S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 661–671 (2020) УДК 519.21
DOI 10.33048/semi.2020.17.044 MSC 60G50

О НЕКОТОРЫХ НЕРАВЕНСТВАХ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ

В.И. ЛОТОВ

Abstract. We obtain new upper and lower bounds for the probability that random walk with negative drift leaves the strip through the upper boundary. It is assumed that distributions of the walk increments do not have an exponential moment. The accuracy of known inequalities for the distribution of trajectory supremum is analyzed.
Keywords: random walk, two-sided boundary crossing problem, ruin probability, trajectory supremum

1. Введение. Предварительные результаты

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad S_0 = 0, \quad \mathbf{E}X < 0.$$

Для произвольных $a > 0,\ b > 0$ рассмотрим момент первого выхода случайного блуждания $\{S_n,\ n \geq 1\}$ из интервала $(-a, b)$:

$$N = \min\{n \geq 1 : S_n \notin (-a, b)\},$$

и пусть $\beta(a, b) = \mathbf{P}(S_N \geq b)$ — вероятность того, что первый выход из интервала $(-a, b)$ произойдет через его верхнюю границу.

Первые шаги в изучении величины $\beta(a, b)$ были сделаны еще в XVII столетии при рассмотрении игровых ситуаций (см. обзор Л. Такача [1]) и ограничивались

Lotov, V.I., On some inequalities in boundary crossing problems for random walks.

Работа выполнена при частичной поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № 1.1.3 (проект № 0314-2016-0008), а также гранта РФФИ (проект 18-01-00101а).

Поступила 2 марта 2020 г., опубликована 30 апреля 2020 г.

ситуацией, когда $\mathbf{P}(X_1 = -1) + \mathbf{P}(X_1 = 1) = 1$. Этими приложениями объясняется последующая интерпретация величины $\beta(a, b)$ как вероятности разорения игрока. Впоследствии выяснилось, что к вычислению $\beta(a, b)$ приводят и другие, не менее важные задачи, такие как нахождение вероятностей ошибок и оперативной характеристики последовательного критерия отношения правдоподобия [2], обнаружение разладки с помощью метода кумулятивных сумм [3], исследование различных характеристик систем обслуживания и ряд других.

В связи с тем, что вычисление $\beta(a, b)$ в точном виде доступно только в некоторых частных ситуациях, акцент в исследованиях переместился на построение аппроксимационных формул и, в частности, на изучение асимптотики этой вероятности в тех случаях, когда асимптотический анализ возможен (например, в схеме серий при уменьшающихся размерах скачков блуждания или при $a + b \to \infty$, см. некоторые ссылки в [4]).

Ясно, что любые асимптотические результаты неизбежно содержат остаточные члены. Обычно указывается порядок убывания этих остаточных членов, однако оценка их реальной величины требует дополнительных рассмотрений. В связи с этим естественным дополнением к имеющимся асимптотическим результатам является нахождение двусторонних неравенств для $\beta(a, b)$.

Дополнительную трудность вызывает следующее обстоятельство. Исследование тех или иных функционалов в задачах для случайных блужданий с двумя границами (в точном или асмптотическом виде), как правило, сводится к использованию распределений функционалов, возникающих в задачах с одной границей. К их числу относятся распределения перескоков через границу и супремума траектории. Нахождение последних, в свою очередь, сводится к использованию распределений лестничных величин, или, в других терминах, значений в разных точках компонент известной факторизации Винера — Хопфа или ее производных. Все это сопряжено с определенными трудностями. По этой причине крайне желательно получить двусторонние оценки для $\beta(a, b)$ в терминах характеристик исходных распределений скачков блуждания, а не лестничных величин.

В [5] приводится двустороннее неравенство для $\beta(a, b)$ такого сорта, полученное при условии, что распределение случайной величины X удовлетворяет правостороннему условию Крамéра. Одна из целей данной работы — получить аналогичные оценки для $\beta(a, b)$ без предположения о выполнении этого условия.

Обозначим $Q(t) = \mathbf{P}(\sup\limits_{n \geq 0} S_n \geq t)$. В качестве предварительных результатов будут использоваться следующие оценки, полученные в [5].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{E}X < 0$, *тогда*

$$\beta(a, b) \geq \frac{Q(b) - Q(a + b)}{1 - Q(a + b)}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}X < 0$. *Предположим, что* $\mathbf{E}(X^-)^2 < \infty$, *где* $X^- = \max\{-X, 0\}$, *и функция* $Q(t)$ *является выпуклой вниз при* $t > 0$. *Тогда*

$$\beta(a, b) \leq \frac{Q(b) - Q(a + b + d)}{1 - Q(a + b + d)}, \qquad d := \frac{\mathbf{E}(X^-)^2}{|\mathbf{E}X|}.$$

Ясно, что для получения двусторонних оценок для $\beta(a, b)$ нужно подходящим образом оценить сверху и снизу функцию $Q(t)$. Проблема состоит в том, что явные формулы для $Q(t)$ известны только в некоторых частных ситуациях, также не удается указать достаточно широкие условия выпуклости этой функции, требуемые в теореме 2. В этой связи приведем двусторонние оценки для функции $Q(t)$, которые взяты из учебника А.А. Боровкова [6, Теорема 15.3.5] и которые использовались в [5]. Остановимся на них более подробно.

Положим $\varphi(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda X}$. Будем говорить, что распределение случайной величины X удовлетворяет правостороннему условию Крамéра, если

$$\varphi(\lambda_+) < \infty \quad \text{для некоторого } \lambda_+ > 0. \tag{1}$$

Легко видеть, что функция φ выпукла вниз, и если $\varphi(\lambda_+) \geq 1$, то для некоторого $\mu > 0$ будет выполняться $\varphi(\mu) = 1$. Пусть, далее, $M = \infty$, если $\mathbf{P}(X < t) < 1$ при всех $t > 0$; в противном же случае положим

$$M = \inf\{t > 0 : \mathbf{P}(X \leq t) = 1\}.$$

Введем величины

$$\psi_+ = \sup_{0<t<M} \mathbf{E}(e^{\mu(X-t)}|X > t), \quad \psi_- = \inf_{0<t<M} \mathbf{E}(e^{\mu(X-t)}|X > t). \tag{2}$$

Теорема 3. ([6]) *Пусть* $\mathbf{E}X < 0$, X *удовлетворяет условию* (1), *и* $\varphi(\lambda_+) \geq 1$. *Тогда*

$$\psi_+^{-1}e^{-\mu t} \leq Q(t) \leq \psi_-^{-1}e^{-\mu t}, \tag{3}$$

где число $\mu > 0$ *находится из условия* $\varphi(\mu) = 1$.

Как отмечено в [6], неравенства (3) неулучшаемы, поскольку в случае, когда

$$\mathbf{P}(X > t) = q\exp\{-\alpha t\}, \quad t > 0, \qquad \alpha > 0, \tag{4}$$

имеет место при $y > 0$

$$\mathbf{P}(X - t > y|X > t) = \frac{\mathbf{P}(X > t + y, X > t)}{\mathbf{P}(X > t)} = e^{-\alpha y}, \qquad \text{и} \quad \psi_+ = \psi_- = \frac{\alpha}{\alpha - \mu}.$$

Заметим, что (2) отличается от определения величин $\psi_\pm$ в [6], где не исключен случай использования условных вероятностей при $\mathbf{P}(X > t) = 0$. Как нетрудно видеть из доказательства теоремы 15.3.5 в [6], ее утверждение справедливо именно при определении величин $\psi_\pm$ в соответствии с (2).

Несомненным достоинством двусторонних оценок (3) является то, что, во-первых, функции $\psi_\pm^{-1}e^{-\mu t}$ определяются весьма просто через исходное распределение скачков блуждания, и, во-вторых, функция $Q(t)$ зажимается между двумя выпуклыми функциями, что позволяет воспользоваться приведенной выше теоремой 2, в которой используется выпуклость.

Одна из целей данной работы состоит в нахождении оценок для $\beta(a, b)$ без предположения о выполнении условия Крамéра. Мы покажем ниже, что неравенства (3) оказываются востребованными и в этом случае, и по этой причине подвергнем их дополнительному анализу в последнем разделе работы.

2. Неравенства для вероятности разорения игрока

В этом разделе будем анализировать ситуацию, когда $EX < 0$ и распределение случайной величины X имеет тяжелый правый хвост, то есть

$$\mathbf{E}e^{\lambda X} = \infty \quad \text{при всех } \ \lambda > 0, \tag{5}$$

и, следовательно, не выполнено правостороннее условие Крамéра (1). Задача состоит в оценивании $\beta(a,b)$ для этого случая.

Обозначим $s = a+b$ и рассмотрим случайное блуждание $S'_n = X'_1 + \cdots + X'_n$, где

$$X'_i = X_i I_{\{X_i<s\}} + sI_{\{X_i\ge s\}}.$$

Пусть также

$$X' = XI_{\{X<s\}} + sI_{\{X\ge s\}}, \qquad S'_0 = 0.$$

Ясно, что для X' выполнено условие (1), поскольку $\varphi_s(\lambda) := \mathbf{E}e^{\lambda X'} < \infty$ при любом $\lambda > 0$ и $\varphi_s(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Кроме того отметим, что $\mathbf{E}X' \le \mathbf{E}X < 0$ и $s = \inf\{t > 0 : \mathbf{P}(X' \le t) = 1\}$, то есть s совпадает с числом M, вычисленным для случайной величины X'.

Лемма 1. (см. также замечание в [5]). *Вероятность $\beta(a,b)$ не изменится, если заменить случайное блуждание $\{S_n\}$ на $\{S'_n\}$.*

Доказательство. Рассмотрим траекторию случайного блуждания $\{S_n\}$, которая впервые выходит из полосы через верхнюю границу на уровне b в некоторый момент времени m. До момента m размеры всех ее скачков не превосходят ширины полосы $s = a + b$, то есть $S_k = S'_k,\ k = 1,\dots,m-1$. Если $X_m < s$, то и $X'_m < s$, то есть $S_k = S'_k$ при всех $k = 1,\dots,m$. Если же оказалось, что для траектории $\{S_n\}$ выход из полосы осуществился в момент m “большим” скачком, то есть $X_m \ge s$, то по определению в этом случае $X'_m = s$ и траектория блуждания $\{S'_n\}$ в момент m также впервые выходит из полосы через верхнюю границу. Если же траектория случайного блуждания $\{S_n\}$ впервые выходит из полосы через нижнюю границу в момент времени m, то $X_k < s$ при всех $k = 1,\dots,m$, то есть $S_k = S'_k,\ k = 1,\dots,m$. Лемма доказана.

Обозначим через $\beta'(a,b)$ вероятность разорения, вычисленную по случайному блужданию $\{S'_n\}$. В силу леммы она совпадает с введенной ранее вероятностью $\beta(a,b)$ для блуждания $\{S_n\}$. Приращения случайного блуждания $\{S'_n\}$ уже удовлетворяют условию Крамéра, поэтому для получения оценок вероятности $\beta'(a,b)$ мы вновь можем пользоваться неравенствами (3). Участвующие в нем величины μ и $\psi_\pm$ должны теперь определяться по распределению случайной величины X' и тем самым зависеть от $s = a+b$. Этот факт мы будем подчеркивать в обозначениях $\mu(s)$ и $\psi_\pm(s)$.

Обозначим $Q'(t) = \mathbf{P}(\sup\limits_{n\ge 0} S'_n \ge t)$. Для получения оценки снизу вероятности $\beta'(a,b)$ воспользуемся теоремой 1, в силу которой

$$\beta'(a,b) \ge \frac{Q'(b) - Q'(a+b)}{1 - Q'(a+b)},$$

и неравенствами

$$\psi_+^{-1}(s)e^{-\mu(s)t} \le Q'(t) \le \psi_-^{-1}(s)e^{-\mu(s)t}. \tag{6}$$

Заметим только, что $\psi_-(s) = 1$. Действительно, для любого $\mu > 0$ при $t < s$ имеем

$$\mathbf{E}(e^{\mu X'}; X' > t) = \int\limits_{(t,s)} e^{\mu y} dF(y) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \ge s).$$

Здесь

$$F(y) = \mathbf{P}(X < y), \quad \mathbf{P}(X' > t) = \mathbf{P}(X > t), \quad \mathbf{P}(X \ge s) > 0$$

в силу условия (5). Таким образом, при $t < s$

$$\mathbf{E}(e^{\mu(X'-t)}|X' > t) = \frac{\mathbf{E}(e^{\mu X'}; X' > t)}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X' > t)} = \frac{\int\limits_{(t,s)} e^{\mu y} dF(y) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \geq s)}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t)}.$$

Очевидная оценка

$$\int\limits_{(t,s)} e^{\mu y} dF(y) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \geq s) \geq e^{\mu t}\mathbf{P}(t < X < s) + e^{\mu t}\mathbf{P}(X \geq s) = e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t)$$

влечет при $t < s$

$$\frac{\int\limits_{(t,s)} e^{\mu y} dF(y) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \geq s)}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t)} \geq 1.$$

Следовательно, $\psi_{\pm}(s) \geq 1$. При $t \to s$ получаем

$$\frac{\int\limits_{(t,s)} e^{\mu y} dF(y) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \geq s)}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t)} \to 1,$$

то есть $\psi_{-}(s) = 1$.

Итак, получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{E}X < 0$, *и пусть* X *удовлетворяет условию* (5). *Обозначим* $X' = XI_{\{X<s\}} + sI_{\{X \geq s\}}$, $s := a + b$, $\mu(s)$ *— положительный корень уравнения* $\mathbf{E}e^{\mu X'} = 1$, $r(s) := \psi_{+}^{-1}(s)$, *и пусть величина* $\psi_{+}(s)$ *определяется по распределению случайной величины* X' *в соответствии с формулой* (2). *Тогда*

$$\frac{r(s)e^{-\mu(s)b} - e^{-\mu(s)s}}{1 - r(s)e^{-\mu(s)s}} \leq \beta'(a, b) = \beta(a, b). \tag{7}$$

Для получения оценки сверху применим теорему 2 и неравенства (6).

Теорема 5. *Пусть дополнительно к условиям теоремы* 4 *выполнено* $\mathbf{E}(X^{-})^2 < \infty$. *Обозначим* $d(s) := \dfrac{\mathbf{E}(X'^{-})^2}{|\mathbf{E}X'|}$, *тогда*

$$\beta(a, b) = \beta'(a, b) \leq \frac{e^{-\mu(s)b} - r(s)e^{-\mu(s)(s+d(s))}}{1 - r(s)e^{-\mu(s)(s+d(s))}}. \tag{8}$$

Проанализируем зависимость величин $\mu(s)$, $\psi_{+}(s)$ и $d(s)$ от s, включая асимптотическое поведение этих величин при $s \to \infty$.

Нетрудно видеть, что $\mathbf{E}(X'^{-})^2 = \mathbf{E}(X^{-})^2$, поскольку $X'^{-} = X^{-}$. Кроме того, $\mathbf{E}X' \to \mathbf{E}X$ при $s \to \infty$, поэтому

$$d(s) = \frac{\mathbf{E}(X'^{-})^2}{|\mathbf{E}X'|} = d + o(1), \qquad \text{где} \ \ d = \frac{\mathbf{E}(X^{-})^2}{|\mathbf{E}X|}.$$

Далее заметим, что $\mu(s) \to 0$ при $s \to \infty$. Справедливо

Предложение 1. *Пусть выполнено условие* (5), *тогда при* $s \to \infty$ *имеет место монотонная сходимость* $\mu(s) \to 0$.

Доказательство. Функция $\varphi_s(\lambda)$ непрерывна на положительной полуоси, выпукла вниз и, как уже отмечалось, $\varphi_s(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Нетрудно видеть, что $\varphi_s(\lambda)$ не убывает по s при фиксированном λ. Следовательно, функция $\mu(s)$ не возрастает при увеличении s. Обозначим $q = \lim_{s\to\infty} \mu(s)$ и предположим, что $q > 0$. Тогда в силу теоремы о мажорируемой сходимости для любого $0 < A < s$

$$1 \geq \int_{-\infty}^{A} e^{\mu(s)y} dF(y) \to \int_{-\infty}^{A} e^{qy} dF(y)$$

при $s \to \infty$, что невозможно в силу расходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{qy} dF(y)$. Следовательно, $q = 0$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть выполнено условие* (5), *тогда*

$$e^{\mu(s)s}\mathbf{P}(X \geq s) \to 0, \qquad s \to \infty. \tag{9}$$

Доказательство. В соответствии с определением величины $\mu(s)$ выполняется

$$\mathbf{E}e^{\mu(s)X'} = \int_{-\infty}^{s} e^{\mu(s)y} dF(y) + e^{\mu(s)s}\mathbf{P}(X \geq s) = 1. \tag{10}$$

Поэтому достаточно показать, что

$$\int_{-\infty}^{s} e^{\mu(s)y} dF(y) \to 1 \tag{11}$$

при $s \to \infty$. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем число $A > 0$ такое, что $F(A) \geq 1 - \varepsilon$. Очевидно, для любого фиксированного $A < s$ имеет место

$$1 \geq \int_{-\infty}^{s} e^{\mu(s)y} dF(y) \geq \int_{-\infty}^{A} e^{\mu(s)y} dF(y) \underset{s\to\infty}{\to} F(A) \geq 1 - \varepsilon,$$

откуда следует (11) ввиду произвольности выбора числа ε. Тем самым из (10) и (11) следует (9), и одновременно

$$\mu(s) = o\left(\frac{|\log \mathbf{P}(X \geq s)|}{s}\right), \qquad s \to \infty.$$

Предложение доказано.

Теперь рассмотрим $\psi_+(s)$. Из неравенства

$$\int_{(t,s)} e^{\mu y} dF(y) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \geq s) \leq e^{\mu s}\mathbf{P}(t < X < s) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \geq s) = e^{\mu s}\mathbf{P}(X > t)$$

следует

$$\frac{\int\limits_{(t,s)} e^{\mu y} dF(y) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \geq s)}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t)} \leq e^{\mu(s-t)},$$

то есть в силу леммы 3

$$\psi_+(s) \leq \sup_{0<t<s} e^{\mu(s)(s-t)} = e^{\mu(s)s} = o\left(\frac{1}{\mathbf{P}(X \geq s)}\right).$$

Однако это весьма грубая оценка. Попробуем оценить $\psi_+(s)$ точнее. При $\mu = \mu(s)$ имеем

$$\int\limits_{(t,s)} e^{\mu y} dF(y) + e^{\mu s}\mathbf{P}(X \geq s) = \mathbf{E}e^{\mu X'} - \int\limits_{(-\infty,t]} e^{\mu y} dF(y) = 1 - \int\limits_{(-\infty,t]} e^{\mu y} dF(y),$$

поэтому одновременно справедливы два представления:

(12)
$$\psi_+(s) = \sup_{0<t<s} \frac{\int\limits_{(t,s)} e^{\mu(s)y} dF(y) + e^{\mu(s)s}\mathbf{P}(X \geq s)}{e^{\mu(s)t}\mathbf{P}(X > t)} = \sup_{0<t<s} \frac{1 - \int\limits_{(-\infty,t]} e^{\mu(s)y} dF(y)}{e^{\mu(s)t}\mathbf{P}(X > t)}.$$

Рассмотрим второе из этих представлений. При любом фиксированном значении $\mu(s)$ при возрастании числа t числитель в правой части не возрастает, его максимальное значение достигается в нуле. Покажем, что минимальное значение знаменателя также достигается в нуле при любом значении $\mu = \mu(s) > 0$. Для этого рассмотрим функцию

$$g(t) := e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t), \qquad \mu > 0, \quad t > 0.$$

При любом $\mu > 0$ выполняется $g(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ — это известное свойство распределений с тяжелым правым хвостом. Предположив далее дифференцируемость функции $\mathbf{P}(X > t)$ при $t > 0$, найдем точку минимума функции g. Взяв производную, получим уравнение

$$0 = g'(t) = \mu e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t) + e^{\mu t}\frac{d\mathbf{P}(X > t)}{dt},$$

которое сводится к равенствам

$$(\log \mathbf{P}(X > t))' = -\mu \qquad \text{или} \quad \mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}(X > 0)e^{-\mu t}.$$

Это означает, что в точке минимума имеет место $e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t) = \mathbf{P}(X > 0)$, то есть минимум функции g достигается в нуле (функция $\mathbf{P}(X > t)$ непрерывна справа). Предположение о дифференцируемости функции $\mathbf{P}(X > t)$ легко обходится с помощью обычного сглаживания распределения (см. пример сглаживания в следующем разделе). В итоге приходим к выводу, что верхняя грань в (12) достигается в нуле и

(13)
$$\psi_+(s) = \frac{1 - \int\limits_{(-\infty,0]} e^{\mu(s)y} dF(y)}{\mathbf{P}(X > 0)}$$

Разлагая правую часть в (13) в ряд Тейлора, будем иметь при $\mu(s) \to 0$

$$\psi_+(s) = 1 - \mu(s)\frac{\int\limits_{(-\infty,0]} y dF(y)}{\mathbf{P}(X > 0)} + o(\mu(s)).$$

Проанализируем далее, как ведет себя оценка снизу в (7) при $\mu(s) \to 0$. Будем считать для определенности, что число a остается ограниченным, а $b \to \infty$, то есть $s = a + b \to \infty$. Обозначим

$$m := -\frac{\int\limits_{(-\infty,0]} y dF(y)}{\mathbf{P}(X > 0)} > 0,$$

тогда $r(s) = \psi_+^{-1}(s) = 1 - m\mu(s) + o(\mu(s))$,

$$\frac{r(s)e^{-\mu(s)b}-e^{-\mu(s)(a+b)}}{1-r(s)e^{-\mu(s)(a+b)}}=\frac{e^{-\mu(s)b}\big(1-m\mu(s)+o(\mu(s))-1+\mu(s)a+o(\mu(s))\big)}{1-e^{-\mu(s)b}(1-m\mu(s)+o(\mu(s)))(1-\mu(s)a+o(\mu(s)))}$$

$$=\frac{e^{-\mu(s)b}((a-m)\mu(s)+o(\mu(s)))}{1-e^{-\mu(s)b}(1-(m+a)\mu(s)+o(\mu(s)))}.$$

Ясно, что оценка снизу в теореме 4 является содержательной, если $a>m$.

В условиях теоремы 5 для оценки сверху имеем

$$\beta(a,b)=\beta'(a,b)\le\frac{e^{-\mu(s)b}-r(s)e^{-\mu(s)(a+b+d(s))}}{1-r(s)e^{-\mu(s)(a+b+d(s))}}$$

$$=\frac{e^{-\mu(s)b}\big((1-(1-m\mu(s)+o(\mu(s)))(1-\mu(s)(a+d(s))+o(\mu(s)))\big)}{1-e^{-\mu(s)b}(1-m\mu(s)+o(\mu(s)))(1-\mu(s)(a+d(s))+o(\mu(s)))}$$

$$=\frac{e^{-\mu(s)b}((m+a+d)\mu(s)+o(\mu(s)))}{1-e^{-\mu(s)b}(1-(m+a+d)\mu(s)+o(\mu(s)))}.$$

Нетрудно выписать соответствующие асимптотические представления, если $a\to\infty$ одновременно с $b\to\infty$ или когда $a\to\infty$, но величина b остается ограниченной.

3. О неравенствах для распределения супремума траектории

Обсудим более детально неравенства (3), коль скоро они используются в нашей работе. Если условие (1) не выполнено, то есть если функция $\mathbf{P}(X>t)$ убывает медленнее экспоненты, то, разумеется, эти неравенства не работают. При выполнении условия (4) оба неравенства превращаются в равенство, которое хорошо известно. Следовательно, неравенства (3) имеют содержательный смысл только когда $\mathbf{P}(X>t)$ убывает быстрее экспоненты. Один такой случай уже рассмотрен в предыдущем разделе, когда $\mathbf{P}(X'\le s)=1$. Оказалось, что при этом $\psi_-(s)=1$.

Проанализируем теперь оценку сверху в (3) в общем случае, когда $\mathbf{P}(X>t)$ убывает быстрее экспоненты.

Пусть $M=\infty$, то есть $\mathbf{P}(X>t)>0$ для любого $t>0$, и пусть $F(y)=\mathbf{P}(X<y)$. Как и ранее, в силу очевидной оценки

$$\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}dF(y)\ge e^{\mu t}\mathbf{P}(X>t)$$

имеем

$$\mathbf{E}(e^{\mu(X-t)}|X>t)=\frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}dF(y)}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X>t)}\ge 1.$$

Следовательно, всегда $\psi_\pm\ge 1$.

Далее воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}dF(y)=-\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}d\mathbf{P}(X>y)=-e^{\mu y}\mathbf{P}(X>y)\Big|_t^\infty$$

$$+\mu \int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X>y)dy = e^{\mu t}\mathbf{P}(X>t) + \mu \int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X>y)dy.$$

Таким образом,

$$\frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y} dF(y)}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X>t)} = 1 + \mu \frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X>y)dy}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X>t)}.$$

Покажем, что последнее слагаемое стремится к нулю при $t\to\infty$, если функция $\mathbf{P}(X>t)$ убывает быстрее экспоненты. Наряду с неравенством $\psi_\pm \geq 1$ это будет означать, что $\psi_- = 1$.

Пусть при $y>t$

$$\frac{\mathbf{P}(X>y)}{\mathbf{P}(X>t)} \leq e^{-\mu(y-t)} g(y) \tag{14}$$

равномерно по $t>0$, где $\int_0^\infty g(y)\,dy < \infty$. Нетрудно проверить, что, к примеру, условие (14) выполнено, если X имеет нормальное распределение.

Очевидно, при выполнении условия (14) имеет место сходимость

$$\frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X>y)dy}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X>t)} \leq \int\limits_t^\infty g(y)dy \to 0, \qquad t\to\infty,$$

то есть $\psi_- = 1$. Это означает, что в данном случае оценка сверху в (3) ничего нового не несет, она совпадает с хорошо известным неравенством $Q(t) \leq \exp\{-\mu t\}$ (см., например, [7, гл. 4, теорема 16]).

Если при этом $g(y)\to 0$, то из условия (14) одновременно следует

$$\mathbf{P}(X>y) \leq e^{\mu t}\mathbf{P}(X>t)e^{-\mu y}g(y) \leq e^{-\mu y}g(y) = o(e^{-\mu y}), \quad y\to\infty,$$

поскольку в силу неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}(X>t) \leq e^{-\mu t}\mathbf{E}e^{\mu X} = e^{-\mu t}.$$

Вместо (14) можно рассмотреть более слабое ограничение. Пусть

$$\int\limits_{(t,\infty)} \mathbf{P}(X>y)dy = o(\mathbf{P}(X>t)), \qquad t\to\infty. \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что условие (14) влечет (15). Действительно, из (14) следует

$$\int\limits_{(t,\infty)} \mathbf{P}(X>y)dy \leq \mathbf{P}(X>t) \int\limits_{(t,\infty)} e^{-\mu(y-t)}g(y)dy$$

$$\leq \mathbf{P}(X>t) \int\limits_{(t,\infty)} g(y)dy = o(1)\mathbf{P}(X>t), \quad t\to\infty.$$

Предложение 3. *Пусть выполнено условие* (15). *Тогда*

$$\frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y} dF(y)}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X>t)} \to 1, \qquad t\to\infty,$$

и, следовательно, $\psi_- = 1$.

Доказательство. Если существует плотность $f(y) = F'(y)$, отличная от нуля в некоторой окрестности бесконечности, то с помощью правила Лопиталя выводим из (15)

$$0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_{(t,\infty)} \mathbf{P}(X > y)dy}{\mathbf{P}(X > t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}(X > t)}{f(t)},$$

и одновременно

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X > y)dy}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t)}{\mu e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t) - e^{\mu t}f(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{o(1)}{1 + o(1)} = 0,$$

то есть $\psi_- = 1$.

В общем случае введем случайную величину Y, не зависящую от X и имеющую экспоненциальное распределение с параметром единица. Тогда распределение случайной величины $X - \varepsilon Y,\ \varepsilon > 0$, будет обладать отличной от нуля плотностью $f_\varepsilon(t)$, $X - \varepsilon Y \to X$ почти наверное при $\varepsilon \to 0$, и для $X - \varepsilon Y$ также будет выполнено свойство (15). Действительно, обозначив

$$h(t) := \frac{\int\limits_{(t,\infty)} \mathbf{P}(X > y)dy}{\mathbf{P}(X > t)},$$

будем иметь

$$\frac{\int\limits_{(t,\infty)} \mathbf{P}(X - \varepsilon Y > y)dy}{\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > t)} \to h(t), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Учитывая, что $h(t) = o(1)$, одновременно получаем

$$\frac{\int\limits_{(t,\infty)} \mathbf{P}(X - \varepsilon Y > y)dy}{\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > t)} = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty \frac{\int\limits_{(t,\infty)} \mathbf{P}(X - u > y)dy}{\mathbf{P}(X - u > t)} e^{-u/\varepsilon}du$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\infty e^{-u/\varepsilon}h(t+u)du \to 0, \qquad t \to \infty,$$

равномерно по $\varepsilon > 0$. Как и ранее, применением правила Лопиталя получаем при каждом ε

$$0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_{(t,\infty)} \mathbf{P}(X - \varepsilon Y > y)dy}{\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > t)}{f_\varepsilon(t)},$$

откуда следует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > y)dy}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{-e^{\mu t}\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > t)}{\mu e^{\mu t}\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > t) - e^{\mu t}f_\varepsilon(t)} = 0.$$

Окончательно получаем

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X > y)dy}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X > t)} = \lim_{t\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > y)dy}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X - \varepsilon Y > t)}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{t\to\infty} \frac{\int\limits_{(t,\infty)} e^{\mu y}\mathbf{P}(X-\varepsilon Y>y)dy}{e^{\mu t}\mathbf{P}(X-\varepsilon Y>t)} = 0.$$

Ситуация, когда $M<\infty$, $\mathbf{P}(X=M)=0$, исследуется аналогично. Случай, когда $M<\infty$, $\mathbf{P}(X=M)>0$, разобран в предыдущем разделе. Предложение доказано.

Таким образом, наиболее содержательным результатом в (3) является экспоненциальная оценка снизу $Q(t)\ge \psi_+^{-1}e^{-\mu t}$. Отметим, что при выполнении условия (15) она асимптотически точнее оценки снизу для $Q(t)$, приведенной в [8, Theorem 5.1]:

$$Q(t) \ge \frac{\int\limits_t^\infty \mathbf{P}(X>y)dy}{|\mathbf{E}X| + \int\limits_t^\infty \mathbf{P}(X>y)dy},$$

поскольку правая часть этого неравенства убывает быстрее экспоненты.

References

[1] L. Takacs, *On the classical ruin problems*, J. Amer. Statist. Assoc., **64** (1969), 889–907. Zbl 0181.23203

[2] A. Wald, *Sequential Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1947. Zbl 0029.15805

[3] E.S. Page, *Continuous inspection schemes*, Biometrika, **41** (1954), 100–115. Zbl 0056.38002

[4] V.I. Lotov, *On the asymptotics of the ruin probability*, Theory Probab. Appl., **59** (2015), 154–163. Zbl 1319.60093

[5] V.I. Lotov, *Bounds for the probability to leave the interval*, Stat. Probab. Lett., **145** (2019), 141–146. Zbl 1407.60029

[6] A.A. Borovkov, *Probability Theory*, Universitext. London: Springer, 2013. Zbl 1297.60002

[7] A.A. Borovkov, *Stochastic Processes in Queueing Theory*, New York - Heidelberg - Berlin: Springer- Verlag. XI, 1976. Zbl 0319.60057

[8] S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary, *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*, Springer, New York, 2013. Zbl 1274.62005

Vladimir Ivanovich Lotov
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Koptyuga ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia,
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail address: lotov@math.nsc.ru