)^2\Big)+$$
$$+\frac{0.5h}{12}x_N^m\Big(\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha y_N\Big)^2\ge\frac{1}{12}\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\frac{1}{12}\|\Delta_{0t_{j+\sigma}}^\alpha x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2, \qquad (6.18)$$

где

$$M_{19}=\begin{cases}1, \text{если } m=0, m\geq 1,\\ \frac{1}{2}, \text{если } m\in(0,1),\ h\leq h_0=\sqrt{\frac{12x^2}{m(1-m)}}.\end{cases}$$

Учитывая (6.18), из (6.17) получаем

$$\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_2^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}_{\bar{x}}]|_0^2+\|\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2\leq$$

$$\leq M_{20}\|x^{\frac{m}{2}}y^{(\sigma)}]|_2^2+M_{21}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\|x^{\frac{m}{2}}y]|_1^2\bar{\tau}+M_{22}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big),\qquad(6.19)$$

где $\|x^{\frac{m}{2}}y]|_2^2=\|x^{\frac{m}{2}}y]|_0^2+\|\bar{x}^{\frac{m}{2}}y_{\bar{x}}]|_0^2+\left(x_{0.5}^{\frac{m}{2}}y_0\right)^2$.

Повторяя рассуждения (4.17)-(4.30), из (6.19) находим искомую априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}}y^{j+1}]|_1^2\leq M\left(\|x^{\frac{m}{2}}y^0]|_2^2+\frac{t_j^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\max_{0\leq j'\leq j}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\varphi\|_0^2+\tilde{\mu}_1^2+\tilde{\mu}_2^2\Big)\right),\qquad(6.20)$$

где $M=const>0$, не зависящая от h и τ.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия (2.4), (5.5) тогда существуют такие τ_0, h_0, что если $\tau\leq\tau_0, h\leq h_0$, то для решения разностной задачи (6.1)-(6.4) справедлива априорная оценка (6.20).*

Из этой оценки следуют единственность и устойчивость решения задачи (6.1)-(6.4) по начальным данным и правой части.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи $(5.1)-(5.4)$ $y(x_i,t_j)=y_i^j$-решение разностной задачи $(6.1)-(6.4)$. Для оценки точности разностной схемы $(6.1)-(6.4)$ рассмотрим разность $z_i^j=y_i^j-u_i^j$, где $u_i^j=u(x_i,t_j)$. Тогда, подставляя $y=z+u$ в соотношения $(6.1)-(6.4)$, получаем задачу для функции z

$$\bar{\varkappa}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z=\frac{\varkappa}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5}a^jz^{(\sigma)}_{\bar{x}}\Big)_x+\frac{b^{-j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i-0.5}a_i^jz^{(\sigma)}_{\bar{x},i}\Big)+$$

$$+\frac{b^{+j}}{x_i^m}\Big(x^m_{i+0.5}a^j_{i+1}z^{(\sigma)}_{x,i}\Big)+\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{i,s}z_i^s\bar{\tau}+\Psi_i^j,\ (x,t)\in\omega_{h,\tau}\qquad(6.21)$$

$$\varkappa_0a_1z^{(\sigma)}_{x,0}=\frac{0.5h}{m+1}\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_0-\frac{0.5h}{m+1}\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{0,s}z_0^s\bar{\tau}-\tilde{\nu}_1,\qquad(6.22)$$

$$-\varkappa_Na_Nz^{(\sigma)}_{\bar{x},N}=\tilde{\beta}_1z_N^{(\sigma)}-0.5h\sum_{s=0}^{j+\frac{1}{2}}\rho^j_{N,s}z_N^s\bar{\tau}+\tilde{\beta}_2\Delta^{\alpha}_{0t_{j+\sigma}}z_N-\tilde{\nu}_2,\qquad(6.23)$$

$$z(x,0)=0,\ x\in\overline{\omega}_h,\qquad(6.24)$$

где $\Psi=O\Big(\frac{h^2+\tau^2}{x}\Big)$, $\tilde{\nu}_1=O\big(h^2+\tau^2\big)$, $\tilde{\nu}_2=O\big(h^2+\tau^2\big)-$ погрешности аппроксимации дифференциальной задачи $(5.1)-(5.4)$ разностной схемой $(6.1)-(6.4)$ в классе решении $u=u(x,t)$ задачи $(5.1)-(5.4)$.

Применяя априорную оценку (6.20) к решению задачи $(6.21)-(6.24)$, получаем неравенство

$$\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}]|_1^2\leq M\max_{0\leq j'\leq j}\Big(\|x^{\frac{m}{2}}\Psi^{j'}\|_0^2+\tilde{\nu}_1^2+\tilde{\nu}_2^2\Big),\qquad(6.25)$$

где $M = const > 0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (6.25) следуют единственность и устойчивость решения разностной схемы $(6.1)-(6.4)$ по начальным данным и правой части, а также сходимость решения разностной задачи $(6.1)-(6.4)$ к решению $(5.1)-(5.4)$ в сеточной норме $\|x^{\frac{m}{2}}z^{j+1}\|_2^2$ со скоростью $O\left(h^2+\tau^2\right)$ так, что если существуют такие h_0, τ_0, то при $h \le h_0, \tau \le \tau_0$ справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}}\left(y^{j+1}-u^{j+1}\right)\|_1 \le M\|x^{\frac{m}{2}-1}\|_1\left(h^2+\tau^2\right) \le \overline{M}\left(h^2+\tau^2\right),$$

где $\overline{M} = const > 0$, не зависящее от h и τ.

References

[1] K.B. Oldham, J. Spanier, *The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*, New York, Academic Press, 1974.

[2] K.S. Miller, B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York, Wiley, Wiley and Sons, 1993.

[3] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, San. Diego, Academic Press, 1999.

[4] V.E. Tarasov, *Models of theoretical physics with fractional integro-differentiation*, Izhevsk, Moscow, Izhevsk Institute for Computer Research, 2011.

[5] A.M. Nakhushev, *Fractional calculus and its application*, Fizmatlit, Moscow, 2003.

[6] V.V. Uchaikin, *Fractional derivative method*, Artishok, Ul'yanovsk, 2008.

[7] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, New York, W.H. Freeman and Company. 1982.

[8] A.A. Samarskii, *Theory of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1983.

[9] A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1977.

[10] A.A. Samarskii, *About one heat distribution problem*, Bulletin of Moscow State University, **3**, (1947), 85–102.

[11] S.V. Nerpin, A.F. CHudnovskii, *Energy and mass transfer in the soil-plant-air system*, Gidrometeoizdat, Leningrad, 1975.

[12] R.R. Nigmatullin, *Features of relaxation of a system with "residual" memory*, Fiz. solid body. **27**:5, (1985), 1583—1585.

[13] A.A. Alikhanov, *Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings*, Appl. Math. **219** (2012), 3938—3946.

[14] A.A. Alikhanov, *A new difference scheme for the time fractional diffusion equation*, J. Comput. Phys. **280** (2015), 424—438.

[15] M.KH. Beshtokov, *Local and nonlocal boundary value problems for degenerating and nondegenerating pseudoparabolic equations with a Riemann-Liouville fractional derivative* Differential Equations, **54**:6 (2018), 758–774.

[16] M.KH. Beshtokov, *To boundary-value problems for degenerating pseudoparabolic equations with Gerasimov-Caputo fractional derivative* Russian Mathematics, **62**:10 (2018), 1–14.

[17] M.Kh. Beshtokov, V.A. Vodakhova, *Nonlocal boundary value problems for a fractionalorder convection–diffusion equation*, Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki, **29**:4 (2019), 459-–482.

[18] M.Kh. Beshtokov, F.A. Erzhibova, *To boundary value problems for integro-differential equations of fractional order* Matematicheskiye trudy, **23**:1 (2020), 16–36.

[19] A.A. Samarskii, *The theory of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1983.

[20] A.A. Samarskii, A.V. Gulin, *Stability of difference schemes*, Nauka, Moscow, 1973.

Murat Khamidbievich Beshtokov
Institute of applied mathematics and automation, Kabardino-Balkarian scientific center of RAS,
ul. Shortanova, 89A,
360000, Nalchik, Russia
Email address: `beshtokov-murat@yandex.ru`

Marat Zakharovich KHudalov
North Ossetian state university after K.L. Khetagurov,
ul. Vatutina, 44-46,
362025, Vladikavkaz, Russia
Email address: hmz@lenta.ru