SeMR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Òîì 20, ¹ 2, ñò. 144–145 (2023) УДК 519.218.2
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC
60K37

О НЕВЫРОЖДЕНИИ ПАРЫ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ОБЩЕЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Д.А. АРАПОВ

ПРЕДСТАВЛЕНО X

Abstract: The paper introduces the model of a pair of branching processes $\{\boldsymbol{Z_n} = \left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right),\ n \in \mathbb{N}_0\}$ in a joint random environment. If the environment is fixed then the sequences $\{Z_n^{(1)},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ and $\{Z_n^{(2)},\ n \in \mathbb{N}_0\}$ are independent branching processes in a varying environment. This model is a particular case of a more general model of a multitype branching process in a random environment. Under some moment conditions we establish the asymptotic relation $\mathbf{P}\left(Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0\right) \sim Cn^{-a}$ as $n \to \infty$ where the parameter a depends only on the correlation coefficient ρ of an increment of a two-dimensional associated random walk.

Keywords: multitype branching processes, random environment, random walks, extinction probabilities.

Arapov D.A., the probability of non-exctinction for two branching processes in a joint random environment.

1 Введение

Зафиксируем натуральное N. Положим

$$\Pi^{(j)} = \left\{p_n^{(j)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad f^{(j)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(j)} s^n,\ j = 1, 2, \dots, N,$$

где случайные величины $p_0^{(j)}, p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \dots,$ удовлетворяют соотношениям

$$p_n^{(j)} \geq 0,\ n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(j)} = 1 \text{ п.н.},\ j = 1, \dots, N.$$

Положим $\mathbf{\Pi} = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots\}$, где $\Pi_m = \left(\Pi_m^{(1)}, \dots, \Pi_m^{(N)}\right)$ – независимые копии $\left(\Pi^{(1)}, \dots, \Pi^{(N)}\right)$. Пусть также

$$\boldsymbol{f} = \left\{\left(f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(N)}\right), \left(f_2^{(1)}, \dots, f_2^{(N)}\right), \dots\right\}, \tag{1}$$

где $f_m^{(j)}$ при каждом натуральном m и каждом $j = 1, \dots, N$ является производящей функцией последовательности $\Pi_m^{(j)}$. Последовательность наборов производящих функций $\boldsymbol{f}$ будем называть случайной средой. Для краткости меру $\mathbf{P}(\cdot|\boldsymbol{f})$ будет обозначать $\mathbf{P_f}(\cdot)$. Случайный процесс

$$\left\{\overline{Z}_n = \left(Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(N)}\right), n \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad Z_0^{(j)} = 1,\ j = 1, \dots, N,$$

назовем группой из N ветвящихся процессов в общей случайной среде $\boldsymbol{f}$, если при фиксации среды $\boldsymbol{f}$ ветвящиеся процессы $\left\{Z_n^{(j)}, n \in \mathbb{N}_0\right\}$, $j = 1, \dots, N$, являются независимыми ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона в изменяющейся среде, где производящая функция (п.ф.) числа потомков одной частицы n-го поколении j-й популяции есть $f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$.

Процессу $\overline{Z}_n = \left(Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(N)}\right)$ можно сопоставить N-мерное сопровождающее блуждание с шагами

$$\overline{X}_i = \left(\ln\left(f_i^{(1)}\right)'(1), \dots, \ln\left(f_i^{(N)}\right)'(1)\right).$$

Назовем процесс $\{\overline{Z}_n\}$ критическим, если выполнено равенство $\mathbf{E}\overline{X}_1 = 0$.

При $N = 1$ случайный процесс $\{Z_n\}$ является ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС). Модель ВПСС впервые была введена Смитом и Вилкинсоном в 1969 году в работе [1]. Отметим, что в случае дробно-линейных производящих функций $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$

вероятность невырождения ВПСС к моменту времени n при фиксированной среде $\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(Z_n > 0\right)$ явно выражается через сопровождающее случайное блуждание (см. [2], стр. 40), что делает случай дробно-линейных п.ф. наиболее удобным для рассмотрения.

Группа из N ветвящихся процессов $\left\{\overline{Z}_n\right\}$ является частным случаем более общей модели многотипного ветвящегося процесса в случайной среде. В классическом многотипном процессе частицы одних типов могут порождать частицы других типов, в рассматриваемом нами случае это невозможно. Критические многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде рассматривались в работе [3], где изучалась вероятность невырождения хотя бы одного из типов частиц. В нашей более простой модели удается изучить вероятность невырождения всех типов частиц при значительно менее жестких условиях.

Асимптотическое поведение вероятности невырождения критического ВПСС в случае дробно-линейных производящих функций $\{f_n\}$ впервые было исследовано М.В. Козловым в 1976 году в статье [4]. Спустя четверть века, в 2001 году, Г. Кёрстингом и Й. Гейгером в статье [5] была изучена асимптотика вероятностей невырождения критического ВПСС для общего вида п.ф. $\{f_n\}$. Более точно, при некоторых дополнительных ограничениях были доказаны асимптотические соотношения

$$\mathbf{P}\left(Z_n > 0\right) \sim C\mathbf{P}\left(S_j > 0,\, j \leq n\right) \sim \frac{C\widehat{C}}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty, \tag{2}$$

где $C, \widehat{C}$ – некоторые константы, явный вид $\widehat{C}$ можно найти, например, в работе [6].

При $N = 2$ процесс $\{\overline{Z}_n\}$ будем называть парой ветвящихся процессов в общей случайной среде (ПВПСС). Именно эта модель и представляет для нас наибольший интерес. Асимптотическое соотношение (2) для вероятности невырождения критического ВПСС приводит нас к естественному предположению, что и для критической ПВПСС асимптотическое поведение вероятности невырождения связано с асимптотическим поведением вероятности положительности двумерного сопровождающего блуждания. При этом вопросы, связанные с асимптотическим поведением вероятности положительности многомерных случайных блужданий подробно исследованы Д. Денисовым и В. Вахтелем в работах [7] и [8]. Этим результатам посвящен раздел 3.

Основным результатом настоящей работы является теорема 1 о невырождении критической ПВПСС. При определенных условиях удается получить асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}\left(Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0\right) \sim \frac{C}{n^{p/2}},\ n \to \infty, \quad p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}, \tag{3}$$

где $\rho \in (0,1)$ – коэффициент корреляции компонент шага сопровождающего блуждания процесса $\left\{\overline{Z}_n\right\}$.

В процессе подготовки настоящей работы мы обнаружили препринт [9], в котором устанавливается асимптотическое соотношение (3) в случае дробно-линейных производящих функций $\left\{f_k^{(j)},\ k \in \mathbb{N},\ j = 1, 2\right\}$. Отметим, что в препринте [9] накладываются жесткие, и по-видимому, необязательные условия на шаги сопровождаюшего блуждания. При этом общие идеи препринта [9] и настоящей работы достаточно близки, а ряд результатов, изложенных в нем, имеет более общий характер по сравнению с результами настоящей работы. В частности, в нем рассмотрен случай отрицательной корреляции $\rho \in (-1, 0]$, а также получены функциональные предельные теоремы, которые в случае общего распределения требуют значительно более кропотливой работы. Мы не будем использовать результаты препринта [9], оставив все утверждения и леммы в исходно полученных нами версиях.

Отметим, что мы рассматриваем $N = 2$ в связи с тем, что в этом случае асимптотику вероятностей положительности двумерного сопровождающего случайного блуждания можно описать в явном виде, найдя, в частности, параметр p.

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 сформулирован основной результат настоящей работы. В разделе 3 изложен ряд результатов статей [7], [8], посвященных асимптотике положительности многомерных случайных блужданий. Раздел 4 содержит построение так называемой $\mathbf{P}^+$-меры – важного инструмента для исследования поведения сопровождающего случайного блуждания. Раздел 5 посвящен доказательству теоремы 1. Доказательства всех вспомогательных результатов вынесены в раздел 6.

2 Основной результат

Определим модель группы ветвящихся процессов в случайной среде более формально.

Определение 1. Случайный процесс

$$\left\{\overline{Z}_n = \left(Z_n^{(1)}, \ldots, Z_n^{(N)}\right),\ n \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad Z_0^{(j)} = 1,\ j = 1, \ldots, N$$

назовем группой из N ветвящихся процессов в общей случайной среде $\boldsymbol{f}$, если при каждом натуральном n справедливы равенства

$$\mathbf{E_f}\left(\prod_{j=1}^{N} t_j^{Z_n^{(j)}} \middle| \boldsymbol{Z_{n-1}}\right) := \mathbf{E}\left(\prod_{j=1}^{N} t_j^{Z_n^{(j)}} \middle| \boldsymbol{f}, \boldsymbol{Z_{n-1}}\right) = \prod_{j=1}^{N} \left(f_n^{(j)}\right)^{Z_{n-1}^{(j)}}(t_j).$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема о невырождении критической ПВПСС.

Теорема 1. *Пусть* $\overline{Z}_n = \left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}\right)$ *– критическая ПВПСС,* $\overline{S}_n$ *– ее сопровождающее блуждание с шагами* $\overline{X}_i = \left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}\right)$, $i \in \mathbb{N}$. *Положим*

$$\xi_k^{(l)} := \frac{\left(f_{k+1}^{(l)}\right)''(1)}{\left(\left(f_{k+1}^{(l)}\right)'(1)\right)^2}, \quad l = 1, 2;\ k \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Пусть $\mathbf{E}\left|\overline{X}_i\right|^2 \ln\left(1 + \left|\overline{X}_i\right|\right) < \infty$, $\mathbf{corr}\left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}\right) = \rho \in (0,1)$ *и, кроме того,* $\mathbf{E}\left(\xi_0^{(1)}\right)^q < \infty$, $\mathbf{E}\left(\xi_0^{(2)}\right)^q < \infty$ *при некотором* $q > 0$. *Тогда справедливо асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{P}\left(Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0\right) \sim \frac{C}{n^{p/2}},\ n \to \infty, \quad p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)},\ C \in (0, \infty). \tag{5}$$

3 Положительность многомерных случайных блужданий

В этом разделе мы обсудим ряд результатов, необходимых для доказательства теоремы 1 и полученных Д. Денисовым и В. Вахтелем в работах [7] и [8].

3.1. Обозначения. Единичную сферу в d-мерном вещественном пространстве будем обозначать $\mathbb{S}^{d-1}$. Всюду ниже будем использовать символы C, $\widehat{C}$, $\widetilde{C}$ с индексами и без для обозначения констант. При этом в различных местах эти символы могут обозначать различные величины. Евклидову норму вектора $\overline{v} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать $|\overline{v}|$. Иными словами, если $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_d)$, то

$$|\overline{v}| = \left(\sum_{j=1}^{d} v_j^2\right)^{1/2}.$$

Для краткости будем использовать обозначение $\overline{v} > C$, где $C \in \mathbb{R}$, $\overline{v} \in \mathbb{R}^d$, в том случае, если $v_i > C$ при всех $i = 1, 2, \ldots, d$. Также под $\overline{w} > \overline{v}$, где $\overline{w}, \overline{v} \in \mathbb{R}^d$, будем подразумевать, что $w_i > v_i$ при $i = 1, 2, \ldots, d$. Аналогичные обозначения будем использовать и для знаков $<, \geq, \leq$. Будем использовать следующее обозначение для минимума:

$$a \wedge b := \min(a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Для векторов мы будем использовать два обозначения – $\overline{v}$ и $\mathbf{v}$. Под матричной нормой $\|\cdot\|$ всюду ниже мы будем подразумевать операторную норму, подчиненную стандартной евклидовой норме, то есть $\|A\| = \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$, где $\lambda_{max}(B)$ — наибольшее собственное значение матрицы B. Для всякого множества $U \subseteq \mathbb{R}^d$ и всякого $x \in \mathbb{R}$ под записью xU мы понимаем множество в $\mathbb{R}^d$, заданное равенством

$$xU = \{x\overline{y} = (xy_1, \ldots, xy_d) : \overline{y} = (y_1, \ldots, y_d) \in U\}.$$

3.2. Задача Дирихле для оператора Лапласа–Бельтрами.

Определение 2. Будем говорить, что множество $K \subset \mathbb{R}^d$ является конусом, если существует такое открытое и связное множество $\Sigma \subset \mathbb{S}^{d-1}$, что K есть объединение всех лучей, выпущенных из начала координат и пересекающих множество Σ.

Напомним определение оператора Лапласа–Бельтрами.

Определение 3. Пусть M – гладкое риманово многообразие, $x^1, \ldots, x^n$ – локальные координаты на нем, $g = (g_{ij})$ – матрица римановой метрики, $g^{-1} = (g^{ij})$ – обратная к g матрица. Оператор, действующий на гладкие функции на многообразии M по правилу

$$L_M := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g} \cdot g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

называется оператором Лапласа–Бельтрами на многообразии M.

Пусть $\Sigma \subset \mathbb{S}^{d-1}$ – открытое связное множество из определения 2. Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа-Бельтрами на сфере $L_{\mathbb{S}^{d-1}}$:

$$\begin{cases} L_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\overline{x}) = -\lambda g(\overline{x}), & \overline{x} \in \Sigma, \\ g(\overline{x}) = 0, & \overline{x} \in \partial\Sigma. \end{cases} \tag{6}$$

Отметим, что спектр этой задачи не более чем счетен, дискретен и отделен от нуля (см. статью [8]). Более точно, имеет место цепочка

неравенств
$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \dots$$
Положим
$$p := \sqrt{\lambda_1 + (d/2-1)^2} - (d/2-1). \tag{7}$$
Всюду ниже символ p будет обозначать величину, задаваемую выражением (7), для какого конкретно конуса K задан параметр p будет ясно из контекста.

Пусть g_1 – неотрицательная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_1. Положим
$$u(\overline{x}) = |\overline{x}|^p \, g_1\left(\frac{\overline{x}}{|x|}\right). \tag{8}$$
Отметим, что в силу непрерывности (а значит и ограниченности) функции g_1 существует такое число C, что при всех $\overline{x} \in K$ имеет место неравенство
$$u(\overline{x}) \le C\,|\overline{x}|^p\,. \tag{9}$$
Для нас интерес представляет следующий частный случай.

Пример 1. Пусть $d = 2$, а множество Σ представляет собой дугу окружности $[-\varphi, \pi/2+\varphi]$, где $\varphi \in (0, \pi/4)$. Оператор Лапласа–Бельтрами на $\mathbb{S}^1$ имеет вид
$$L_{\mathbb{S}^1} = \frac{d^2}{dt^2},$$
где t – угловая координата на окружности. Положим $\rho = \sin 2\varphi$. После линейной замены $t(u) = -\varphi + u\,(\pi/2+2\varphi)$ задача (6) перепишется в виде следующей задачи на функцию ψ:
$$\begin{cases} \psi''(u) = -\lambda(\pi/2+2\varphi)^2\psi(u), \quad u \in (0,1), \\ \psi(0) = \psi(1) = 0. \end{cases}$$
Отсюда получаем следующее представление для параметра p, определяемого соотношением (7):
$$p = \sqrt{\lambda_1} = \frac{\pi}{\pi/2+2\varphi} = \frac{\pi}{\pi/2+\arcsin(\rho)} = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}.$$
Кроме того, собственная функция оператора Лапласа-Бельтрами g_1 при $t \in [-\varphi, \pi/2+\varphi]$ задается равенством
$$g_1(t) = \begin{cases} (-1)^k \cos(4kt), & \varphi = -\pi/4 + \pi/(8k),\ k \in \mathbb{N}, \\ \sin(p(\varphi+t))/\cos(p\varphi), & \text{в иных случаях.} \end{cases} \tag{10}$$

Замечание 1. Отметим, что справедливы соотношения $g_1(t) \ge 0$ при $t \in [-\varphi, \pi/2+\varphi]$, причем $g_1(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = -\varphi$ или $t = \pi/2+\varphi$.

3.3. Асимптотика вероятности положительности случайного блуждания с некоррелированными компонентами шага.

Пусть $\left\{\overline{S}_n\right\} = \left(S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(d)}\right)$ – случайное блуждание в $\mathbb{R}^d$ с шагами

$$\overline{X}_i = \left(X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(d)}\right),$$

$d \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{R}^d$ – конус, $\overline{x} \in K$, $\tau(\overline{x})$ – время выхода случайного блуждания с начальной точкой $\overline{x}$ из конуса K, то есть

$$\tau(\overline{x}) = \inf\left\{n \in \mathbb{N} \,:\, \overline{x} + \overline{S}_n \notin K\right\}. \tag{11}$$

Всюду ниже для натуральных n и векторов $\overline{x} \in K$ будем использовать обозначение

$$m_n(\overline{x}) := \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right). \tag{12}$$

В. Вахтель и Д. Денисов в работе [8] требуют выполнения двух групп условий.

Условия (G):

G1) конус K звездчатый (то есть существует такая точка $O \in K$, что для всякой точки $A \in K$ отрезок $[O, A]$ целиком лежит в множестве K) и имеет липшицеву границу;

G2) существует такой положительный параметр C_1, что для всякого вектора $\overline{x} \in K$ имеет место неравенство

$$u(\overline{x}) \le C_1 \left|\overline{x}\right|^{p-1} \operatorname{dist}\left(\overline{x}, \partial K\right); \tag{13}$$

G3) существует такой положительный параметр C_2, что для всякого вектора $\overline{x} \in K$ имеет место неравенство

$$u(\overline{x}) \ge C_2 |\overline{x}|^{p-1} \operatorname{dist}\left(\overline{x}, \partial K\right). \tag{14}$$

Условия (M):

M1) $\mathbf{E}X^{(i)} = 0$, $i = 1, \dots, d$;

M2) $\mathbf{E}\left(X^{(i)}\right)^2 = 1$, $i = 1, \dots, d$, и $\mathbf{E}X^{(i)}X^{(j)} = 0$ при $i \ne j$;

M3) $\mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^2 \ln\left(1 + \left|\overline{X}\right|\right) < \infty$. При этом, если $p > 2$, то $\mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^p < \infty$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2 (**Theorem 2**, [8]). *Пусть выполнены условия (G) и (M). Тогда функция*

$$\widehat{V}\left(\overline{x}\right) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}u\left(\overline{x} + \overline{S}_n\right) I\left\{\tau(\overline{x}) > n\right\}$$

корректно определена и для всякого вектора $\overline{x} \in K$ и каждого натурального n справедливо равенство

$$\widehat{V}\left(\overline{x}\right) = \mathbf{E}\widehat{V}\left(\overline{x} + \overline{S}_n\right) I\left\{\tau(\overline{x}) > n\right\}.$$

Более того, при $p \geq 1$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\widehat{V}(\overline{x}) \sim u(\overline{x}), \ \ \mathrm{dist}\left(\overline{x}, \partial K\right) \to \infty.$$

Теорема 3 (**Theorem 3**, [8])**.** *Пусть выполнены условия (G) и (M), $p \geq 1$. Тогда:*

1) *существуют такие положительное число C и вектор $\overline{x}_0 \in K$, что для всякого вектора $\overline{x} \in K$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right) \leq C\frac{u\left(\overline{x} + \overline{x}_0\right)}{n^{p/2}};$$

2) *равномерно по таким векторам $\overline{x} \in K$, что $|\overline{x}| \leq \sqrt{n}/\ln n$, имеет место асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right) \sim \frac{\varkappa\widehat{V}(\overline{x})}{n^{p/2}}, \ \ n \to \infty,$$

где $\varkappa$ – положительный параметр, не зависящий от $\overline{x}$.

Отметим, что условие **M**2 требует конечности дисперсий компонент шага блуждания, однако в теореме 1 мы это условие не накладываем, поскольку оно вытекает из условия **M**3. В дальнейшем нам потребуется еще одна группа условий, которая является переносом условий **M**1, **M**2, **M**3 на двумерное случайное блуждание с коррелированными компонентами. Пусть $\left\{\overline{S}_n\right\}$ – двумерное случайное блуждание, $\overline{X} = \left(X^{(1)}, X^{(2)}\right)$ – случайный вектор, имеющий то же распределение, что и шаг блуждания $\left\{\overline{S}_n\right\}$. Пусть также

$$\rho = \mathbf{corr}\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right), \quad p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}.$$

Будем говорить, что двумерное случайное блуждание $\left\{\overline{S}_n\right\}$ удовлетворяет условию (C), если его шаг удовлетворяет условиям **C**1, **C**2, **C**3:

C1) $\mathbf{E}X^{(1)} = \mathbf{E}X^{(2)} = 0$;
C2) $\mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^2 \ln\left(1 + \left|\overline{X}\right|\right) < \infty$;
C3) если $\rho < 0$, то $\mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^p < \infty$.

Отметим, что в предположениях теоремы 1 сопровождающее блуждание ПВПСС удовлетворяет условию (C).

3.4. Асимптотика вероятности положительности случайного блуждания с коррелированными компонентами шага. Пусть случайный вектор $\overline{X} = \left(X^{(1)}, X^{(2)}\right)$ – шаг двумерного случайного блуждания $\left\{\overline{S}_n\right\}$, причем $\mathbf{E}X^{(1)} = \mathbf{E}X^{(2)} = 0$; $\mathbf{E}\left(X^{(1)}\right)^2 = \sigma_1^2$; $\mathbf{E}\left(X^{(2)}\right)^2 = \sigma_2^2$; $\mathbf{corr}\left(X^{(1)}, X^{(2)}\right) = \rho \in (-1,1)$. В этом случае компоненты шага блуждания, вообще говоря, не являются некоррелированными. Однако, мы можем линейной заменой перейти к новому конусу и блужданию так, что для последнего уже будет выполнено условие M2. Положим

$$M := \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi/\sigma_1 & -\sin\varphi/\sigma_2 \\ -\sin\varphi/\sigma_1 & \cos\varphi/\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \sin 2\varphi = \rho. \tag{15}$$

Тогда вектор $M\overline{X}$ имеет единичную ковариационную матрицу. Следующая теорема получается применением теорем 2, 3 к преобразованному посредством матрицы M случайному блужданию.

Теорема 4. *Пусть $K = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, а двумерное случайное блуждание $\left\{\overline{S}_n\right\}$ удовлетворяет условию (C). Пусть $\tau(\overline{x})$ – время выхода случайного блуждания с начальной точкой $\overline{x}$ из конуса K, то есть случайная величина, определенная равенством (11). Тогда справедливы следующие соотношения.*

(1) Равномерно по таким векторам $\overline{x} \in K$, что $|\overline{x}| \le \sqrt{n}/\ln n$, выполнено асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right) \sim \frac{\varkappa V\left(M\overline{x}\right)}{n^{p/2}}, \ \ n \to \infty, \tag{16}$$

где $\varkappa$ – положительный параметр, который не зависит от $\overline{x}$.

(2) Существуют такие положительное число C и вектор $\overline{x}_0 \in MK$, что для всякого $\overline{x} \in K$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right) \le C\frac{u\left(M\overline{x} + \overline{x}_0\right)}{n^{p/2}}. \tag{17}$$

Здесь функция V при $\overline{x} \in K$ определяется равенством

$$V\left(M\overline{x}\right) := \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}u\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_n\right)\right) I\left\{\tau(\overline{x}) > n\right\}. \tag{18}$$

Кроме того:

- *для всякого вектора $\overline{x} \in K$ и для всякого натурального числа n*

$$V\left(M\overline{x}\right) = \mathbf{E}V\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_n\right)\right) I\left\{\tau(\overline{x}) > n\right\}; \tag{19}$$

- *имеет место асимптотическое соотношение*

$$V(M\overline{x}) \sim u(M\overline{x}), \ \ \mathrm{dist}\left(\overline{x}, \partial K\right) \to \infty. \tag{20}$$

Всюду ниже вектор $\overline{x}_0$ будет обозначать параметр из неравенства (17); K будет обозначать первый квадрант $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; $\tau(\overline{x})$ – время выхода случайного блуждания с начальной точкой $\overline{x}$ из первого квадранта K. Функции V и u соответствуют определенным в подразделе 3.3 функциям $\widehat{V}$ и u для конуса MK.

Следствие 1. *Если векторы $\overline{x}, \overline{y} \in K$ таковы, что $\overline{x} \leq \overline{y}$, то имеет место неравенство*

$$V\left(M\overline{x}\right) \leq V\left(M\overline{y}\right). \tag{21}$$

Доказательство. Заметим, что если $\overline{x} \leq \overline{y}$, то для каждого натурального n имеет место неравенство $m_n\left(\overline{x}\right) \leq m_n\left(\overline{y}\right)$, где функция m_n определена равенством (12). Отсюда, воспользовавшись асимптотическим соотношением (16), получим требуемое неравенство. □

Следствие 2. *Существует такой параметр C, что для всякого вектора $\overline{x} \in K$ выполнено неравенство*

$$V(M\overline{x}) \leq Cu(M\overline{x} + \overline{x}_0). \tag{22}$$

Доказательство теоремы 4. Положим $\varphi := 1/2 \arcsin \rho \in \left(-\pi/4, \pi/4\right)$. Нетрудно проверить, что образ MK конуса $K = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ при отображении M устроен так, как изображено на рисунке 1.

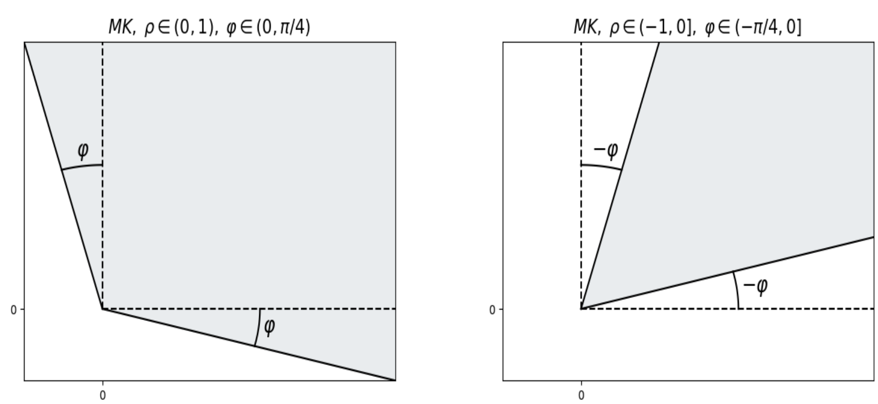

Рис. 1. Образ первой четверти про отображении M

Замечание 2. Принимая во внимание рисунок 1 и пример 1, получаем следующее представление для параметра p, определенного равенством (7):

$$p = \frac{\pi}{\arccos\left(-\rho\right)}.$$

В частности, в представляющем для нас наибольший интерес случае $\rho \in (0,1)$ параметр p принадлежит интервалу $(1,2)$.

Справедливость условия **G**1 для конуса MK ясна из рисунка 1. В примере 1 получены выражения для собственной функции оператора Лапласа-Бельтрами, соответствующей наименьшему собственному значению, и для параметра p. Явное выражение (10) для функции g_1 позволяет проверить выполнение условий **G**2 и **G**3 для конуса MK. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для всякого числа $\rho \in (-1,1)$ существуют такие положительные параметры C_1, C_2, что для всякого вектора $\overline{x} \in MK$ выполнены неравенства*

$$C_1 \mathrm{dist}\,(\overline{x}, \partial MK) \leq |\overline{x}|\, g_1\left(\frac{\overline{x}}{|\overline{x}|}\right) \leq C_2 \mathrm{dist}\,(\overline{x}, \partial MK)\,.$$

Доказательство утверждения 1. Запишем $\overline{x} \in MK$ в виде $r\,(\cos t, \sin t)$, где $t \in (-\varphi, \pi/2+\varphi)$, $r>0$, то есть t и r – полярный угол и радиус соответственно. Если $x_2 \leq x_1$, то выполнено равенство

$$\mathrm{dist}\,(\overline{x}, \partial MK) = r \sin\left(\varphi + t\right),$$

так как $\mathrm{dist}\,(\overline{x}, \partial MK)$ – длина катета, противолежащего углу величины $\varphi + t$ в прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины r. Если $\varphi \notin \{-\pi/4 + \pi/(8k),\ k \in \mathbb{N}\}$, то имеет место равенство

$$|\overline{x}|\, g_1\left(\frac{\overline{x}}{|\overline{x}|}\right) = r\frac{\sin\left(p(\varphi+t)\right)}{\cos p\varphi}.$$

Положим

$$h(t) := \frac{\sin\left(p(\varphi+t)\right)}{\sin\left(\varphi+t\right)\cos p\varphi}, \quad t \in (-\varphi, \pi/4).$$

Так как справедливы равенства

$$\lim_{t\to-\varphi+0} h(t) = \frac{p}{\cos\left(p\varphi\right)}, \quad \lim_{t\to\pi/4-0} h(t) = \frac{\sin\left(p(\pi/4+\varphi)\right)}{\sin\left(\pi/4+\varphi\right)\cos\left(p\varphi\right)} < \infty,$$

то доопределенная должным образом функция h непрерывна на $[-\varphi, \pi/4]$ и, следовательно, ограничена. Кроме того, так как $h(t) > 0$ при $t \in [-\varphi, \pi/4]$, то ограничивающую ее снизу константу можно взять положительной.

Рассмотрим случай $\varphi = -\pi/4 + \pi/(8k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|\overline{x}|\, g_1\left(\frac{\overline{x}}{|\overline{x}|}\right) = (-1)^k r \cos\left(4kt\right).$$

Имеют место равенства

$$\lim_{t\to-\varphi+0}\frac{(-1)^k\cos(4kt)}{\sin(\varphi+t)}=4k,$$
$$\lim_{t\to\pi/4-0}\frac{(-1)^k\cos(4kt)}{\sin(\varphi+t)}=\frac{1}{\sin(\varphi+\pi/4)}<\infty.$$

Таким образом, функция

$$h(t):=\frac{(-1)^k\cos(4kt)}{\sin(\varphi+t)}>0,\quad t\in(-\varphi,\pi/4)\,,$$

доопределенная в точках $-\varphi,\pi/4$ своими предельными значениями, ограничена и положительна на множестве $[-\varphi,\pi/4]$. Итак, мы показали, что при $x_2\le x_1$ найдутся требуемые параметры C_1, C_2. В силу симметрии (см. рисунок 1) требуемые константы найдутся и при $x_2>x_1$. □

Как следует из утверждения 1, для конуса MK выполнены условия **G**2 и **G**3. Таким образом, выполнена вся группа условий G. Для случайного блуждания $\left\{M\overline{S}_n\right\}$ условия **M**1 и **M**2 выполнены по определению матрицы M. Проверим выполнение условия **M**3.

Утверждение 2. *Если вектор $\overline{z}\in K$, то справедливы неравенства*

$$|M\overline{z}|\ge\frac{|\overline{z}|}{\|M^{-1}\|};\tag{23}$$
$$\operatorname{dist}(\overline{z},\partial K)\le\|M^{-1}\|\operatorname{dist}(M\overline{z},\partial MK)\,.\tag{24}$$

Доказательство утверждения 2. Неравенство (23) следует из определения операторной нормы. Более точно, для всякого $\overline{z}\in K$ справедливо неравенство $|M^{-1}M\overline{z}|\le\|M^{-1}\||M\overline{z}|$. Неравенство (24) также вытекает из определения операторной нормы:

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\overline{z},\partial K)&=\inf_{y\in\partial K}|\overline{z}-\overline{y}|=\inf_{y\in\partial K}\left|M^{-1}(M\overline{z}-M\overline{y})\right|\le\\&\le\|M^{-1}\|\inf_{y\in\partial K}|M\overline{z}-M\overline{y}|\ \le\|M^{-1}\|\operatorname{dist}(M\overline{z},M\partial K)=\\&=\|M^{-1}\|\operatorname{dist}(M\overline{z},\partial MK)\,.\end{aligned}$$

□

Утверждение 3. *Пусть $\overline{X}$ – двумерный случайный вектор. Тогда условия*

$$\mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^2\ln\left(1+\left|\overline{X}\right|\right)<\infty,\quad\mathbf{E}\left|M\overline{X}\right|^2\ln\left(1+\left|M\overline{X}\right|\right)<\infty$$

эквивалентны.

Доказательство утверждения 3. Утверждение немедленно вытекает из неравенства (23) и того факта, что при $a > 0$, $x \geq 0$ справедливы соотношения

$$\min\{a, 1\} \ln (1 + x) \leq \ln(1 + ax) \leq \max\{a, 1\} \ln(1 + x).$$

$\square$

Из утверждения 3 следует выполнение условия **M3** для случайного блуждания $\left\{M\overline{S}_n\right\}$. Итак, объединив теоремы 2, 3 и утверждения 1, 3, получим теорему 4. $\square$

В дальнейшем нам потребуется еще одна оценка для функции u.

Утверждение 4. *Для всякого вектора $\overline{y}$ из замыкания множества MK и всякого положительного числа δ существует такой параметр $C = C\left(\overline{y}, \delta\right)$, что для всякого $\overline{x} \in MK$ неравенство* $\operatorname{dist}\left(\overline{x}, \partial MK\right) > \delta$ *влечет неравенство*

$$u\left(\overline{x} + \overline{y}\right) \leq Cu\left(\overline{x}\right). \tag{25}$$

При этом параметр $C(\overline{y}, \delta)$ может быть выбран так, что

$$C(\overline{y}, \delta) = \widetilde{C} \left(1 + \|M\| \left\|M^{-1}\right\| \frac{|\overline{y}|}{\delta}\right)^{p-1} \left(1 + \frac{\operatorname{dist}\left(\overline{y}, \partial MK\right)}{\delta}\right) \leq$$
$$\leq \widetilde{C} \left(1 + \frac{\|M\|\|M^{-1}\|}{\delta}\right)^{p} \max\left(|\overline{y}|^p, 1\right),$$

где $\widetilde{C}$ не зависит ни от $\overline{y}$, ни от δ.

Доказательство. Зафиксируем $\overline{y} \in MK$ и $\delta > 0$. В силу неравенств (23), (24) при $\overline{z} \in MK$ справедлива оценка

$$\operatorname{dist}\left(\overline{z}, \partial MK\right) \leq \|M\|\|M^{-1}\| \, |\overline{z}| \,.$$

Отсюда в силу неравенств (13), (14) и предположения $\operatorname{dist}\left(\overline{x}, \partial MK\right) > \delta$ следуют соотношения

$$u\left(\overline{x} + \overline{y}\right) \leq C_1 \left|\overline{x} + \overline{y}\right|^{p-1} \operatorname{dist}\left(\overline{x} + \overline{y}, \partial MK\right) \leq$$
$$\leq C_1 |\overline{x}|^{p-1} \operatorname{dist}(\overline{x}, \partial MK) \left(1 + \|M\|\|M^{-1}\| \frac{|\overline{y}|}{\delta}\right)^{p-1} \left(1 + \frac{\operatorname{dist}(\overline{y}, \partial MK)}{\operatorname{dist}(\overline{x}, \partial MK)}\right) \leq$$
$$\leq \widetilde{C} \left(1 + \|M\|\|M^{-1}\| \frac{|\overline{y}|}{\delta}\right)^{p-1} \left(1 + \frac{\operatorname{dist}\left(\overline{y}, \partial MK\right)}{\delta}\right) u(\overline{x}) = C(\overline{y}, \delta) u(\overline{x}).$$

Таким образом, справедлива оценка

$$C\left(\overline{y}, \delta\right) \leq \widetilde{C} \left(1 + \|M\|\|M^{-1}\| \frac{|\overline{y}|}{\delta}\right)^{p} \leq \widetilde{C} \left(1 + \frac{\|M\|\|M^{-1}\|}{\delta}\right)^{p} \max\left(|\overline{y}|^p, 1\right).$$

Из непрерывности функций u и $C(\cdot, \delta)$ на замыкании множества MK следует справедливость неравенства (25) для всех $\overline{y}$ из замыкания множества MK. $\square$

4 Условная мера для двумерных блужданий, лежащих в первом квадранте

Для доказательства теоремы 1 важную роль играет возможность описывать вероятность невырождения процесса $\{\overline{Z}_n\}$ и траекторию сопровождающего блуждания при условии положительности последнего. Для этих целей в одномерном случае (то есть для ветвящегося процесса в случайной среде) используется так называемая $\mathbf{P}^+$ мера (см., например, книгу [10], глава 5.2) Отметим, что бóльшая часть настоящего раздела близка по содержанию к препринту [9].

Всюду ниже $K = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\overline{X}$ – случайный вектор, имеющий то же распределение, что и шаги двумерного случайного блуждания $\left\{\overline{S}_n\right\}$. Пусть существует функция $\varphi :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

H1. $\varphi\left(\overline{x}\right) > 0$ при $\overline{x} \in K$;
H2. $\varphi\left(\overline{x}\right) = 0$ при $\overline{x} \notin K$;
H3. $\mathbf{E}\,\varphi\left(\overline{x} + \overline{X}\right) = \mathbf{E}\,\varphi\left(\overline{x} + \overline{X}\right) I\{\overline{x} + \overline{X} \in K\} = \varphi\left(\overline{x}\right).$

Тогда для всякого числа $n \in \mathbb{N}$ и всякого вектора $\overline{x} \in K$ выражение

$$\mathbf{P}^+_{n,\mathbf{x}}(A) := \mathbf{E}\frac{\varphi\left(\overline{x} + \overline{S}_n\right)}{\varphi\left(\overline{x}\right)} I\{\overline{S}_j + \overline{x} > 0,\ j \leq n\} I_A$$

задает вероятностную меру на σ-алгебре

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left(\Pi_1^{(1)}, \Pi_1^{(2)}, \ldots, \Pi_n^{(1)}, \Pi_n^{(2)}\right),$$

где $\Pi_i^{(k)}$ при каждом натуральном i и каждом $k = 1, 2$ – последовательность случайных величин из определения среды $\boldsymbol{f}$ (см. равенство (1)). Система мер $\{\mathbf{P}^+_{n,\mathbf{x}}\}$ при фиксированном векторе $\overline{x} = \mathbf{x}$ согласована и, следовательно, может быть продолжена до некоторой меры $\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}$ на $\mathcal{F} = \sigma\left(\Pi_n^{(1)}, \Pi_n^{(2)};\ n \in \mathbb{N}\right)$.

Замечание 3. Из определения меры $\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}$ следует, что если событие A, принадлежащее σ-алгебре $\mathcal{F}_k$ при некотором k, таково, что $\mathbf{P}(A) = 0$, то $\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}(A) = 0$. Иными словами, мера $\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}$ является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathbf{P}$ на каждой из σ-алгебр $\mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Положим $\varphi(\overline{x}) := V(M\overline{x})I\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$, где $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, а функция V определяется выражением (18). При таком выборе φ условие **H**1 может нарушаться для некоторых векторов $\overline{x}$, поскольку $V(M\overline{x})$ может обращаться в ноль. Однако в силу соотношения (20) и положительности функции u условие **H**1 будет имеет место для всех векторов $\overline{x}$, достаточно удаленных от границы квадранта K. Мы будем определять меру $\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}$ только для векторов $\overline{x}$, лежащих в множестве

$$\mathcal{X}_V := \{\overline{y} \in K : V\left(M\overline{y}\right) \neq 0\}.$$

Докажем аналог леммы 5.2 из книги [10] для рассматриваемого нами двумерного случая.

Теорема 5. *Пусть $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$. Предположим, что для последовательности случайных величин $\{Y_k\}$ выполнены следующие условия:*

1) *случайная величина Y_k является $\mathcal{F}_k$-измеримой при всяком натуральном k;*
2) *последовательность $\{Y_n\}$ имеет предел Y_∞ п.н. по мере $\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}$;*
3) *существует такая положительная константа C, что $|Y_k| \leq C$ для всякого $k \in \mathbb{N}$.*

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(Y_n \mid \tau(\overline{x}) > n\right) = \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty.$$

Доказательство. Зафиксируем натуральные числа $n > k$ и вектор $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(Y_k | \tau\left(\overline{x}\right) > n\right) &= \frac{\mathbf{E} Y_k I\{\tau\left(\overline{x}\right) > n\}}{m_n\left(\overline{x}\right)} = \\ &= \frac{\mathbf{E}\left[Y_k I\{\tau\left(\overline{x}\right) > k\} \mathbf{E}\left(I\{\overline{S}_j + \overline{x} > 0,\, j \in (k, n]\} \mid \mathcal{F}_k\right)\right]}{m_n\left(\overline{x}\right)} = \\ &= \frac{\mathbf{E}\left[Y_k I\{\tau\left(\overline{x}\right) > k\} m_{n-k}\left(\overline{S}_k + \overline{x}\right)\right]}{m_n\left(\overline{x}\right)}.\end{aligned}$$

Перепишем асимптотическое соотношение (16) в терминах m_n:

$$m_n(\overline{x}) \sim \frac{\varkappa V\left(M\overline{x}\right)}{n^{p/2}}, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, на событии $\left\{\overline{S}_k + \overline{x} > 0\right\}$ имеет место поточечная сходимость:

$$\frac{m_{n-k}\left(\overline{S}_k + \overline{x}\right)}{m_n(\overline{x})} \to \frac{V\left(M\left(\overline{S}_k + \overline{x}\right)\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}, \quad n \to \infty.$$

Кроме того, в силу неравенств (9), (17), равномерной ограниченности последовательности $\{Y_k\}$ и асимптотического соотношения (16) имеем неравенства

$$\left|\frac{Y_k I\{\tau(\overline{x})>k\} m_{n-k}\left(\overline{S}_k+\overline{x}\right)}{m_n(\overline{x})}\right| \leq C\frac{m_{n-k}\left(\overline{S}_k+\overline{x}\right)}{m_n(\overline{x})} \leq$$
$$\leq C_1\frac{\left|M\left(\overline{S}_k+\overline{x}\right)+\overline{x}_0\right|^p}{V\left(M\overline{x}\right)}.$$

В силу неравенств треугольника и Минковского при всяком натуральном k имеет место оценка

$$\left(\mathbf{E}\left|M\left(\overline{S}_k+\overline{x}\right)+\overline{x}_0\right|^p\right)^{1/p} \leq \left(\mathbf{E}\left|M\overline{S}_k\right|^p\right)^{1/p}+|M\overline{x}|+|\overline{x}_0| \leq$$
$$\leq k\|M\|\left(\mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^p\right)^{1/p}+|M\overline{x}|+|\overline{x}_0|<\infty, \tag{26}$$

где $\overline{X}$ – случайный вектор, распределенный так же, как шаг блуждания $\left\{\overline{S}_n\right\}$. Таким образом, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(Y_k|\tau(\overline{x})>n\right)=\mathbf{E}Y_k\frac{V\left(M\left(\overline{S}_k+\overline{x}\right)\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}I\{\tau(\overline{x})>k\}=\mathbf{E}^+_{\mathbf{x}}Y_k. \tag{27}$$

Покажем, что для всякого $q\in(1,+\infty)$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathbf{E}\left(\left|Y_n-Y_k\right|I\{M\left(\overline{S}_n+\overline{x}\right)\in K_L\}\right|\tau(\overline{x})>qn\big)=0. \tag{28}$$

Введем обозначение $d(\overline{y}):=\operatorname{dist}(\overline{y},\partial MK)$ для векторов $\overline{y}\in MK$. В силу неравенства (25) и асимптотического соотношения (20) существует такое положительное число L, что неравенство $d(\overline{y})\geq L$ влечет оценку

$$\frac{u\left(\overline{y}+\overline{x}_0\right)}{V(\overline{y})} \leq \frac{C_2u(\overline{y})}{V(\overline{y})} \leq 2C_2=:C_3, \tag{29}$$

где параметр C_3 не зависит от вектора $\overline{y}$. Зафиксируем число L и введем обозначения $K_L:=\{\overline{y}\in MK:d(\overline{y})\geq L\}$, $U_L:=MK\backslash K_L$.

Для достаточно больших n в силу неравенства (17) и асимптотического соотношения (16) справедлива цепочка соотношений

$$\mathbf{E}\left(|Y_n - Y_k|\, I\left\{M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) \in K_L\right\}\Big|\, \tau(\overline{x}) > qn\right) =$$
$$= \frac{1}{m_{qn}(\overline{x})}\mathbf{E}\left[|Y_n - Y_k| m_{qn-n}(\overline{S}_n + \overline{x}) I\left\{\tau(\overline{x}) > n, M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) \in K_L\right\}\right] \le$$
$$\le C_4 \left(\frac{q}{q-1}\right)^{p/2} \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}}\left[|Y_n - Y_k|\, I\left\{M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) \in K_L\right\} \frac{u\left(M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) + \overline{x}_0\right)}{V\left(M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right)\right)}\right]. \tag{30}$$

В силу неравенства (29) на событии $\left\{M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) \in K_L\right\}$ справедлива оценка

$$\frac{u\left(M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) + \overline{x}_0\right)}{V\left(M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right)\right)} \le C_3.$$

Из последней оценки и соотношения (30) следует неравенство

$$\mathbf{E}\left(|Y_n - Y_k|\, I\{M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) \in K_L\}\Big|\, \tau(\overline{x}) > qn\right) \le C_3 C_4 \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}}\left|Y_n - Y_k\right|.$$

В силу равномерной ограниченности и сходимости п.н. по мере $\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}$ последовательности $\{Y_k\}$ получаем соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}}|Y_n - Y_k| = \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}}|Y_\infty - Y_k|, \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}}|Y_\infty - Y_k| = 0.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\varlimsup_{k\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(|Y_n - Y_k|\, I\{M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) \in K_L\}\Big|\, \tau(\overline{x}) > qn\right) \le$$
$$\le C_3 C_4 \varlimsup_{k\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}}|Y_n - Y_k| = 0.$$

Соотношение (28) доказано.

Покажем, что для всякого $q \in (1, +\infty)$ и всякого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left(|Y_n - Y_k|\, I\left\{M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) \in U_L\right\}\Big|\, \tau(\overline{x}) > qn\right) = 0. \tag{31}$$

Пусть $\overline{z} \in M^{-1}U_L$, тогда из неравенства (24) следует оценка $\mathrm{dist}(\overline{z}, \partial K) \le \|M^{-1}\|L$. Положим

$$T := \|M^{-1}\|L + 1, \quad D_L := \{\overline{z} \in K : \mathrm{dist}(\overline{z}, \partial K) < T\},$$
$$A_1 := \{\overline{z} \in K : z_1 \ge z_2\}, \quad A_2 := \overline{A_1}.$$

Таким образом, имеет место включение $M^{-1}U_L \subseteq D_L$. Так как последовательность $\{Y_k\}$ равномерно ограничена величиной C, то справедливо неравенство

$$\mathbf{E}\left(|Y_n - Y_k|\, I\{M\left(\overline{S}_n + \overline{x}\right) \in U_L, \tau(\overline{x}) > qn\}\right) \le$$
$$\le 2C\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > qn, \overline{S}_n + \overline{x} \in M^{-1}U_L\right). \tag{32}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > qn, \overline{S}_n + \overline{x} \in M^{-1}U_L\right) \le \int\limits_{D_L} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > qn, \overline{S}_n + \overline{x} \in d\overline{y}\right) =$$
$$= \int\limits_{D_L} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in d\overline{y}\right) \mathbf{P}\left(\tau(\overline{y}) > qn - n\right).$$

Разобьем последний интеграл на слагаемые, соответствующие областям интегрирования $D_L \cap A_i$, $i = 1, 2$. При $i = 1, 2$ имеют место оценки

$$\int\limits_{D_L \cap A_i} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in d\overline{y}\right) \mathbf{P}\left(\tau(\overline{y}) > qn - n\right) \le$$
$$\le \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in D_L \cap A_i\right) \mathbf{P}\left(S_j^{(3-i)} > -T, j \le qn - n\right) \le$$
$$\le \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right) \mathbf{P}\left(S_j^{(3-i)} > -T, j \le qn - n\right).$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (32), получаем, что имеет место соотношение

$$\mathbf{E}\left(|Y_n - Y_k|\, I\left\{M(\overline{S}_n + \overline{x}) \in U_L, \tau(\overline{x}) > qn\right\}\right) \le$$
$$\le 2C\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right) \sum_{i=1}^{2} \mathbf{P}\left(S_j^{(i)} > -T, j \le qn - n\right).$$

Таким образом, (31) вытекает из соотношений

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right)}{\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > qn\right)} = q^{p/2}, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(S_j^{(i)} > -T, j \le qn - n\right) = 0,\ i = 1, 2.$$

Из (28) и (31) получаем для всякого числа $q \in (1, +\infty)$ предельное соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\mathbf{E}\left(Y_n - Y_k \right| \tau(\overline{x}) > qn)\right| = 0. \tag{33}$$

Зафиксируем число $q > 1$, а также натуральные $k < n$. Дважды применив неравенство треугольника, получим оценку

$$\begin{aligned} & m_n(\overline{x}) \left|\mathbf{E}\left(Y_n \mid \tau(\overline{x}) > n\right) - \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right| \leq \\ & \leq \left|\mathbf{E} Y_n I\left\{\tau(\overline{x}) > qn\right\} - \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > qn\right) \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right| + \\ & + \left|\mathbf{E} Y_n I\{n < \tau(\overline{x}) \leq qn\}\right| + \mathbf{P}\left(n < \tau(\overline{x}) \leq qn\right) \left|\mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right|. \end{aligned} \tag{34}$$

Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left|\mathbf{E} Y_n I\left\{\tau(\overline{x}) > qn\right\} - \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > qn\right) \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right| \leq \\ & \leq m_{qn}(\overline{x}) \left|\mathbf{E}\left(Y_n - Y_k\right| \tau(\overline{x}) > qn)\right| + m_{qn}(\overline{x}) \left|\mathbf{E}\left(Y_k\right| \tau(\overline{x}) > qn) - \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right|. \end{aligned}$$

Отсюда, приняв во внимание пределы (27), (33), получаем, что

$$\begin{aligned} & \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{m_n(\overline{x})} \left|\mathbf{E} Y_n I\left\{\tau(\overline{x}) > qn\right\} - \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > qn\right) \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right| \leq \\ & \leq \lim_{k\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{m_{qn}(\overline{x})}{m_n(\overline{x})} \left|\mathbf{E}\left(Y_n - Y_k\right| \tau(\overline{x}) > qn)\right| + \\ & + \lim_{k\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{m_{qn}(\overline{x})}{m_n(\overline{x})} \left|\mathbf{E}\left(Y_k\right| \tau(\overline{x}) > qn) - \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right| = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m_n(\overline{x})} \left|\mathbf{E} Y_n I\left\{\tau(\overline{x}) > qn\right\} - \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > qn\right) \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right| = 0. \tag{35}$$

Имеют место неравенства

$$\left|\mathbf{E} Y_n I\{n < \tau(\overline{x}) \leq qn\}\right| \leq C\mathbf{P}\left(n < \tau(\overline{x}) \leq qn\right), \quad \left|\mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} Y_\infty\right| \leq 2C. \tag{36}$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left(n < \tau(\overline{x}) \leq qn\right)}{m_n(\overline{x})} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{m_{qn}(\overline{x})}{m_n(\overline{x})}\right) = 1 - q^{-p/2}.$$

Отсюда и из (34), (35), (36) следует, что для всякого числа $q > 1$ имеет место неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left|\mathbf{E}\left(Y_n \mid \tau(\overline{x}) > n\right) - \mathbf{E}^+_x Y_\infty\right| \leq 3C\left(1 - q^{-p/2}\right).$$

Переход в последнем неравенстве к пределу при $q \downarrow 1$ завершает доказательство теоремы 5. □

5 Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть числовые последовательности* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\delta_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$, $\{b_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ *таковы, что* $a_n = \delta_{n,m} + b_{n,m}$ *при всех натуральных* n, m. *Пусть также выполнены условия:*

1) $\delta_{n,m} \geq 0$, $b_{n,m} \geq 0$ *при всех натуральных* n *и* m*;*

2) $\varliminf\limits_{m\to\infty} \varlimsup\limits_{n\to\infty} \delta_{n,m} = 0$*;*

3) для всякого натурального m *существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} b_{n,m} =: b_m.$$

Тогда существуют, конечны и равны пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$, $\lim\limits_{m\to\infty} b_m$. *При этом если* $b_m > 0$ *для некоторого натурального* m, *то* $a > 0$.

Лемма 2. *Пусть* $\left\{\overline{Z}_n\right\}$ *– ПВПСС, сопровождающее блуждание которой удовлетворяет условию (C). Тогда для всякого положительного числа* ε *существует такое положительное число* T, *что при всех* $t > T$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0,\, \tau(\overline{t}) \leq n\right) \leq \frac{\varepsilon}{n^{p/2}},$$

где $\overline{t} = (t,t)$.

Лемма 3. *В условиях теоремы 1 для всякого вектора* $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$ *существует конечный положительный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0\, |\tau(\overline{x}) > n\right) =: \upsilon(\overline{x}).$$

Для удобства читателя доказательства лемм 1, 2, 3 вынесены в раздел 6, чтобы не загромождать линию доказательства основной теоремы техническими деталями.

Доказательство теоремы 1. Выберем диагональный вектор $\overline{t} = (t,t)$ столь большим, чтобы имело место неравенство $V\left(M\overline{t}\right) > 0$. Положим

$$\delta_n(\overline{t}) = n^{p/2}\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0, \tau(\overline{t}) \leq n\right);$$
$$b_n(\overline{t}) = \mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0 | \tau(\overline{t}) > n\right) \cdot n^{p/2}\mathbf{P}(\tau(\overline{t}) > n).$$

В силу леммы 2 для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой положительный параметр t_0, что для всякого $t > t_0$ имеет место неравенство $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \delta_n(\overline{t}) < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \delta_n(\overline{t}) = 0.$$

В силу асимптотического соотношения (16) и леммы 3 существует предел

$$\lim_{n\to\infty} b_n(\bar{t}) = \varkappa v(\bar{t}) V\left(M\bar{t}\right) =: b(\bar{t}).$$

Для достаточно больших t функция $b(\bar{t})$ положительна. Используя представление

$$n^{p/2}\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0\right) = \delta_n(\bar{t}) + b_n(\bar{t})$$

и лемму 1, заключаем, что существует конечный положительный предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{p/2}\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0\right).$$

Теорема 1 доказана. □

6 Вспомогательные утверждения

6.1. Доказательства лемм 1 и 2.

Доказательство леммы 1. Отметим, что верхний предел последовательности $\{a_n\}$ не может быть равен $+\infty$. Действительно, найдется такое натуральное число m, что $\overline{\lim}_{n\to\infty}\delta_{n,m} < +\infty$, тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \delta_{n,m} + \lim_{n\to\infty} b_{n,m} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \delta_{n,m} + b_m < +\infty.$$

Поскольку $\delta_{n,m} \ge 0$ при всех натуральных n и m, то для всякого натурального m имеем:

$$b_m \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n.$$

Отсюда следует, что верхний предел последовательности $\{b_m\}$ обязан быть конечным. Из последнего неравенства также следует, что если найдется такой номер m, что $b_m > 0$, то нижний предел последовательности $\{a_n\}$ положителен. Кроме того, имеют место соотношения:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\, b_m \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \le \underline{\lim}_{m\to\infty}\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \delta_{n,m} + \underline{\lim}_{m\to\infty}\, b_m = \underline{\lim}_{m\to\infty}\, b_m.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \overline{\lim_{m\to\infty}}\, b_m = \underline{\lim}_{m\to\infty}\, b_m.$$

□

Доказательство леммы 2. Нам потребуется следующее неравенство (см., например, [11], стр. 161)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(Z_n^{(i)} > 0\right) \le \exp\left(\min_{0\le j\le n} S_j^{(i)}\right), \quad i = 1, 2. \tag{37}$$

Таким образом, за слишком большой “спуск вниз” сопровождающего блуждания ПВПСС $\{Z_n\}$ “расплачивается” экспоненциально малой вероятностью невырождения при условии среды. Блужданию “невыгодно” спускаться и по первой, и по второй координате.

Зафиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и вектор $\overline{t} = (t,t) \in K$. Заметим, что система событий

$$\left\{\tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n,\ m \in \mathbb{N}\right\}$$

образует разбиение события $\left\{\tau(\overline{t}) \leq n\right\}$. Таким образом, имеет место представление

$$\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0,\ \tau(\overline{t}) \leq n\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0,\ \tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right). \tag{38}$$

В силу свойств условного математического ожидания для всякого $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0,\ \tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right) = \\
&= \mathbf{E}\mathbf{E}_{\mathbf{f}} I\left\{\overline{Z}_n > 0,\ \tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right\} = \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right) I\left\{\tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right\}\right].
\end{aligned}$$

В силу неравенства (37)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right) = \mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(Z_n^{(1)} > 0\right) \mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(Z_n^{(2)} > 0\right) \leq \exp\left(\min_{j\,\leq\,n} S_j^{(1)} + \min_{j\,\leq\,n} S_j^{(2)}\right).$$

Следовательно, для всякого натурального m справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0,\ \tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right) = \\
&= \mathbf{E}\left[\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right) I\left\{\tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right\}\right] \leq \\
&\leq \mathbf{E}\exp\left(\min_{j\,\leq\,n} S_j^{(1)} + \min_{j\,\leq\,n} S_j^{(2)}\right) I\left\{\tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right\} \leq \\
&\leq \exp(-mt)\mathbf{P}\left(\tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right) \leq \\
&\leq \exp(-mt)\mathbf{P}\left(\tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n\right).
\end{aligned}$$

Итак, имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0,\ \tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n,\ \tau\left(m\overline{t}\right) \leq n\right) \leq \\
&\leq \exp(-mt)\mathbf{P}\left(\tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n\right).
\end{aligned} \tag{39}$$

В силу неравенств (9) и (17) справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left(\tau\left((m+1)\,\overline{t}\right) > n\right) \leq C\frac{u\left((m+1)M\overline{t} + \overline{x}_0\right)}{n^{p/2}} \leq \widehat{C}\frac{(m+1)^p\,t^p}{n^{p/2}}. \tag{40}$$

Отметим, что функция $e^{-t}t^p$ монотонно убывает при $t > p$. Пусть $t \geq T > p$. Тогда для всякого натурального числа m

$$e^{-mt}t^p \leq e^{-mT}T^m.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (38) и неравенства (39), (40), выводим, что при $t \geq T > p$

$$\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0,\, \tau(\bar{t}) \leq n\right) \leq \widehat{C}\frac{T^p e^{-T}}{n^{p/2}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mT}\left(m+2\right)^p \leq$$

$$\leq \widehat{C}\frac{T^p e^{-T}}{n^{p/2}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mp}\left(m+2\right)^p.$$

Ряд в правой части неравенства сходится по признаку Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, выберем T столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\widehat{C}T^p \exp\left(-T\right) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mp}\left(m+2\right)^p < \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана. □

Замечание 4. Легко видеть, что в лемме 2 по существу не используется двумерность процесса $\left\{\overline{Z}_n\right\}$. Таким образом, доказательство остается без изменений для группы из N процессов в общей случайной среде (для произвольного натурального N), если считать, что матрица M такова, что $M\overline{X}$ имеет единичную матрицу ковариации, где $\overline{X}$ имеет то же распределение, что и шаг случайного сопровождающего блуждания.

6.2. Вспомогательные факты о случайных блужданиях. Доказательство леммы 3 значительно более сложно, чем доказательства лемм 1 и 2. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Утверждение 5. *Пусть* $\{S_n\}$ *– случайное блуждание с шагами* X_j, $\mathbf{E}X_j = 0$, $\mathbf{E}X_j^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty)$. *Тогда для всякого положительного* α *существует такой вещественный параметр* C, *что для всякого достаточно большого натурального* n *справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}\left(S_j < \alpha \ln n, j \leq n\right) \leq \frac{C \ln n}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство. См. книгу [10] (Lemma 4.4, стр. 81). □

Утверждение 6 (Неравенство концентрации). *Пусть $\{S_n\}$ – случайное блуждание с шагами, имеющими нулевое среднее и конечную отличную от нуля дисперсию. Тогда существует такое положительное число C, что для всякого положительного Δ найдется такой номер N, что при всех натуральных $n > N$ справедливо неравенство*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \mathbf{P}\left(S_n \in [x, x+\Delta)\right) \leq \frac{C\Delta}{\sqrt{n}}. \tag{41}$$

Доказательство. См., например, книгу [12] (глава 3, теорема 9, стр. 66). □

6.2.1. Нахождение блуждания вне большого квадрата. Целью настоящего подраздела является доказательство факта, заключающегося в том, что с большой вероятностью по мере $\mathbf{P}^+$ при больших номерах T сопровождающее блуждание $\overline{S}_T$ должно попасть в множество вида $\sqrt{T}D$, где D является отделенным от границы квадранта K достаточно большим компактом. Более точно, мы докажем следующую лемму, в которой, фактически, локализуем положение случайного блуждания при условии положительности.

Лемма 4. *Пусть случайное блуждание $\left\{\overline{S}_n\right\}$ удовлетворяет условию (C), компоненты шага блуждания имеют положительный коэффициент корреляции $\rho \in (0,1)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой квадрат $D = [\delta, A] \times [\delta, A]$, что для любого вектора $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$ имеет место неравенство*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \notin \sqrt{T}D\right) \leq \varepsilon \frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}. \tag{42}$$

Доказательство леммы 4. Доказательство предварим следующим утверждением.

Утверждение 7. *Существует такой вещественный параметр C, что для всех натуральных T и $\overline{x} \in K$ выполнено неравенство*

$$\mathbf{E}\left[\tau(\overline{x}) \wedge T\right] \leq C T^{1-p/2} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right). \tag{43}$$

Доказательство. Действительно, воспользовавшись неравенством (17), получим искомую оценку

$$\mathbf{E}\left[\tau(\overline{x}) \wedge T\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) \wedge T > k\right) = \sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > k\right) \leq$$

$$\leq 1 + Cu\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right) \sum_{k=1}^{T-1} \frac{1}{k^{p/2}} \leq \widehat{C} T^{1-p/2} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right).$$

□

Зафиксируем $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$. Положим при всех положительных $\delta < A$ и при всех натуральных T

$$F := \left\{\overline{z} \in K : |\overline{z}| \geq A\sqrt{T}\right\}, \quad D := [\delta, A] \times [\delta, A],$$
$$U := \left\{\overline{z} \in K : |\overline{z}| \leq A\sqrt{T}, \operatorname{dist}\left(\overline{z}, \partial K\right) < \delta\sqrt{T}\right\}.$$

Заметим, что имеет место включение $\mathbb{R}^2 \backslash \sqrt{T} D \subseteq F \cup U$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \notin \sqrt{T} D\right) \leq \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in U\right) + \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in F\right). \quad (44)$$

Отметим, что $\overline{S}_T + \overline{x} \leq \overline{A}\sqrt{T} = \sqrt{T}\,(A, A)$, если $\overline{S}_T + \overline{x} \in U$. Следовательно, имеет место оценка

$$V\left(M\overline{x}\right) \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in U\right) \leq V\left(\sqrt{T} M\overline{A}\right) \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > T, \overline{S}_T + \overline{x} \in U\right). \quad (45)$$

Не ограничивая общности будем считать, что $A > 1$. В силу неравенства (17) и асимптотического соотношения (16) справедлива цепочка неравенств

$$V\left(\sqrt{T} M\overline{A}\right) \leq C_1 u\left(\overline{x}_0 + \sqrt{T} M\overline{A}\right) \leq C_2 \left|R\overline{x}_0 + \sqrt{T} M\overline{A}\right|^p \leq$$

$$\leq C_2 \|M\| \left(2T\right)^{p/2} A^p \left|1 + \frac{\overline{x}_0}{\sqrt{T}\left|M\overline{A}\right|}\right|^p \leq$$

$$\leq C_3 T^{p/2} A^p \left|1 + \left\|M^{-1}\right\| \frac{\overline{x}_0}{\sqrt{2}}\right|^p = C_4 T^{p/2} A^p, \quad (46)$$

где параметр C_4 не зависит ни от T, ни от A. Положим

$$\Gamma_i := \left\{\overline{z} = (z_1, z_2) \in K : z_i \leq \delta\sqrt{T}\right\}, \quad i = 1, 2.$$

Фиксируем $i \in \{1,2\}$. Справедливы соотношения

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > T, \overline{S}_T + \overline{x} \in \Gamma_i\right) \leq$$

$$\leq \int\limits_{-x_1}^{+\infty}\int\limits_{-x_2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{S}_j + \overline{x} > 0,\ j \leq T/2,\ \overline{S}_{T/2} + \overline{x} \in d\overline{w}\right) \times$$

$$\times\, \mathbf{P}\left(\overline{S}_j + \overline{w} > 0, j \leq T/2, S_T^{(i)} + w_i \in \left(0, \delta\sqrt{T}\right)\right) \leq$$

$$\leq \int\limits_{-x_1}^{+\infty}\int\limits_{-x_2}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\overline{S}_j + \overline{x} > 0,\ j \leq T/2,\ \overline{S}_{T/2} + \overline{x} \in d\overline{w}\right) \times$$

$$\times\, \mathbf{P}\left(S_T^{(i)} + w_i \in \left(0, \delta\sqrt{T}\right)\right). \tag{47}$$

В силу неравенства концентрации (41) имеем оценку

$$\mathbf{P}\left(S_T^{(i)} + w_i \in \left(0, \delta\sqrt{T}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\left[\delta\sqrt{T}\right]+1} \mathbf{P}\left(S_T^{(i)} + w_i \in [k, k-1)\right) \leq$$

$$\leq C\frac{\delta\sqrt{T}+1}{\sqrt{T}} = C\delta + \frac{C}{\sqrt{T}}.$$

Отсюда, приняв во внимание неравенства (17) и (47), получаем соотношение

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > T, \overline{S}_T + \overline{x} \in \Gamma_i\right) \leq C_5\frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{T^{p/2}}\left(\delta + \frac{1}{\sqrt{T}}\right).$$

Отсюда и из неравенств (45), (46) имеем оценку

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\, \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in U\right) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{T\to\infty}} \sum_{i=1}^{2} \frac{V\left(\sqrt{T}M\overline{A}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > T, \overline{S}_T + \overline{x} \in \Gamma_i\right) \leq$$

$$\leq 2C_4C_5\frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}A^p\delta = C_6\frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}A^p\delta, \tag{48}$$

где константа C_6 не зависит ни от δ, ни от A.

Из неравенств (9) и (22) получаем соотношение

$$V\left(M\overline{x}\right)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in F\right) \leq$$

$$\leq C_2\mathbf{E}\left|\overline{x}_0 + M\left(\overline{S}_T + \overline{x}\right)\right|^p I\left\{\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_T + \overline{x} \in F\right\}.$$

При $\overline{S}_T + \overline{x} \in F$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\left|\overline{x}_0 + M\left(\overline{S}_T + \overline{x}\right)\right|^p &\le \|M\| \left|\overline{S}_T + \overline{x}\right|^p \left|\frac{\overline{x}_0}{\left|M\left(\overline{S}_T + \overline{x}\right)\right|} + 1\right|^p \le \\ &\le \|M\| \left|\overline{S}_T + \overline{x}\right|^p \left|\frac{\|M^{-1}\|\overline{x}_0}{A\sqrt{T}} + 1\right|^p \le \\ &\le C_7 \left|\overline{S}_T + \overline{x}\right|^p \le C_7 \left(A\sqrt{T}\right)^{p-2} \left|\overline{S}_T + \overline{x}\right|^2,\end{aligned}$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что $p < 2$. Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned}&V\left(M\overline{x}\right) \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in F\right) \le \\ &\le C_2 C_7 \left(A\sqrt{T}\right)^{p-2} \mathbf{E}\left|\overline{S}_T + \overline{x}\right|^2 I\left\{\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_T + \overline{x} \in F\right\} \le \\ &\le C_8 \left(A\sqrt{T}\right)^{p-2} \mathbf{E}\left|\overline{S}_{\tau(\overline{x})\wedge T} + \overline{x}\right|^2. \qquad (49)\end{aligned}$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\mathbf{E}\left(\left|\overline{S}_n + \overline{x}\right|^2 \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) = \left|\overline{S}_{n-1} + \overline{x}\right|^2 + \mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^2, \quad \mathcal{F}_n = \sigma\left(\overline{S}_j,\ j \le n\right).$$

Следовательно, последовательность $\{\chi_n(\overline{x}) = \left|\overline{S}_n + \overline{x}\right|^2 - n\mu\}_n$ – мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)$ при $\mu = \mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^2$. Кроме того, $\tau(\overline{x}) \wedge T$ – ограниченный марковский момент. Используя теорему об остановке мартингала, заключаем, что

$$\mathbf{E}\left|\overline{S}_{\tau(\overline{x})\wedge T} + \overline{x}\right|^2 = |\overline{x}|^2 + \mu\mathbf{E}\left[\tau(\overline{x}) \wedge T\right]. \qquad (50)$$

В силу утверждения 7 имеет место оценка

$$\mu\mathbf{E}\left[\tau(\overline{x}) \wedge T\right] \le C T^{1-p/2} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right).$$

Отсюда, вспоминая соотношения (49), (50), выводим, что

$$\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in F\right) \le C_9 |\overline{x}|^2 \frac{A^{p-2} T^{p/2-1}}{V\left(M\overline{x}\right)} + C_{10} A^{p-2} \frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in F\right) \le C_{10} A^{p-2} \frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}. \qquad (51)$$

Наконец, из неравенств (44), (48), (51) получаем оценку

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\overline{S}_T + \overline{x} \notin \sqrt{T} D\right) \le \\
&\le \overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\overline{S}_T + \overline{x} \in U\right) + \overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\overline{S}_T + \overline{x} \in F\right) \le \\
&\le \frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)} \left(C_6 A^p \delta + C_{10} A^{p-2}\right).
\end{aligned}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и такое число A, что $C_{10}A^{p-2} \le \varepsilon/2$. Существование такого A обеспечивается условием $p < 2$. Выберем такое положительное число δ, для которого $C_6 \delta A^{p-1} \le \varepsilon/2$. Тем самым, мы зафиксировали квадрат $D = [\delta, A] \times [\delta, A]$, причем сделали это так, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\overline{S}_T + \overline{x} \notin \sqrt{T} D\right) \le \varepsilon \frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}.$$

Лемма 4 доказана. □

6.2.2. Отделимость блуждания от границы квадранта.

Лемма 5. *Пусть случайное блуждание $\left\{\overline{S}_n\right\}$ удовлетворяет условию (C), пусть также $D \subset K$ – ограниченное измеримое множество, отделенное от границы конуса K, то есть $\delta := \operatorname{dist}(D, \partial K) > 0$. Тогда для всякого числа $s \in (0, 1/2)$ и всякого вектора $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$ выполнено соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \notin U_{T,s}\right) = 0,$$

где

$$U_{T,s} = \left\{\overline{x} \in K : \operatorname{dist}\left(\overline{x}, \partial K\right) > T^{1/2-s}\right\}. \tag{52}$$

Доказательство. Зафиксируем множество D, удовлетворяющее условиям леммы 5, а также $s \in (0, 1/2)$. В силу теоремы 5 для всякого натурального T справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \notin U_{T,s}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P} \left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D,\ \exists j \in (T, n] : \overline{S}_j + \overline{x} \notin U_{T,s} \,|\tau(\overline{x}) > n\right).
\end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n,\ \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D,\ \exists j \in (T, n] : \overline{S}_j + \overline{x} \notin U_{T,s}\right)}{m_n(\overline{x})} = 0.$$

Выберем T столь большим, чтобы было выполнено неравенство $\operatorname{dist}\left(\sqrt{T}D, \partial K\right) > T^{1/2-s}$. Используя свойства условного математического ожидания, имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n,\, \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D,\, \exists j \in (T, n] : \overline{S}_j + \overline{x} \notin U_{T,s}\right) = \\
&= \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n,\, \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D\right) - \\
&- \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n,\, \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in U_{T,s}, j \in (T, n]\right) = \\
&= \mathbf{E} I\{\tau(\overline{x}) > T\} I\{\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D\} \times \\
&\qquad\qquad \times \left(m_{n-T}\left(\overline{S}_T + \overline{x}\right) - m_{n-T}\left(\overline{S}_T + \overline{x} - \overline{w}_T\right)\right),
\end{aligned}$$

где $\overline{w}_T = T^{1/2-s}\overline{1}$, $\overline{1} := (1, 1)$, то есть $\overline{w}_T + K = U_{T,s}$.

Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} I\{\tau(\overline{x}) > T\} I\{\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D\} \frac{m_{n-T}\left(\overline{S}_T + \overline{x}\right)}{m_n(\overline{x})} = \\
&= \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} I\{\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D\}, \\
&\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} I\{\tau(\overline{x}) > T\} I\{\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D\} \frac{m_{n-T}\left(\overline{S}_T + \overline{x} - \overline{w}_T\right)}{m_n(\overline{x})} = \\
&= \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} I\{\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D\} \frac{V\left(M\left(\overline{S}_T + \overline{x} - \overline{w}_T\right)\right)}{V\left(M\left(\overline{S}_T + \overline{x}\right)\right)}.
\end{aligned}$$

Существование интегрируемых мажорант, обосновывающих последние равенства, немедленно вытекает из рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 5, см. неравенство (26). Таким образом, справедливо представление

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}^+_{\mathbf{x}}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \notin U_{T,s}\right) = \\
&= \mathbf{E}^+_{\mathbf{x}} I\{\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D\} \left(1 - \frac{V\left(M\left(\overline{S}_T + \overline{x} - \overline{w}_T\right)\right)}{V\left(M\left(\overline{S}_T + \overline{x}\right)\right)}\right). \qquad (53)
\end{aligned}$$

На событии $\left\{\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D\right\}$ из неравенств (23), (24) следуют соотношения

$$\left|M(\overline{S}_T+\overline{x})\right|\geq\frac{\left|\overline{S}_T+\overline{x}\right|}{\|M^{-1}\|}\geq\frac{\mathrm{dist}(\overline{S}_T+\overline{x},\partial K)}{\|M^{-1}\|}\geq\frac{\delta\sqrt{T}}{\|M^{-1}\|}\to\infty,\ \ T\to\infty,$$

$$\frac{|M\overline{w}_T|}{\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)\right|}\leq\frac{\|M^{-1}\|\|M\|\sqrt{2}\cdot T^{1/2-s}}{\delta\sqrt{T}}\leq\frac{\|M^{-1}\|\|M\|\sqrt{2}}{\delta T^s}\to 0,\ \ T\to\infty,$$

$$\mathrm{dist}\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right),\partial MK\right)\geq\frac{\delta\sqrt{T}-T^{1/2-s}}{\|M^{-1}\|}\to\infty,\ \ T\to\infty.$$

Отсюда, из равенства (8) и соотношения (20) выводим, что при $T\to\infty$

$$\frac{V\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)\right)}{V\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)\right)}\sim\frac{g_1\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)/|M(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T)|\right)}{g_1\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)/|M(\overline{S}_T+\overline{x})|\right)},\tag{54}$$

где функция g_1 задана равенством (10). При всех натуральных числах T и всех векторах $\overline{x}\in\mathcal{X}_V$ положим

$$\overline{A}_T\left(\overline{x}\right):=\frac{M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)}{\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)\right|},\quad \overline{B}_T\left(\overline{x}\right):=\frac{M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)}{\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)\right|}.$$

На событии $\left\{\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D\right\}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left|\overline{A}_T\left(\overline{x}\right)-\overline{B}_T\left(\overline{x}\right)\right|&\leq\frac{|M\overline{w}_T|}{\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)\right|}+\\ &+\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)\right|\left|\frac{1}{\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)\right|}-\frac{1}{\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)\right|}\right|\leq\\ &\leq\frac{2\left|M\overline{w}_T\right|}{\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)\right|}\leq\frac{2\sqrt{2}\,\|M\|\,\|M^{-1}\|\,T^{1/2-s}}{\delta\sqrt{T}-T^{1/2-s}},\end{aligned}\tag{55}$$

где правая часть стремится к нулю при $T\to\infty$.

Функция g_1 определена и непрерывна на множестве $\overline{\Sigma}$, где Σ – множество из определения 2 для $K=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. В силу того, что непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна, а также в силу оценки (55) и ее равномерности по $\overline{x}$, получаем, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такое T_0, что для всякого $T>T_0$ и всякого вектора $\overline{x}\in\mathcal{X}_V$ на событии $\left\{\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D\right\}$ имеет место неравенство:

$$\left|g_1\left(\overline{A}_T\left(\overline{x}\right)\right)-g_1\left(\overline{B}_T\left(\overline{x}\right)\right)\right|<\varepsilon.$$

Так как множество D ограничено, то будем считать, что D лежит в шаре радиуса r с центром в начале координат. Напомним, что функция g_1 обращается в ноль только на множестве $\partial\Sigma$ (см. замечание 1). При этом случайная величина $\overline{B}_T(\overline{x})$ отделена от границы $\partial\Sigma$. Действительно, для всякого вектора $\overline{x}$ на событии $\left\{\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D\right\}$ имеют место неравенства

$$\operatorname{dist}\left(\overline{B}_T(\overline{x}),\partial\Sigma\right)\geq\frac{\operatorname{dist}\left(\overline{S}_T+\overline{x},\partial K\right)}{\|M^{-1}\|\left|M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)\right|}\geq$$
$$\geq\frac{\delta\sqrt{T}}{\|M^{-1}\|\|M\|r\sqrt{T}}\geq\frac{\delta}{\|M^{-1}\|\|M\|r}>0.$$

Отделимость $\overline{B}_T$ от границы $\partial\Sigma$ означает, что существует число $\theta>0$, что для всякого вектора $\overline{x}$ справедлива оценка $g_1\left(\overline{B}_T(\overline{x})\right)>\theta>0$. Следовательно, для всякого $\varepsilon>0$ существует такое число T_0, что для $T>T_0$ и вектора $\overline{x}$ на событии $\left\{\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D\right\}$ имеет место неравенство

$$\left|1-\frac{g_1\left(\overline{A}_T(\overline{x})\right)}{g_1\left(\overline{B}_T(\overline{x})\right)}\right|<\varepsilon.$$

Таким образом, для $T>T_0$ на событии $\left\{\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D\right\}$ выполнены неравенства

$$\left|1-\frac{V\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)\right)}{V\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)\right)}\right|\leq\left|1-\frac{g_1\left(\overline{A}_T(\overline{x})\right)}{g_1\left(\overline{B}_T(\overline{x})\right)}\right|+\varepsilon\frac{g_1\left(\overline{A}_T(\overline{x})\right)}{g_1\left(\overline{B}_T(\overline{x})\right)}\leq$$
$$\leq\varepsilon+\varepsilon(1+\varepsilon)=2\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Отсюда, вспоминая представление (53), получаем оценку

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D,\exists j>T:\overline{S}_j+\overline{x}\notin U_{T,s}\right)\leq$$
$$\leq\mathbf{E}_{\mathbf{x}}^{+}I\{\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D\}\left|1-\frac{V\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}-\overline{w}_T\right)\right)}{V\left(M\left(\overline{S}_T+\overline{x}\right)\right)}\right|\leq$$
$$\leq\left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)\mathbf{E}_{\mathbf{x}}^{+}I\{\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D\}\leq2\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\varlimsup_{T\to\infty}\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T+\overline{x}\in\sqrt{T}D,\exists j>T:\overline{S}_j+\overline{x}\notin U_{T,s}\right)\leq2\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Для доказательства леммы 5 остается перейти в последнем соотношении к пределу при $\varepsilon\downarrow0$. $\square$

Утверждение 8. *Пусть случайное блуждание* $\{\overline{S}_n\}$ *удовлетворяет условию (C). Тогда для всякого* $\alpha > 0$ *существует такой положительный параметр* $C = C(\alpha)$*, что для всякого достаточно большого натурального* n *и всякого вектора* $\overline{x} \in K$ *выполнено неравенство*

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in K \backslash K_{n,\alpha}\right) \le \frac{C \ln^2 n}{n^{p/2+1}} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right), \qquad (56)$$

где

$$K_{n,\alpha} := \{\overline{z} \in K : \operatorname{dist}(\overline{z}, \partial K) > \alpha \ln n\}. \qquad (57)$$

Доказательство. Положим $A_1 = \{\overline{z} \in K : z_1 \le \alpha \ln n\}$, $A_2 = \{\overline{z} \in K : z_2 \le \alpha \ln n\}$. Зафиксируем $\overline{x} \in K$. Ясно, что

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in K \backslash K_{n,\alpha}\right) \le$$
$$\le \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in A_1\right) + \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in A_2\right).$$

Положим $V := (-\infty, \alpha \ln n) \times \mathbb{R}$. Заметим, что имеют место соотношения

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in A_1\right) =$$
$$= \int\limits_K \int\limits_V \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in A_1, \overline{S}_{[n/3]} + \overline{x} \in d\overline{u}, \overline{S}_n - \overline{S}_{n-[n/3]} \in d\overline{v}\right) \le$$
$$\le \int\limits_K \int\limits_{-\infty}^{\alpha \ln n} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > [n/3], \overline{S}_{[n/3]} + \overline{x} \in d\overline{u}\right) \times$$
$$\times \mathbf{P}\left(S^{(1)}_{n-2[n/3]} \in (-v_1 - u_1, -v_1 - u_1 + \alpha \ln n)\right) \times$$
$$\times \mathbf{P}\left(S^{(1)}_j > v_1 - \alpha \ln n, j \le [n/3], S^{(1)}_{[n/3]} \in dv_1\right) =: I. \qquad (58)$$

В силу неравенства концентрации (41) имеем

$$\mathbf{P}\left(S^{(1)}_{n-2[n/3]} \in (-v_1 - u_1, -v_1 - u_1 + \alpha \ln n)\right) \le \frac{C_1 \alpha \ln n}{\sqrt{n}},$$

где C_1 не зависит ни от u_1, ни от v_1. Отсюда вытекает неравенство

$$I \le \frac{C_1 \alpha \ln n}{\sqrt{n}} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > [n/3]\right) \mathbf{P}\left(S^{(1)}_j > S^{(1)}_{[n/3]} - \alpha \ln n, j \le [n/3]\right). \qquad (59)$$

Положим

$$\widetilde{S}_j = S^{(1)}_{[n/3]} - S^{(1)}_{[n/3]-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, [n/3].$$

В силу утверждения 5 справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left(S_j^{(1)} > S_{[n/3]}^{(1)} - \alpha \ln n, j \leq [n/3]\right) = \mathbf{P}\left(\widetilde{S}_j < \alpha \ln n, j \leq [n/3]\right) \leq \\ \leq \frac{C_2 \alpha \ln n}{\sqrt{n}}. \tag{60}$$

Приняв во внимание неравенство (17), из соотношений (58), (59) и (60) выводим оценку

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in A_1\right) \leq \frac{C \ln^2 n}{n^{p/2+1}} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right).$$

Проводя те же рассуждения для множества A_2, получаем требуемое. □

Лемма 6. *Пусть случайное блуждание* $\left\{\overline{S}_n\right\}$ *удовлетворяет условию (C), коэффициент корреляции компонент шага блуждания* ρ *лежит в интервале* $(0,1)$, $D \subset K$ *– ограниченное измеримое множество,* $\operatorname{dist}(D, \partial K) > 0$. *Тогда для всякого числа* $\alpha > 0$ *и всякого вектора* $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$ *справедливо равенство*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha}\right) = 0,$$

где множества $K_{j,\alpha}$ *при* $j \in \mathbb{N}$ *определены соотношением (57).*

Доказательство. Зафиксируем $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$ и множество D, удовлетворящее условиям леммы 6. Для $s \in (0, 1/2)$ и $T \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha}\right) \leq \\ \leq \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right) + \\ + \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \notin U_{T,s}\right),$$

где $U_{T,s}$ определено соотношением (52). Отсюда, воспользовавшись леммой 5, получаем, что

$$\varlimsup_{T\to\infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha}\right) \leq \\ \leq \varlimsup_{T\to\infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right).$$

Пусть $n > T$,

$$A_n = \left\{\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T} D,\ \exists j \in (T, n] : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right\}.$$

В силу теоремы 5 для $T \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right) = \\ = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(A_n | \, \tau(\overline{x}) > n\right).$$

Таким образом, для доказательства леммы достаточно проверить справедливость соотношения

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{n\to\infty} n^{p/2}\mathbf{P}\left(\{\tau(\overline{x}) > n\} \cap A_n\right) = 0.$$

Пусть $n > T$ – фиксированные натуральные числа. Ясно, что

$$\mathbf{P}\left(\{\tau(\overline{x}) > n\} \cap A_n\right) \leq \\ \leq \sum_{j=T}^{n-1} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n,\, \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in K \backslash K_{n,\alpha}\right). \tag{61}$$

Зафиксируем натуральное число $j \in [T, n-1]$. В силу свойств условного математического ожидания

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n,\, \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right) = \\ = \mathbf{E} m_{n-j}\left(\overline{S}_j + \overline{x}\right) I\left\{\tau(\overline{x}) > j,\, \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right\}. \tag{62}$$

Комбинируя неравенства (13) и (17), получаем оценку

$$m_{n-j}\left(\overline{S}_j + \overline{x}\right) \leq \\ \leq \frac{C_0}{(n-j)^{p/2}} \left|\overline{x}_0 + M\left(\overline{S}_j + \overline{x}\right)\right|^{p-1} \operatorname{dist}\left(\overline{x}_0 + M\left(\overline{S}_j + \overline{x}\right), \partial MK\right). \tag{63}$$

Отметим, что существуют такие положительные параметры C_1 и C_2, что при всех достаточно больших $T \in \mathbb{N}$ и $\overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}$, где $j \geq T$, справедливы оценки:

$$\left|\overline{x}_0 + M\left(\overline{S}_j + \overline{x}\right)\right|^{p-1} \leq C_1 \left|\overline{S}_j + \overline{x}\right|^{p-1}, \\ \operatorname{dist}\left(\overline{x}_0 + M\left(\overline{S}_j + \overline{x}\right), \partial MK\right) \leq C_2 \operatorname{dist}\left(\overline{S}_j + \overline{x}, \partial K\right) \leq \alpha C_2 \ln j.$$

Отсюда и из (62), принимая во внимание неравенство (63), выводим, что

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n,\, \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in K\backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right) \leq$$
$$\leq \frac{C \ln j}{(n-j)^{p/2}} \mathbf{E}\left|\overline{S}_j + \overline{x}\right|^{p-1} I\left\{\tau(\overline{x}) > j,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in K\backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right\} =:$$
$$=: \frac{C \ln j}{(n-j)^{p/2}} E_j. \tag{64}$$

Выберем положительное число h таким образом, чтобы было выполнено двойное неравенство

$$\frac{2-p/2}{3-p} < h < \frac{p/2}{p-1}. \tag{65}$$

Существование такого h вытекает из условия $p \in (1,2)$. Имеет место равенство

$$E_j = \mathbf{E}\left|\overline{S}_j + \overline{x}\right|^{p-1} I\left\{\tau(\overline{x}) > j,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in K\backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}, \left|\overline{S}_j + \overline{x}\right| < j^h\right\} +$$
$$+ \mathbf{E}\left|\overline{S}_j + \overline{x}\right|^{p-1} I\left\{\tau(\overline{x}) > j,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in K\backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}, \left|\overline{S}_j + \overline{x}\right| \geq j^h\right\} =:$$
$$=: E_{j,1} + E_{j,2}.$$

В силу неравенства (56)

$$E_{j,1} \leq j^{h(p-1)} \mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > j, \overline{S}_j + \overline{x} \in K\backslash K_{j,\alpha}\right) \leq$$
$$\leq C_3 (\ln j)^2 \cdot j^{h(p-1)-p/2-1} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right).$$

Из второго неравенства в (65) вытекает соотношение $h(p-1)-p/2-1 < -1$. Поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что

$$\ln j \cdot E_{j,1} \leq \frac{C_4 u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{j^{1+\delta_1}} \tag{66}$$

для всех достаточно больших натуральных j. Также верна оценка

$$E_{j,2} \leq j^{h(p-3)} \mathbf{E}\left|\overline{S}_j + \overline{x}\right|^2 I\left\{\tau(\overline{x}) > j\right\} \leq j^{h(p-3)} \mathbf{E}\left|\overline{x} + \overline{S}_{\tau(\overline{x}) \wedge j}\right|^2. \tag{67}$$

При фиксированном векторе $\overline{x} \in K$ для всех j из (50) и (43) выводим соотношения

$$\mathbf{E}\left|\overline{x} + \overline{S}_{\tau(\overline{x}) \wedge j}\right|^2 = \left|\overline{x}\right|^2 + \mathbf{E}\left|\overline{X}\right|^2 \mathbf{E}\left[\tau(\overline{x}) \wedge j\right] \leq$$
$$\leq \left|\overline{x}\right|^2 + C_5 j^{1-p/2} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right) \leq C_6 j^{1-p/2} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right).$$

Отсюда и из неравенства (67) для достаточно больших j получаем оценку

$$E_{j,2} \leq C_7 j^{h(p-3)+1-p/2} u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right).$$

Приняв во внимание неравенство $h(p-3)+1-p/2 < -1$, заключаем, что существует такое положительное число δ_2, что

$$\ln j \cdot E_{j,2} \le \frac{C_8 u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{j^{1+\delta_2}} \tag{68}$$

при всех достаточно больших j. Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Из (66) и (68) получаем, что

$$\ln j \cdot E_j \le \frac{C}{j^{1+\delta}} \tag{69}$$

для достаточно больших j. Если T выбрано достаточно большим, то при всех натуральных $j \in [T, n-1]$ из соотношений (64) и (69) получаем неравенство

$$\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n,\, \overline{S}_T + \overline{x} \in \sqrt{T}D,\, \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}\right) \le \frac{\widetilde{C}}{j^{1+\delta}(n-j)^{p/2}},$$

где $\widetilde{C}$ не зависит ни от n, ни от j. Отсюда, приняв во внимание (61), заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\varlimsup_{T\to\infty} \lim_{n\to\infty} n^{p/2}\mathbf{P}\left(\{\tau(\overline{x}) > n\} \cap A_n\right) \le \\
&\le \varlimsup_{T\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} n^{p/2}\widetilde{C}\sum_{j=T}^{n-1} \frac{1}{j^{1+\delta}(n-j)^{p/2}} + \\
&+ \varlimsup_{T\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} n^{p/2}\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in K \backslash K_{n,\alpha}\right).
\end{aligned}$$

В силу неравенства (56)

$$\lim_{n\to\infty} n^{p/2}\mathbf{P}\left(\tau(\overline{x}) > n, \overline{S}_n + \overline{x} \in K \backslash K_{n,\alpha}\right) = 0.$$

Заметим, что справедливы оценки

$$n^{p/2}\sum_{j=T}^{n/2-1} \frac{1}{j^{1+\delta}(n-j)^{p/2}} \le 2^{p/2}\sum_{j=T}^{n/2-1}\frac{1}{j^{1+\delta}} \le 2^{p/2}\sum_{j=T}^{+\infty}\frac{1}{j^{1+\delta}}; \tag{70}$$

$$n^{p/2}\sum_{j=n/2}^{n-1} \frac{1}{j^{1+\delta}(n-j)^{p/2}} \le 2^{1+\delta}n^{p/2-1-\delta}\sum_{j=1}^{n/2}\frac{1}{j^{p/2}} \le \widehat{C}n^{p/2-1-\delta+1-p/2} \le \frac{\widehat{C}}{n^{\delta}}. \tag{71}$$

Остается заметить, что правая часть неравенства (70) стремится к нулю при $T \to \infty$, а правая часть неравенства (71) стремится к нулю при $n \to \infty$. Лемма 6 доказана. $\square$

Следствие 3. *Пусть случайное блуждание* $\left\{\overline{S}_n\right\}$ *удовлетворяет условию (C), коэффициент корреляции компонент шага блуждания* ρ *лежит в интервале* $(0,1)$*. Тогда для всякого вектора* $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$ *и для всякого положительного числа* α *справедливо равенство*

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha}\right) = 0,$$

где

$$K_{j,\alpha} = \left\{\overline{x} \in K : \operatorname{dist}\left(\overline{x}, \partial K\right) > \alpha \ln j\right\}.$$

Доказательство. Фиксируем положительное число ε и вектор $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$. Найдем такой квадрат D, что выполнено неравенство (42). В силу леммы 6 имеем соотношение

$$\varlimsup_{T\to\infty} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha}\right) \le \varlimsup_{T\to\infty} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\overline{S}_T + \overline{x} \notin \sqrt{T} D\right) \le$$
$$\le \varepsilon \frac{u\left(\overline{x}_0 + M\overline{x}\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, получаем равенство

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} \left(\exists j > T : \overline{S}_j + \overline{x} \in K \backslash K_{j,\alpha}\right) = 0.$$

□

Следствие 4. *Пусть случайное блуждание* $\left\{\overline{S}_n\right\}$ *удовлетворяет условию (C), коэффициент корреляции компонент шага блуждания* ρ *лежит в интервале* $(0,1)$*. Тогда для всякого вектора* $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$ *имеет место сходимость*

$$\lim_{n\to\infty} S^{(i)}_n = +\infty, \quad \mathbf{P}^+_{\mathbf{x}} - \textit{п.н.}, i = 1, 2.$$

6.3. Доказательство леммы 3. В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение, связывающее вероятность невырождения ветвящегося процесса при фиксированной среде с сопровождающим блужданием и случайными величинами $\xi^{(\cdot)}_{\cdot}$, определенными соотношением (4).

Утверждение 9. *Пусть* $\left\{\overline{Z}_n\right\}$ *– группа из* N *ветвящихся процессов в общей случайной среде,* $\left\{\overline{S}_n\right\}$ *– ее сопровождающее блуждание, тогда для каждого* $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$*:*

- *справедливо представление*

$$\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(Z^{(i)}_n > 0\right) = $$
$$= \left(\exp\left(-S^{(i)}_n\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(-S^{(i)}_k\right) g^{(i)}_k \left(f^{(i)}_{k+2,n}(0)\right)\right)^{-1}, \quad (72)$$

где

$$f_{k,n}^{(i)}(t) := f_k^{(i)} \circ f_{k+1}^{(i)} \circ \ldots \circ f_n^{(i)}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad f_{n+1,n}^{(i)}(t) := t,$$

$$g_k^{(i)}(t) := \frac{1}{1 - f_{k+1}^{(i)}(t)} - \frac{1}{\left(f_{k+1}^{(i)}\right)'(1) \cdot (1-t)}, \quad t \in [0, 1),$$

$f_\cdot^{(\cdot)}$ *– производящие функции из определения случайной среды (см. (1));*

- *имеет место неравенство*

$$\mathbf{P_f}\left(Z_n^{(i)} > 0\right) \geq \left(\exp\left(-S_n^{(i)}\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^{(i)} \exp\left(-S_k^{(i)}\right)\right)^{-1}, \quad (73)$$

где $\xi_\cdot^{(\cdot)}$ *определяются соотношением (4).*

Доказательство. См. лемму 19.5, [11]. □

Для того, чтобы доказать лемму 3, нам потребуется следующая техническая лемма, показывающая, что для достаточно большого β с вероятностью 1 по мере $\mathbf{P}^+$ произойдет лишь конечное число событий $\{\xi_k^{(\cdot)} > k^\beta\}, k \in \mathbb{N}$. Всюду ниже буквой q будем обозначать параметр из теоремы 1, то есть такое положительное число, что

$$\mathbf{E}\left(\xi_0^{(1)}\right)^q < \infty, \quad \mathbf{E}\left(\xi_0^{(2)}\right)^q < \infty.$$

Лемма 7. *В условиях теоремы 1 для всякого числа* $\beta > 2/(q(2-p))$ *и всякого вектора* $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+\left(\xi_k^{(i)} > k^\beta\right) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Зафиксируем вектор $\overline{x} \in \mathcal{X}_V$, $k \in \mathbb{N}$ и индекс $i \in \{1, 2\}$. Для того, чтобы не загромождать обозначения, будем опускать верхний индекс у случайных величин $\xi_k^{(i)}$. Согласно определению меры $\mathbf{P}^+$ имеем равенство:

$$V\left(M\overline{x}\right)\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+\left(\xi_k > k^\beta\right) = \mathbf{E}V\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_{k+1}\right)\right) I\{\tau(\overline{x}) > k+1\} I\{\xi_k > k^\beta\}. \quad (74)$$

Для вектора $\overline{w} = (w_1, w_2)$ положим $\overline{w}^+ = (w_1 I\{w_1 \geq 0\}, w_2 I\{w_2 \geq 0\})$. В силу соотношений (21), (22) на событии $\{\tau(\overline{x}) > k+1\}$ справедлива цепочка оценок

$$V\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_{k+1}\right)\right) \leq V\left(M(\overline{x} + \overline{S}_k) + \left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right) \leq$$
$$\leq Cu\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0 + \left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right). \quad (75)$$

Отметим, что для $\overline{z}_1, \overline{z}_2 \in MK$ выполнено неравенство $\mathrm{dist}(\overline{z}_1 + \overline{z}_2, \partial MK) \geq \mathrm{dist}(\overline{z}_i, \partial MK)$, $i = 1, 2$. Таким образом, если $\overline{x} + \overline{S}_k \in K$, то

$$\mathrm{dist}\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0, \partial MK\right) \geq \mathrm{dist}(\overline{x}_0, \partial MK) > 0.$$

Воспользовавшись неравенством (25) для переменных $M(\overline{x} + \overline{S}_k) + \overline{x}_0$ и $\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+$, получим оценку

$$\begin{aligned} &u\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0 + \left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right) \leq \\ &\leq C_1 \max\left(\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right|^p, 1\right) u\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0\right). \end{aligned}$$

Отсюда, из равенства (74) и неравенства (75) следует, что

$$\begin{aligned} &V\left(M\overline{x}\right) \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+\left(\xi_k > k^\beta\right) \leq \\ &\leq CC_1 \mathbf{E} u\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0\right) I\{\tau(\overline{x}) > k+1\} \times \\ &\qquad \times \max\left(\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right|^p, 1\right) I\{\xi_k > k^\beta\} \leq \\ &\leq CC_1 \mathbf{E} u\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0\right) I\{\tau(\overline{x}) > k\} \times \\ &\qquad \times \mathbf{E} \max\left(\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right|^p, 1\right) I\{\xi_k > k^\beta\}. \end{aligned} \tag{76}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{k\to\infty}} \mathbf{E} u\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0\right) I\left\{\tau(\overline{x}) > k\right\} \leq \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \mathbf{E} u\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0\right) I\left\{\tau\left(\overline{x} + M^{-1}\overline{x}_0\right) > k\right\} = V(M\overline{x} + \overline{x}_0), \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из соотношения (18). Отсюда заключаем, что существует такое число C_2, что

$$\mathbf{E} u\left(M\left(\overline{x} + \overline{S}_k\right) + \overline{x}_0\right) I\left\{\tau(\overline{x}) > k\right\} \leq C_2 V(M\overline{x} + \overline{x}_0) \tag{77}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Для второго множителя в правой части соотношения (76) имеем неравенство

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \max\left(\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right|^p, 1\right) I\{\xi_k > k^\beta\} \leq \\ &\leq \mathbf{P}(\xi_k > k^\beta) + \mathbf{E}\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right|^p I\{\xi_k > k^\beta\}. \end{aligned}$$

Применив неравенство Гельдера с показателями $2/p$ и $2/(2-p)$, получим

$$\mathbf{E}\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right|^p I\{\xi_k > k^\beta\} \leq \left(\mathbf{E}\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^+\right|^2\right)^{p/2} \cdot \left(\mathbf{P}\left(\xi_k > k^\beta\right)\right)^{(2-p)/2}.$$

При этом

$$\mathbf{E}\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^{+}\right|^{2} \le \mathbf{E}\left|M\overline{X}_{k+1}\right|^{2} < \infty.$$

В силу неравенства Маркова

$$\mathbf{P}\left(\xi_k > k^{\beta}\right) \le \frac{\mathbf{E}\xi^{q}}{k^{\beta q}}.$$

Отсюда выводим, что

$$\mathbf{E}\max\left(\left|\left(M\overline{X}_{k+1}\right)^{+}\right|^{p}, 1\right) I\{\xi_k > k^{\beta}\} \le \frac{\mathbf{E}\xi^{q}}{k^{\beta q}} + C_3\left(\frac{1}{k^{\beta q}}\right)^{(2-p)/2} \le \frac{C_4}{k^{1+\varepsilon}} \tag{78}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Из неравенства (76), приняв во внимание соотношения (77), (78), получаем при всех натуральных k следующую оценку:

$$\mathbf{P}^{+}_{\mathbf{x}}\left(\xi_k > k^{\beta}\right) \le CC_1C_2C_4\frac{V\left(M\overline{x} + \overline{x}_0\right)}{V\left(M\overline{x}\right)}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{C(\overline{x})}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Суммирование последнего неравества по всем натуральным k завершает доказательство леммы 7. □

Наконец, мы готовы привести доказательство леммы 3.

Доказательство леммы 3. Зафиксируем $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_V$. В силу представления (72) случайная величина $\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right)$ является $\mathcal{F}_n$-измеримой. Последовательность $\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right)\right\}$ является монотонной и ограниченной, следовательно, $\left\{\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right)\right\}$ сходится $\mathbf{P}^{+}_{\mathbf{x}}$-п.н.. В силу теоремы 5 существует предел

$$\begin{aligned}\upsilon(\overline{x}) := \lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\overline{Z}_n > 0\,|\tau(\overline{x}) > n\right) = \lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left(\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right)\middle|\,\tau(\overline{x}) > n\right) = \\ = \mathbf{E}^{+}_{\mathbf{x}}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right).\end{aligned}$$

Остается проверить положительность предельной функции υ в точке $\overline{x}$. Зафиксируем числа $\beta = 1 + 2/(q(2-p))$ и $\alpha = 2 + \beta$. При целых неотрицательных T и вещественных u и w положим

$$A_T := \left\{\xi^{(i)}_k \le u, \exp\left(-S^{(i)}_k\right) \le w,\ i = 1, 2,\ k = 0, \dots, T-1\right\},$$

$$B_T := \left\{\xi^{(i)}_k \le k^{\beta},\ k \ge T,\ i = 1, 2\right\}, \quad G_T := \left\{\overline{S}_j + \overline{x} \in K_{j,\alpha},\ j \ge T\right\},$$

$$K_{j,\alpha} := \left\{\overline{z} \in K : \mathrm{dist}\left(\overline{z}, \partial K\right) > \alpha \ln j\right\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(A_T \cap B_T \cap G_T\right)= \\ &=\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(A_T\right)-\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(A_T \cap \overline{B}_T\right)-\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(A_T \cap B_T \cap \overline{G}_T\right) \geq \\ &\geq \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}(A_T)-\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{B}_T\right)-\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{G}_T\right). \end{aligned} \tag{79}$$

Выберем число $\varepsilon \in (0,1/3)$. В силу следствия 3 из леммы 6 можем найти такое T_1, что для всякого $T > T_1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{G}_T\right)=\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\exists j \geq T : \overline{S}_j+\overline{t} \in K \backslash K_{j,\alpha}\right) \leq \varepsilon. \tag{80}$$

В силу леммы 7

$$\sum_k \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\xi_k^{(i)} > k^{\beta}\right) < \infty, \quad i=1,2.$$

Отсюда вытекает существование такого T_2, что

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\overline{B}_T\right) \leq \sum_{k=T}^{\infty}\sum_{i=1}^{2}\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(\xi_k^{(i)} > k^{\beta}\right) < \varepsilon \tag{81}$$

для любого $T > T_2$. Зафиксируем $T > \max\left(T_1, T_2\right)$. Выберем такие u и w, для которых

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}(A_T) \geq 1-\varepsilon. \tag{82}$$

Наконец, из соотношения (79), приняв во внимание неравенства (80), (81), (82), получим оценку

$$\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^{+}\left(A_T \cap B_T \cap G_T\right) \geq 1-3\varepsilon > 0.$$

В силу неравенства (73) и следствия 4 из леммы 6 имеем

$$\begin{aligned}&\upsilon(\overline{x})=\mathbf{E}_{\mathbf{x}}^{+}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_{\mathbf{f}}\left(\overline{Z}_n > 0\right) \geq \\ &\geq \mathbf{E}_{\mathbf{x}}^{+}\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{2}\left(\exp\left(-S_n^{(i)}\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^{(i)}\exp\left(-S_k^{(i)}\right)\right)^{-1}=\mathbf{E}_{\mathbf{x}}^{+}\zeta^{(1)}\zeta^{(2)}, \\ &\qquad \zeta^{(i)}:=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k^{(i)}\exp\left(-S_k^{(i)}\right)\right)^{-1}, \quad i=1,2.\end{aligned}$$

Отметим, что при $i=1,2$ имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\zeta^{(i)} I\left\{A_T \cap B_T \cap G_T\right\} &\geq \left(ulT+\sum_{k=T}^{\infty}\frac{e^{x_i}}{k^{\alpha-\beta}}\right)^{-1} I\left\{A_T \cap B_T \cap G_T\right\} \geq \\ &\geq \left(ulT+2e^{x_i}\right)^{-1} I\left\{A_T \cap B_T \cap G_T\right\}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку

$$\upsilon(\overline{x}) \geq \mathbf{E}^{+}_{\mathbf{x}}\zeta^{(1)}\zeta^{(2)} \geq \frac{1}{(ulT + 2e^{x_1})\,(ulT + 2e^{x_2})}\mathbf{P}^{+}_{\mathbf{x}}\left(A_T \cap B_T \cap G_T\right) > 0,$$

которая завершает доказательство леммы 3. □

7 Заключительные замечания

Пользуюсь возможностью выразить благодарность А.В. Шкляеву за всестороннюю поддержку работы, советы и замечания и профессору В.А. Ватутину, чьи замечания способствовали значительному улучшению текста статьи.

References

[1] W. Smith, W. Wilkinson, *On branching processes in random environments*, The Annals of Mathematical Statistics, 814–827, 1969.

[2] A. Agresti, *On the extinction times of varying and random environment branching processes*, Journal of Applied Probability, 12(1):39–46, 1975.

[3] V.A. Vatutin, E.E. Dyakonova, *Multitype branching processes in random environment*, Russian Math. Surveys, 76:6 (2021), 1019–1063.

[4] M.V. Kozlov, *On the Asymptotic Behavior of the Probability of Non-Extinction for Critical Branching Processes in a Random Environment*, Theory Probab. Appl., 21:4 (1977), 791–804.

[5] J. Geiger, G. Kersting, *The survival probability of a critical branching process in random environment*, Theory Probab. Appl., 45:3 (2001), 517–525.

[6] V.I. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting, V.A. Vatutin, *Criticality for branching processes in random environment*, The Annals of Probability, 33:2(2005), 645-673.

[7] D.Denisov, V. Wachtel, *Random walks in cones*, The Annals of Probability, 43:3(2015): 992-1044.

[8] D.Denisov, V. Wachtel, *Random walks in cones revisited* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist, 60:1(2024), 126-166.

[9] N. Elizarov, V. Wachtel, *Co-existence of branching populations in random environment*, 2025.

[10] G. Kersting, V.Vatutin, *Discrete time branching processes in random environment*, John Wiley & Sons, 2017.

[11] V.I. Afanasyev, *Random walks and branching processes*, Lect. courses NOTS, 6, MIAN, 2007, 3–187.

[12] V.V. Petrov, *Sums of Independent Random Variables*, Springer Science & Business Media, 2012.

Dmitrii Andreevich Arapov
Lomonosov Moscow State University,
Leninskiye Gory, 1,
119991, Moscow, Russian Federation
Email address: dmitrii.arapov@math.msu.ru