

О НЕВЫРЖДЕНИИ ПАРАМЕТРА ВЕТВЛЕНИЯ
ПРОЦЕССОВ В ОБЩЕЙ СЛУЧАЙНОЙ
СРЕДЕД.А. АРАПОВ 

ПРЕДСТАВЛЕНО X

Abstract: The paper introduces the model of a pair of branching processes $\{Z_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)}), n \in \mathbb{N}_0\}$ in a joint random environment. If the environment is fixed then the sequences $\{Z_n^{(1)}, n \in \mathbb{N}_0\}$ and $\{Z_n^{(2)}, n \in \mathbb{N}_0\}$ are independent branching processes in a varying environment. This model is a particular case of a more general model of a multitype branching process in a random environment. Under some moment conditions we establish the asymptotic relation $\mathbf{P}(Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0) \sim Cn^{-a}$ as $n \rightarrow \infty$ where the parameter a depends only on the correlation coefficient ρ of an increment of a two-dimensional associated random walk.

Keywords: branching processes in a random environment, multi-dimensional random walks, non-extinction of a branching process.

1 Введение

Зафиксируем натуральное N . Положим

$$\Pi^{(j)} = \{p_n^{(j)}\}_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad f^{(j)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(j)} s^n, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где случайные величины $p_0^{(j)}, p_1^{(j)}, p_2^{(j)}, \dots$, удовлетворяют соотношениям

$$p_n^{(j)} \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(j)} = 1 \text{ п.н.}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Положим $\mathbf{\Pi} = \{\Pi_1, \Pi_2, \dots\}$, где $\Pi_m = (\Pi_m^{(1)}, \dots, \Pi_m^{(N)})$ – независимые копии $(\Pi^{(1)}, \dots, \Pi^{(N)})$. Пусть также

$$\mathbf{f} = \left\{ \left(f_1^{(1)}, \dots, f_1^{(N)} \right), \left(f_2^{(1)}, \dots, f_2^{(N)} \right), \dots \right\}, \quad (1)$$

где $f_m^{(j)}$ при каждом натуральном m и каждом $j = 1, \dots, N$ является производящей функцией последовательности $\Pi_m^{(j)}$. Последовательность наборов производящих функций \mathbf{f} будем называть случайной средой. Для краткости меру $\mathbf{P}(\cdot | \mathbf{f})$ будем обозначать $\mathbf{P}_{\mathbf{f}}(\cdot)$. Случайный процесс

$$\{\bar{Z}_n = (Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(N)}), n \in \mathbb{N}_0\}, \quad Z_0^{(j)} = 1, \quad j = 1, \dots, N,$$

назовем группой из N ветвящихся процессов в общей случайной среде \mathbf{f} , если при фиксации среды \mathbf{f} ветвящиеся процессы $\{Z_n^{(j)}, n \in \mathbb{N}_0\}$, $j = 1, \dots, N$, являются независимыми ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона в изменяющейся среде, где производящая функция (п.ф.) числа потомков одной частицы n -го поколения j -й популяции есть $f_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$.

Процессу $\bar{Z}_n = (Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(N)})$ можно сопоставить N -мерное сопровождающее блуждание с шагами

$$\bar{X}_i = \left(\ln \left(f_i^{(1)} \right)'(1), \dots, \ln \left(f_i^{(N)} \right)'(1) \right).$$

Назовем процесс $\{\bar{Z}_n\}$ критическим, если выполнено равенство $\mathbf{E} \bar{X}_1 = 0$.

При $N = 1$ случайный процесс $\{Z_n\}$ является ветвящимся процессом в случайной среде (ВПСС). Модель ВПСС впервые была введена Смитом и Вилкинсоном в 1969 году в работе [1]. Отметим, что в случае дробно-линейных производящих функций $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$

вероятность невырождения ВПСС к моменту времени n при фиксированной среде $\mathbf{P}_f (Z_n > 0)$ явно выражается через сопровождающее случайное блуждание (см. [2], стр. 40), что делает случай дробно-линейных п.ф. наиболее удобным для рассмотрения.

Группа из N ветвящихся процессов $\{\bar{Z}_n\}$ является частным случаем более общей модели многотипного ветвящегося процесса в случайной среде. В классическом многотипном процессе частицы одних типов могут порождать частицы других типов, в рассматриваемом нами случае это невозможно. Критические многотипные ветвящиеся процессы в случайной среде рассматривались в работе [3], где изучалась вероятность невырождения хотя бы одного из типов частиц. В нашей более простой модели удастся изучить вероятность невырождения всех типов частиц при значительно менее жестких условиях.

Асимптотическое поведение вероятности невырождения критического ВПСС в случае дробно-линейных производящих функций $\{f_n\}$ впервые было исследовано М.В. Козловым в 1976 году в статье [4]. Спустя четверть века, в 2001 году, Г. Кёрстингом и Й. Гейгером в статье [5] была изучена асимптотика вероятностей невырождения критического ВПСС для общего вида п.ф. $\{f_n\}$. Более точно, при некоторых дополнительных ограничениях были доказаны асимптотические соотношения

$$\mathbf{P} (Z_n > 0) \sim C \mathbf{P} (S_j > 0, j \leq n) \sim \frac{C\hat{C}}{\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где C, \hat{C} – некоторые константы, явный вид \hat{C} можно найти, например, в работе [6].

При $N = 2$ процесс $\{\bar{Z}_n\}$ будем называть парой ветвящихся процессов в общей случайной среде (ПВПСС). Именно эта модель и представляет для нас наибольший интерес. Асимптотическое соотношение (2) для вероятности невырождения критического ВПСС приводит нас к естественному предположению, что и для критической ПВПСС асимптотическое поведение вероятности невырождения связано с асимптотическим поведением вероятности положительности двумерного сопровождающего блуждания. При этом вопросы, связанные с асимптотическим поведением вероятности положительности многомерных случайных блужданий подробно исследованы Д. Денисовым и В. Вахтелем в работах [7] и [8]. Этим результатам посвящен раздел 3.

Основным результатом настоящей работы является теорема 1 о невырождении критической ПВПСС. При определенных условиях

удается получить асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P} (Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0) \sim \frac{C}{n^{p/2}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}, \quad (3)$$

где $\rho \in (0, 1)$ – коэффициент корреляции компонент шага сопровождающего блуждания процесса $\{\bar{Z}_n\}$.

В процессе подготовки настоящей работы мы обнаружили препринт [9], в котором устанавливается асимптотическое соотношение (3) в случае дробно-линейных производящих функций $\{f_k^{(j)}, k \in \mathbb{N}, j = 1, 2\}$.

Отметим, что в препринте [9] накладываются жесткие, и по-видимому, необязательные условия на шаги сопровождающего блуждания. При этом общие идеи препринта [9] и настоящей работы достаточно близки, а ряд результатов, изложенных в нем, имеет более общий характер по сравнению с результатами настоящей работы. В частности, в нем рассмотрен случай отрицательной корреляции $\rho \in (-1, 0]$, а также получены функциональные предельные теоремы, которые в случае общего распределения требуют значительно более кропотливой работы. Мы не будем использовать результаты препринта [9], оставив все утверждения и леммы в исходно полученных нами версиях.

Отметим, что мы рассматриваем $N = 2$ в связи с тем, что в этом случае асимптотику вероятностей положительности двумерного сопровождающего случайного блуждания можно описать в явном виде, найдя, в частности, параметр p .

Работа устроена следующим образом. В разделе 2 сформулирован основной результат настоящей работы. В разделе 3 изложен ряд результатов статей [7], [8], посвященных асимптотике положительности многомерных случайных блужданий. Раздел 4 содержит построение так называемой \mathbf{P}^+ -меры – важного инструмента для исследования поведения сопровождающего случайного блуждания. Раздел 5 посвящен доказательству теоремы 1. Доказательства всех вспомогательных результатов вынесены в раздел 6.

2 Основной результат

Определим модель группы ветвящихся процессов в случайной среде более формально.

Определение 1. Случайный процесс

$$\{\bar{Z}_n = (Z_n^{(1)}, \dots, Z_n^{(N)}), n \in \mathbb{N}_0\}, \quad Z_0^{(j)} = 1, j = 1, \dots, N$$

назовем группой из N ветвящихся процессов в общей случайной среде \mathbf{f} , если при каждом натуральном n справедливы равенства

$$\mathbf{E}_{\mathbf{f}} \left(\prod_{j=1}^N t_j^{Z_n^{(j)}} \middle| \mathbf{Z}_{n-1} \right) := \mathbf{E} \left(\prod_{j=1}^N t_j^{Z_n^{(j)}} \middle| \mathbf{f}, \mathbf{Z}_{n-1} \right) = \prod_{j=1}^N (f_n^{(j)})^{Z_{n-1}^{(j)}}(t_j).$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема о невырождении критической ПВПСС.

Теорема 1. Пусть $\bar{Z}_n = (Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)})$ – критическая ПВПСС, \bar{S}_n – ее сопровождающее блуждание с шагами $\bar{X}_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)})$, $i \in \mathbb{N}$. Положим

$$\xi_k^{(l)} := \frac{\left(f_{k+1}^{(l)} \right)''(1)}{\left(\left(f_{k+1}^{(l)} \right)'(1) \right)^2}, \quad l = 1, 2; k \in \mathbb{N}_0. \quad (4)$$

Пусть $\mathbf{E} |\bar{X}_i|^2 \ln(1 + |\bar{X}_i|) < \infty$, $\mathbf{corr}(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}) = \rho \in (0, 1)$ и, кроме того, $\mathbf{E} \left(\xi_0^{(1)} \right)^q < \infty$, $\mathbf{E} \left(\xi_0^{(2)} \right)^q < \infty$ при некотором $q > 0$. Тогда справедливо асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}(Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0) \sim \frac{C}{n^{p/2}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}, \quad C \in (0, \infty). \quad (5)$$

3 Положительность многомерных случайных блужданий

В этом разделе мы обсудим ряд результатов, необходимых для доказательства теоремы 1 и полученных Д. Денисовым и В. Вахтелем в работах [7] и [8].

3.1. Обозначения. Единичную сферу в d -мерном вещественном пространстве будем обозначать \mathbb{S}^{d-1} . Всюду ниже будем использовать символы C, \hat{C}, \tilde{C} с индексами и без для обозначения констант. При этом в различных местах эти символы могут обозначать различные величины. Евклидову норму вектора $\bar{v} \in \mathbb{R}^d$ будем обозначать $|\bar{v}|$. Иными словами, если $\bar{v} = (v_1, \dots, v_d)$, то

$$|\bar{v}| = \left(\sum_{j=1}^d v_j^2 \right)^{1/2}.$$

Для краткости будем использовать обозначение $\bar{v} > C$, где $C \in \mathbb{R}$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^d$, в том случае, если $v_i > C$ при всех $i = 1, 2, \dots, d$. Также под $\bar{w} > \bar{v}$, где $\bar{w}, \bar{v} \in \mathbb{R}^d$, будем подразумевать, что $w_i > v_i$ при $i = 1, 2, \dots, d$. Аналогичные обозначения будем использовать и для знаков $<, \geq, \leq$. Будем использовать следующее обозначение для минимума:

$$a \wedge b := \min(a, b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Для векторов мы будем использовать два обозначения – \bar{v} и \mathbf{v} . Под матричной нормой $\|\cdot\|$ всюду ниже мы будем подразумевать операторную норму, подчиненную стандартной евклидовой норме, то есть $\|A\| = \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$, где $\lambda_{\max}(B)$ – наибольшее собственное значение матрицы B . Для всякого множества $U \subseteq \mathbb{R}^d$ и всякого $x \in \mathbb{R}$ под записью xU мы понимаем множество в \mathbb{R}^d , заданное равенством

$$xU = \{x\bar{y} = (xy_1, \dots, xy_d) : \bar{y} = (y_1, \dots, y_d) \in U\}.$$

3.2. Задача Дирихле для оператора Лапласа–Бельтрами.

Определение 2. Будем говорить, что множество $K \subset \mathbb{R}^d$ является конусом, если существует такое открытое и связное множество $\Sigma \subset \mathbb{S}^{d-1}$, что K есть объединение всех лучей, выпущенных из начала координат и пересекающих множество Σ .

Напомним определение оператора Лапласа–Бельтрами.

Определение 3. Пусть M – гладкое риманово многообразие, x^1, \dots, x^n – локальные координаты на нем, $g = (g_{ij})$ – матрица римановой метрики, $g^{-1} = (g^{ij})$ – обратная к g матрица. Оператор, действующий на гладкие функции на многообразии M по правилу

$$L_M := \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\det g} \cdot g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right),$$

называется оператором Лапласа–Бельтрами на многообразии M .

Пусть $\Sigma \subset \mathbb{S}^{d-1}$ – открытое связное множество из определения 2. Рассмотрим задачу Дирихле для оператора Лапласа–Бельтрами на сфере $L_{\mathbb{S}^{d-1}}$:

$$\begin{cases} L_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\bar{x}) = -\lambda g(\bar{x}), & \bar{x} \in \Sigma, \\ g(\bar{x}) = 0, & \bar{x} \in \partial\Sigma. \end{cases} \quad (6)$$

Отметим, что спектр этой задачи не более чем счетен, дискретен и отделен от нуля (см. статью [8]). Более точно, имеет место цепочка

неравенств

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Положим

$$p := \sqrt{\lambda_1 + (d/2 - 1)^2} - (d/2 - 1). \quad (7)$$

Всюду ниже символ p будет обозначать величину, задаваемую выражением (7), для какого конкретно конуса K задан параметр p будет ясно из контекста.

Пусть g_1 – неотрицательная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_1 . Положим

$$u(\bar{x}) = |\bar{x}|^p g_1 \left(\frac{\bar{x}}{|x|} \right). \quad (8)$$

Отметим, что в силу непрерывности (а значит и ограниченности) функции g_1 существует такое число C , что при всех $\bar{x} \in K$ имеет место неравенство

$$u(\bar{x}) \leq C |\bar{x}|^p. \quad (9)$$

Для нас интерес представляет следующий частный случай.

Пример 1. Пусть $d = 2$, а множество Σ представляет собой дугу окружности $[-\varphi, \pi/2 + \varphi]$, где $\varphi \in (0, \pi/4)$. Оператор Лапласа–Бельтрами на \mathbb{S}^1 имеет вид

$$L_{\mathbb{S}^1} = \frac{d^2}{dt^2},$$

где t – угловая координата на окружности. Положим $\rho = \sin 2\varphi$. После линейной замены $t(u) = -\varphi + u(\pi/2 + 2\varphi)$ задача (6) переписется в виде следующей задачи на функцию ψ :

$$\begin{cases} \psi''(u) = -\lambda(\pi/2 + 2\varphi)^2 \psi(u), & u \in (0, 1), \\ \psi(0) = \psi(1) = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующее представление для параметра p , определяемого соотношением (7):

$$p = \sqrt{\lambda_1} = \frac{\pi}{\pi/2 + 2\varphi} = \frac{\pi}{\pi/2 + \arcsin(\rho)} = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}.$$

Кроме того, собственная функция оператора Лапласа–Бельтрами g_1 при $t \in [-\varphi, \pi/2 + \varphi]$ задается равенством

$$g_1(t) = \begin{cases} (-1)^k \cos(4kt), & \varphi = -\pi/4 + \pi/(8k), \quad k \in \mathbb{N}, \\ \sin(p(\varphi + t))/\cos(p\varphi), & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (10)$$

Замечание 1. Отметим, что справедливы соотношения $g_1(t) \geq 0$ при $t \in [-\varphi, \pi/2 + \varphi]$, причем $g_1(t) = 0$ тогда и только тогда, когда $t = -\varphi$ или $t = \pi/2 + \varphi$.

3.3. Асимптотика вероятности положительности случайного блуждания с некоррелированными компонентами шага.

Пусть $\{\bar{S}_n\} = (S_n^{(1)}, \dots, S_n^{(d)})$ – случайное блуждание в \mathbb{R}^d с шагами

$$\bar{X}_i = (X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(d)}),$$

$d \in \mathbb{N}$, $K \subset \mathbb{R}^d$ – конус, $\bar{x} \in K$, $\tau(\bar{x})$ – время выхода случайного блуждания с начальной точкой \bar{x} из конуса K , то есть

$$\tau(\bar{x}) = \inf \{n \in \mathbb{N} : \bar{x} + \bar{S}_n \notin K\}. \quad (11)$$

Всюду ниже для натуральных n и векторов $\bar{x} \in K$ будем использовать обозначение

$$m_n(\bar{x}) := \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n). \quad (12)$$

В. Вахтель и Д. Денисов в работе [8] требуют выполнения двух групп условий.

Условия (G):

- G1) конус K звездчатый (то есть существует такая точка $O \in K$, что для всякой точки $A \in K$ отрезок $[O, A]$ целиком лежит в множестве K) и имеет липшицеву границу;
- G2) существует такой положительный параметр C_1 , что для всякого вектора $\bar{x} \in K$ имеет место неравенство

$$u(\bar{x}) \leq C_1 |\bar{x}|^{p-1} \text{dist}(\bar{x}, \partial K); \quad (13)$$

- G3) существует такой положительный параметр C_2 , что для всякого вектора $\bar{x} \in K$ имеет место неравенство

$$u(\bar{x}) \geq C_2 |\bar{x}|^{p-1} \text{dist}(\bar{x}, \partial K). \quad (14)$$

Условия (M):

- M1) $\mathbf{E}X^{(i)} = 0$, $i = 1, \dots, d$;
- M2) $\mathbf{E}(X^{(i)})^2 = 1$, $i = 1, \dots, d$, и $\mathbf{E}X^{(i)}X^{(j)} = 0$ при $i \neq j$;
- M3) $\mathbf{E}|\bar{X}|^2 \ln(1 + |\bar{X}|) < \infty$. При этом, если $p > 2$, то $\mathbf{E}|\bar{X}|^p < \infty$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 2 (Theorem 2, [8]). Пусть выполнены условия (G) и (M). Тогда функция

$$\widehat{V}(\bar{x}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}u(\bar{x} + \bar{S}_n) I\{\tau(\bar{x}) > n\}$$

корректно определена и для всякого вектора $\bar{x} \in K$ и каждого натурального n справедливо равенство

$$\widehat{V}(\bar{x}) = \mathbf{E}\widehat{V}(\bar{x} + \bar{S}_n) I\{\tau(\bar{x}) > n\}.$$

Более того, при $p \geq 1$ имеет место асимптотическое соотношение

$$\widehat{V}(\bar{x}) \sim u(\bar{x}), \quad \text{dist}(\bar{x}, \partial K) \rightarrow \infty.$$

Теорема 3 (Theorem 3, [8]). Пусть выполнены условия (G) и (M), $p \geq 1$. Тогда:

- 1) существуют такие положительное число C и вектор $\bar{x}_0 \in K$, что для всякого вектора $\bar{x} \in K$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n) \leq C \frac{u(\bar{x} + \bar{x}_0)}{n^{p/2}};$$

- 2) равномерно по таким векторам $\bar{x} \in K$, что $|\bar{x}| \leq \sqrt{n}/\ln n$, имеет место асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n) \sim \frac{\varkappa \widehat{V}(\bar{x})}{n^{p/2}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где \varkappa – положительный параметр, не зависящий от \bar{x} .

Отметим, что условие **M2** требует конечности дисперсий компонент шага блуждания, однако в теореме 1 мы это условие не накладываем, поскольку оно вытекает из условия **M3**. В дальнейшем нам потребуется еще одна группа условий, которая является переносом условий **M1**, **M2**, **M3** на двумерное случайное блуждание с коррелированными компонентами. Пусть $\{\bar{S}_n\}$ – двумерное случайное блуждание, $\bar{X} = (X^{(1)}, X^{(2)})$ – случайный вектор, имеющий то же распределение, что и шаг блуждания $\{\bar{S}_n\}$. Пусть также

$$\rho = \text{corr}(X^{(1)}, X^{(2)}), \quad p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}.$$

Будем говорить, что двумерное случайное блуждание $\{\bar{S}_n\}$ удовлетворяет условию (C), если его шаг удовлетворяет условиям **C1**, **C2**, **C3**:

- C1)** $\mathbf{E}X^{(1)} = \mathbf{E}X^{(2)} = 0$;
C2) $\mathbf{E}|\bar{X}|^2 \ln(1 + |\bar{X}|) < \infty$;
C3) если $\rho < 0$, то $\mathbf{E}|\bar{X}|^p < \infty$.

Отметим, что в предположениях теоремы 1 сопровождающее блуждание ПВПСС удовлетворяет условию (C).

3.4. Асимптотика вероятности положительности случайного блуждания с коррелированными компонентами шага.

Пусть случайный вектор $\bar{X} = (X^{(1)}, X^{(2)})$ – шаг двумерного случайного блуждания $\{\bar{S}_n\}$, причем $\mathbf{E}X^{(1)} = \mathbf{E}X^{(2)} = 0$; $\mathbf{E}(X^{(1)})^2 = \sigma_1^2$; $\mathbf{E}(X^{(2)})^2 = \sigma_2^2$; $\text{corr}(X^{(1)}, X^{(2)}) = \rho \in (-1, 1)$. В этом случае компоненты шага блуждания, вообще говоря, не являются некоррелированными. Однако, мы можем линейной заменой перейти к новому конусу и блужданию так, что для последнего уже будет выполнено условие **M2**. Положим

$$M := \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \begin{pmatrix} \cos \varphi / \sigma_1 & -\sin \varphi / \sigma_2 \\ -\sin \varphi / \sigma_1 & \cos \varphi / \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \sin 2\varphi = \rho. \quad (15)$$

Тогда вектор $M\bar{X}$ имеет единичную ковариационную матрицу. Следующая теорема получается применением теорем **2**, **3** к преобразованному посредством матрицы M случайному блужданию.

Теорема 4. Пусть $K = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, а двумерное случайное блуждание $\{\bar{S}_n\}$ удовлетворяет условию (C). Пусть $\tau(\bar{x})$ – время выхода случайного блуждания с начальной точкой \bar{x} из конуса K , то есть случайная величина, определенная равенством (11). Тогда справедливы следующие соотношения.

- (1) Равномерно по таким векторам $\bar{x} \in K$, что $|\bar{x}| \leq \sqrt{n}/\ln n$, выполнено асимптотическое соотношение

$$\mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n) \sim \frac{\varkappa V(M\bar{x})}{n^{p/2}}, \quad n \rightarrow \infty, \quad (16)$$

где \varkappa – положительный параметр, который не зависит от \bar{x} .

- (2) Существуют такие положительное число C и вектор $\bar{x}_0 \in MK$, что для всякого $\bar{x} \in K$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n) \leq C \frac{u(M\bar{x} + \bar{x}_0)}{n^{p/2}}. \quad (17)$$

Здесь функция V при $\bar{x} \in K$ определяется равенством

$$V(M\bar{x}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}u(M(\bar{x} + \bar{S}_n)) I\{\tau(\bar{x}) > n\}. \quad (18)$$

Кроме того:

- для всякого вектора $\bar{x} \in K$ и для всякого натурального числа n

$$V(M\bar{x}) = \mathbf{E}V(M(\bar{x} + \bar{S}_n)) I\{\tau(\bar{x}) > n\}; \quad (19)$$

- имеет место асимптотическое соотношение

$$V(M\bar{x}) \sim u(M\bar{x}), \quad \text{dist}(\bar{x}, \partial K) \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Всюду ниже вектор \bar{x}_0 будет обозначать параметр из неравенства (17); K будет обозначать первый квадрант $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$; $\tau(\bar{x})$ – время выхода случайного блуждания с начальной точкой \bar{x} из первого квадранта K . Функции V и u соответствуют определенным в подразделе 3.3 функциям \hat{V} и u для конуса MK .

Следствие 1. Если векторы $\bar{x}, \bar{y} \in K$ таковы, что $\bar{x} \leq \bar{y}$, то имеет место неравенство

$$V(M\bar{x}) \leq V(M\bar{y}). \quad (21)$$

Доказательство. Заметим, что если $\bar{x} \leq \bar{y}$, то для каждого натурального n имеет место неравенство $t_n(\bar{x}) \leq t_n(\bar{y})$, где функция t_n определена равенством (12). Отсюда, воспользовавшись асимптотическим соотношением (16), получим требуемое неравенство. \square

Следствие 2. Существует такой параметр C , что для всякого вектора $\bar{x} \in K$ выполнено неравенство

$$V(M\bar{x}) \leq C u(M\bar{x} + \bar{x}_0). \quad (22)$$

Доказательство теоремы 4. Положим $\varphi := 1/2 \arcsin \rho \in (-\pi/4, \pi/4)$. Нетрудно проверить, что образ MK конуса $K = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ при отображении M устроен так, как изображено на рисунке 1.

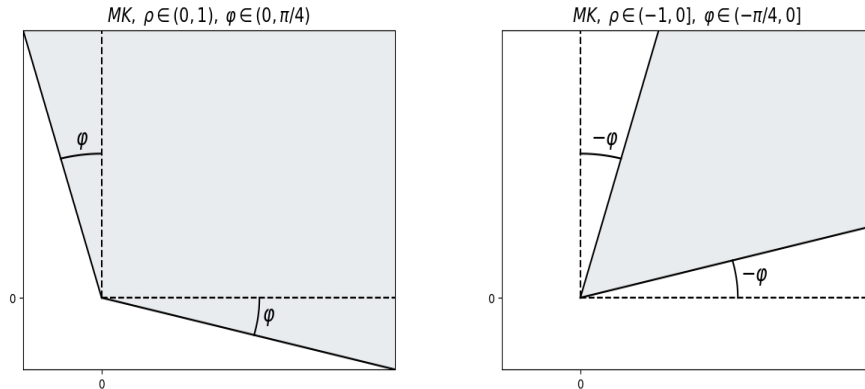


Рис. 1. Образ первой четверти про отображении M

Замечание 2. Принимая во внимание рисунок 1 и пример 1, получаем следующее представление для параметра p , определенного равенством (7):

$$p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}.$$

В частности, в представляющем для нас наибольший интерес случае $\rho \in (0, 1)$ параметр p принадлежит интервалу $(1, 2)$.

Справедливость условия **G1** для конуса MK ясна из рисунка 1. В примере 1 получены выражения для собственной функции оператора Лапласа-Бельтрами, соответствующей наименьшему собственному значению, и для параметра p . Явное выражение (10) для функции g_1 позволяет проверить выполнение условий **G2** и **G3** для конуса MK . Более точно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для всякого числа $\rho \in (-1, 1)$ существуют такие положительные параметры C_1, C_2 , что для всякого вектора $\bar{x} \in MK$ выполнены неравенства*

$$C_1 \text{dist}(\bar{x}, \partial MK) \leq |\bar{x}| g_1 \left(\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \right) \leq C_2 \text{dist}(\bar{x}, \partial MK).$$

Доказательство утверждения 1. Запишем $\bar{x} \in MK$ в виде $r(\cos t, \sin t)$, где $t \in (-\varphi, \pi/2 + \varphi)$, $r > 0$, то есть t и r – полярный угол и радиус соответственно. Если $x_2 \leq x_1$, то выполнено равенство

$$\text{dist}(\bar{x}, \partial MK) = r \sin(\varphi + t),$$

так как $\text{dist}(\bar{x}, \partial MK)$ – длина катета, противолежащего углу величины $\varphi + t$ в прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины r . Если $\varphi \notin \{-\pi/4 + \pi/(8k), k \in \mathbb{N}\}$, то имеет место равенство

$$|\bar{x}| g_1 \left(\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \right) = r \frac{\sin(p(\varphi + t))}{\cos p\varphi}.$$

Положим

$$h(t) := \frac{\sin(p(\varphi + t))}{\sin(\varphi + t) \cos p\varphi}, \quad t \in (-\varphi, \pi/4).$$

Так как справедливы равенства

$$\lim_{t \rightarrow -\varphi+0} h(t) = \frac{p}{\cos(p\varphi)}, \quad \lim_{t \rightarrow \pi/4-0} h(t) = \frac{\sin(p(\pi/4 + \varphi))}{\sin(\pi/4 + \varphi) \cos(p\varphi)} < \infty,$$

то доопределенная должным образом функция h непрерывна на $[-\varphi, \pi/4]$ и, следовательно, ограничена. Кроме того, так как $h(t) > 0$ при $t \in [-\varphi, \pi/4]$, то ограничивающую ее снизу константу можно взять положительной.

Рассмотрим случай $\varphi = -\pi/4 + \pi/(8k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$|\bar{x}| g_1 \left(\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|} \right) = (-1)^k r \cos(4kt).$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\varphi+0} \frac{(-1)^k \cos(4kt)}{\sin(\varphi+t)} &= 4k, \\ \lim_{t \rightarrow \pi/4-0} \frac{(-1)^k \cos(4kt)}{\sin(\varphi+t)} &= \frac{1}{\sin(\varphi+\pi/4)} < \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, функция

$$h(t) := \frac{(-1)^k \cos(4kt)}{\sin(\varphi+t)} > 0, \quad t \in (-\varphi, \pi/4),$$

доопределенная в точках $-\varphi, \pi/4$ своими предельными значениями, ограничена и положительна на множестве $[-\varphi, \pi/4]$. Итак, мы показали, что при $x_2 \leq x_1$ найдутся требуемые параметры C_1, C_2 . В силу симметрии (см. рисунок 1) требуемые константы найдутся и при $x_2 > x_1$. \square

Как следует из утверждения 1, для конуса MK выполнены условия **G2** и **G3**. Таким образом, выполнена вся группа условий **G**. Для случайного блуждания $\{M\bar{S}_n\}$ условия **M1** и **M2** выполнены по определению матрицы M . Проверим выполнение условия **M3**.

Утверждение 2. *Если вектор $\bar{z} \in K$, то справедливы неравенства*

$$|M\bar{z}| \geq \frac{|\bar{z}|}{\|M^{-1}\|}; \quad (23)$$

$$\text{dist}(\bar{z}, \partial K) \leq \|M^{-1}\| \text{dist}(M\bar{z}, \partial MK). \quad (24)$$

Доказательство утверждения 2. Неравенство (23) следует из определения операторной нормы. Более точно, для всякого $\bar{z} \in K$ справедливо неравенство $|M^{-1}M\bar{z}| \leq \|M^{-1}\| |M\bar{z}|$. Неравенство (24) также вытекает из определения операторной нормы:

$$\begin{aligned}\text{dist}(\bar{z}, \partial K) &= \inf_{y \in \partial K} |\bar{z} - y| = \inf_{y \in \partial K} |M^{-1}(M\bar{z} - My)| \leq \\ &\leq \|M^{-1}\| \inf_{y \in \partial K} |M\bar{z} - My| \leq \|M^{-1}\| \text{dist}(M\bar{z}, M\partial K) = \\ &= \|M^{-1}\| \text{dist}(M\bar{z}, \partial MK).\end{aligned}$$

\square

Утверждение 3. *Пусть \bar{X} – двумерный случайный вектор. Тогда условия*

$$\mathbf{E} |\bar{X}|^2 \ln(1 + |\bar{X}|) < \infty, \quad \mathbf{E} |M\bar{X}|^2 \ln(1 + |M\bar{X}|) < \infty$$

эквивалентны.

Доказательство утверждения 3. Утверждение немедленно вытекает из неравенства (23) и того факта, что при $a > 0$, $x \geq 0$ справедливы соотношения

$$\min\{a, 1\} \ln(1+x) \leq \ln(1+ax) \leq \max\{a, 1\} \ln(1+x).$$

□

Из утверждения 3 следует выполнение условия М3 для случайного блуждания $\{M\bar{S}_n\}$. Итак, объединив теоремы 2, 3 и утверждения 1, 3, получим теорему 4. □

В дальнейшем нам потребуется еще одна оценка для функции u .

Утверждение 4. Для всякого вектора \bar{y} из замыкания множества MK и всякого положительного числа δ существует такой параметр $C = C(\bar{y}, \delta)$, что для всякого $\bar{x} \in MK$ неравенство $\text{dist}(\bar{x}, \partial MK) > \delta$ влечет неравенство

$$u(\bar{x} + \bar{y}) \leq C u(\bar{x}). \quad (25)$$

При этом параметр $C(\bar{y}, \delta)$ может быть выбран так, что

$$\begin{aligned} C(\bar{y}, \delta) &= \tilde{C} \left(1 + \|M\| \|M^{-1}\| \frac{|\bar{y}|}{\delta} \right)^{p-1} \left(1 + \frac{\text{dist}(\bar{y}, \partial MK)}{\delta} \right) \leq \\ &\leq \tilde{C} \left(1 + \frac{\|M\| \|M^{-1}\|}{\delta} \right)^p \max(|\bar{y}|^p, 1), \end{aligned}$$

где \tilde{C} не зависит ни от \bar{y} , ни от δ .

Доказательство. Зафиксируем $\bar{y} \in MK$ и $\delta > 0$. В силу неравенств (23), (24) при $\bar{z} \in MK$ справедлива оценка

$$\text{dist}(\bar{z}, \partial MK) \leq \|M\| \|M^{-1}\| |\bar{z}|.$$

Отсюда в силу неравенств (13), (14) и предположения $\text{dist}(\bar{x}, \partial MK) > \delta$ следуют соотношения

$$\begin{aligned} u(\bar{x} + \bar{y}) &\leq C_1 |\bar{x} + \bar{y}|^{p-1} \text{dist}(\bar{x} + \bar{y}, \partial MK) \leq \\ &\leq C_1 |\bar{x}|^{p-1} \text{dist}(\bar{x}, \partial MK) \left(1 + \|M\| \|M^{-1}\| \frac{|\bar{y}|}{\delta} \right)^{p-1} \left(1 + \frac{\text{dist}(\bar{y}, \partial MK)}{\text{dist}(\bar{x}, \partial MK)} \right) \leq \\ &\leq \tilde{C} \left(1 + \|M\| \|M^{-1}\| \frac{|\bar{y}|}{\delta} \right)^{p-1} \left(1 + \frac{\text{dist}(\bar{y}, \partial MK)}{\delta} \right) u(\bar{x}) = C(\bar{y}, \delta) u(\bar{x}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$C(\bar{y}, \delta) \leq \tilde{C} \left(1 + \|M\| \|M^{-1}\| \frac{|\bar{y}|}{\delta} \right)^p \leq \tilde{C} \left(1 + \frac{\|M\| \|M^{-1}\|}{\delta} \right)^p \max(|\bar{y}|^p, 1).$$

Из непрерывности функций u и $C(\cdot, \delta)$ на замыкании множества MK следует справедливость неравенства (25) для всех \bar{y} из замыкания множества MK . \square

4 Условная мера для двумерных блужданий, лежащих в первом квадранте

Для доказательства теоремы 1 важную роль играет возможность описывать вероятность невырождения процесса $\{\bar{Z}_n\}$ и траекторию сопровождающего блуждания при условии положительности последнего. Для этих целей в одномерном случае (то есть для ветвящегося процесса в случайной среде) используется так называемая \mathbf{P}^+ мера (см., например, книгу [10], глава 5.2) Отметим, что бóльшая часть настоящего раздела близка по содержанию к препринту [9].

Всюду ниже $K = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, \bar{X} – случайный вектор, имеющий то же распределение, что и шаги двумерного случайного блуждания $\{\bar{S}_n\}$. Пусть существует функция $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- Н1. $\varphi(\bar{x}) > 0$ при $\bar{x} \in K$;
- Н2. $\varphi(\bar{x}) = 0$ при $\bar{x} \notin K$;
- Н3. $\mathbf{E} \varphi(\bar{x} + \bar{X}) = \mathbf{E} \varphi(\bar{x} + \bar{X}) I\{\bar{x} + \bar{X} \in K\} = \varphi(\bar{x})$.

Тогда для всякого числа $n \in \mathbb{N}$ и всякого вектора $\bar{x} \in K$ выражение

$$\mathbf{P}_{n, \mathbf{x}}^+(A) := \mathbf{E} \frac{\varphi(\bar{x} + \bar{S}_n)}{\varphi(\bar{x})} I\{\bar{S}_j + \bar{x} > 0, j \leq n\} I_A$$

задает вероятностную меру на σ -алгебре

$$\mathcal{F}_n = \sigma \left(\Pi_1^{(1)}, \Pi_1^{(2)}, \dots, \Pi_n^{(1)}, \Pi_n^{(2)} \right),$$

где $\Pi_i^{(k)}$ при каждом натуральном i и каждом $k = 1, 2$ – последовательность случайных величин из определения среды \mathbf{f} (см. равенство (1)). Система мер $\{\mathbf{P}_{n, \mathbf{x}}^+\}$ при фиксированном векторе $\bar{x} = \mathbf{x}$ согласована и, следовательно, может быть продолжена до некоторой меры $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+$ на $\mathcal{F} = \sigma \left(\Pi_n^{(1)}, \Pi_n^{(2)}; n \in \mathbb{N} \right)$.

Замечание 3. Из определения меры $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+$ следует, что если событие A , принадлежащее σ -алгебре \mathcal{F}_k при некотором k , таково, что $\mathbf{P}(A) = 0$, то $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+(A) = 0$. Иными словами, мера $\mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+$ является абсолютно непрерывной относительно меры \mathbf{P} на каждой из σ -алгебр \mathcal{F}_k , $k \in \mathbb{N}$.

Положим $\varphi(\bar{x}) := V(M\bar{x})I\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$, где $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, а функция V определяется выражением (18). При таком выборе φ условие Н1 может нарушаться для некоторых векторов \bar{x} , поскольку $V(M\bar{x})$ может обращаться в ноль. Однако в силу соотношения (20) и положительности функции u условие Н1 будет иметь место для всех векторов \bar{x} , достаточно удаленных от границы квадранта K . Мы будем определять меру \mathbf{P}_x^+ только для векторов \bar{x} , лежащих в множестве

$$\mathcal{X}_V := \{\bar{y} \in K : V(M\bar{y}) \neq 0\}.$$

Докажем аналог леммы 5.2 из книги [10] для рассматриваемого нами двумерного случая.

Теорема 5. Пусть $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$. Предположим, что для последовательности случайных величин $\{Y_k\}$ выполнены следующие условия:

- 1) случайная величина Y_k является \mathcal{F}_k -измеримой при всяком натуральном k ;
- 2) последовательность $\{Y_n\}$ имеет предел Y_∞ п.н. по мере \mathbf{P}_x^+ ;
- 3) существует такая положительная константа C , что $|Y_k| \leq C$ для всякого $k \in \mathbb{N}$.

Тогда справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(Y_n | \tau(\bar{x}) > n) = \mathbf{E}_x^+ Y_\infty.$$

Доказательство. Зафиксируем натуральные числа $n > k$ и вектор $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_k | \tau(\bar{x}) > n) &= \frac{\mathbf{E}Y_k I\{\tau(\bar{x}) > n\}}{m_n(\bar{x})} = \\ &= \frac{\mathbf{E}[Y_k I\{\tau(\bar{x}) > k\} \mathbf{E}(I\{\bar{S}_j + \bar{x} > 0, j \in (k, n]\} | \mathcal{F}_k)]}{m_n(\bar{x})} = \\ &= \frac{\mathbf{E}[Y_k I\{\tau(\bar{x}) > k\} m_{n-k}(\bar{S}_k + \bar{x})]}{m_n(\bar{x})}. \end{aligned}$$

Перепишем асимптотическое соотношение (16) в терминах m_n :

$$m_n(\bar{x}) \sim \frac{\varkappa V(M\bar{x})}{n^{p/2}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, на событии $\{\bar{S}_k + \bar{x} > 0\}$ имеет место поточечная сходимость:

$$\frac{m_{n-k}(\bar{S}_k + \bar{x})}{m_n(\bar{x})} \rightarrow \frac{V(M(\bar{S}_k + \bar{x}))}{V(M\bar{x})}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Кроме того, в силу неравенств (9), (17), равномерной ограниченности последовательности $\{Y_k\}$ и асимптотического соотношения (16) имеем неравенства

$$\begin{aligned} \left| \frac{Y_k I\{\tau(\bar{x}) > k\} m_{n-k}(\bar{S}_k + \bar{x})}{m_n(\bar{x})} \right| &\leq C \frac{m_{n-k}(\bar{S}_k + \bar{x})}{m_n(\bar{x})} \leq \\ &\leq C_1 \frac{|M(\bar{S}_k + \bar{x}) + \bar{x}_0|^p}{V(M\bar{x})}. \end{aligned}$$

В силу неравенств треугольника и Минковского при всяком натуральном k имеет место оценка

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} |M(\bar{S}_k + \bar{x}) + \bar{x}_0|^p)^{1/p} &\leq (\mathbf{E} |M\bar{S}_k|^p)^{1/p} + |M\bar{x}| + |\bar{x}_0| \leq \\ &\leq k \|M\| (\mathbf{E} |\bar{X}|^p)^{1/p} + |M\bar{x}| + |\bar{x}_0| < \infty, \end{aligned} \quad (26)$$

где \bar{X} – случайный вектор, распределенный так же, как шаг блуждания $\{\bar{S}_n\}$. Таким образом, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (Y_k | \tau(\bar{x}) > n) = \mathbf{E} Y_k \frac{V(M(\bar{S}_k + \bar{x}))}{V(M\bar{x})} I\{\tau(\bar{x}) > k\} = \mathbf{E}_x^+ Y_k. \quad (27)$$

Покажем, что для всякого $q \in (1, +\infty)$ имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (|Y_n - Y_k| I\{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in K_L\} | \tau(\bar{x}) > qn) = 0. \quad (28)$$

Введем обозначение $d(\bar{y}) := \text{dist}(\bar{y}, \partial MK)$ для векторов $\bar{y} \in MK$. В силу неравенства (25) и асимптотического соотношения (20) существует такое положительное число L , что неравенство $d(\bar{y}) \geq L$ влечет оценку

$$\frac{u(\bar{y} + \bar{x}_0)}{V(\bar{y})} \leq \frac{C_2 u(\bar{y})}{V(\bar{y})} \leq 2C_2 =: C_3, \quad (29)$$

где параметр C_3 не зависит от вектора \bar{y} . Зафиксируем число L и введем обозначения $K_L := \{\bar{y} \in MK : d(\bar{y}) \geq L\}$, $U_L := MK \setminus K_L$.

Для достаточно больших n в силу неравенства (17) и асимптотического соотношения (16) справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} (|Y_n - Y_k| I \{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in K_L\} | \tau(\bar{x}) > qn) = \\ &= \frac{1}{m_{qn}(\bar{x})} \mathbf{E} [|Y_n - Y_k| m_{qn-n}(\bar{S}_n + \bar{x}) I \{\tau(\bar{x}) > n, M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in K_L\}] \leq \\ &\leq C_4 \left(\frac{q}{q-1} \right)^{p/2} \mathbf{E}_x^+ \left[|Y_n - Y_k| I \{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in K_L\} \frac{u(M(\bar{S}_n + \bar{x}) + \bar{x}_0)}{V(M(\bar{S}_n + \bar{x}))} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

В силу неравенства (29) на событии $\{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in K_L\}$ справедлива оценка

$$\frac{u(M(\bar{S}_n + \bar{x}) + \bar{x}_0)}{V(M(\bar{S}_n + \bar{x}))} \leq C_3.$$

Из последней оценки и соотношения (30) следует неравенство

$$\mathbf{E} (|Y_n - Y_k| I \{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in K_L\} | \tau(\bar{x}) > qn) \leq C_3 C_4 \mathbf{E}_x^+ |Y_n - Y_k|.$$

В силу равномерной ограниченности и сходимости п.н. по мере \mathbf{P}_x^+ последовательности $\{Y_k\}$ получаем соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x^+ |Y_n - Y_k| = \mathbf{E}_x^+ |Y_\infty - Y_k|, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x^+ |Y_\infty - Y_k| = 0.$$

Таким образом, имеем оценку

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (|Y_n - Y_k| I \{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in K_L\} | \tau(\bar{x}) > qn) \leq \\ & \leq C_3 C_4 \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x^+ |Y_n - Y_k| = 0. \end{aligned}$$

Соотношение (28) доказано.

Покажем, что для всякого $q \in (1, +\infty)$ и всякого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E} (|Y_n - Y_k| I \{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in U_L\} | \tau(\bar{x}) > qn) = 0. \quad (31)$$

Пусть $\bar{z} \in M^{-1}U_L$, тогда из неравенства (24) следует оценка $\text{dist}(\bar{z}, \partial K) \leq \|M^{-1}\|L$. Положим

$$\begin{aligned} T &:= \|M^{-1}\|L + 1, \quad D_L := \{\bar{z} \in K : \text{dist}(\bar{z}, \partial K) < T\}, \\ A_1 &:= \{\bar{z} \in K : z_1 \geq z_2\}, \quad A_2 := \bar{A}_1. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место включение $M^{-1}U_L \subseteq D_L$. Так как последовательность $\{Y_k\}$ равномерно ограничена величиной C , то

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (|Y_n - Y_k| I \{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in U_L, \tau(\bar{x}) > qn\}) &\leq \\ &\leq 2C \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > qn, \bar{S}_n + \bar{x} \in M^{-1}U_L). \end{aligned} \quad (32)$$

Кроме того, справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > qn, \bar{S}_n + \bar{x} \in M^{-1}U_L) &\leq \int_{D_L} \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > qn, \bar{S}_n + \bar{x} \in d\bar{y}) = \\ &= \int_{D_L} \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in d\bar{y}) \mathbf{P} (\tau(\bar{y}) > qn - n). \end{aligned}$$

Разобьем последний интеграл на слагаемые, соответствующие областям интегрирования $D_L \cap A_i$, $i = 1, 2$. При $i = 1, 2$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} &\int_{D_L \cap A_i} \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in d\bar{y}) \mathbf{P} (\tau(\bar{y}) > qn - n) \leq \\ &\leq \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in D_L \cap A_i) \mathbf{P} (S_j^{(3-i)} > -T, j \leq qn - n) \leq \\ &\leq \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > n) \mathbf{P} (S_j^{(3-i)} > -T, j \leq qn - n). \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание неравенство (32), получаем, что имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{E} (|Y_n - Y_k| I \{M(\bar{S}_n + \bar{x}) \in U_L, \tau(\bar{x}) > qn\}) &\leq \\ &\leq 2C \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > n) \sum_{i=1}^2 \mathbf{P} (S_j^{(i)} > -T, j \leq qn - n). \end{aligned}$$

Таким образом, (31) вытекает из соотношений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > n)}{\mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > qn)} = q^{p/2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} (S_j^{(i)} > -T, j \leq qn - n) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Из (28) и (31) получаем для всякого числа $q \in (1, +\infty)$ предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{E} (Y_n - Y_k | \tau(\bar{x}) > qn)| = 0. \quad (33)$$

Зафиксируем число $q > 1$, а также натуральные $k < n$. Дважды применив неравенство треугольника, получим оценку

$$\begin{aligned} m_n(\bar{x}) & \left| \mathbf{E}(Y_n | \tau(\bar{x}) > n) - \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right| \leq \\ & \leq \left| \mathbf{E} Y_n I \{ \tau(\bar{x}) > qn \} - \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > qn) \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right| + \\ & + \left| \mathbf{E} Y_n I \{ n < \tau(\bar{x}) \leq qn \} \right| + \mathbf{P}(n < \tau(\bar{x}) \leq qn) \left| \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right|. \end{aligned} \quad (34)$$

Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{E} Y_n I \{ \tau(\bar{x}) > qn \} - \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > qn) \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right| \leq \\ & \leq m_{qn}(\bar{x}) \left| \mathbf{E}(Y_n - Y_k | \tau(\bar{x}) > qn) \right| + m_{qn}(\bar{x}) \left| \mathbf{E}(Y_k | \tau(\bar{x}) > qn) - \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right|. \end{aligned}$$

Отсюда, приняв во внимание пределы (27), (33), получаем, что

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_n(\bar{x})} \left| \mathbf{E} Y_n I \{ \tau(\bar{x}) > qn \} - \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > qn) \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right| \leq \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{qn}(\bar{x})}{m_n(\bar{x})} \left| \mathbf{E}(Y_n - Y_k | \tau(\bar{x}) > qn) \right| + \\ & + \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{m_{qn}(\bar{x})}{m_n(\bar{x})} \left| \mathbf{E}(Y_k | \tau(\bar{x}) > qn) - \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right| = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m_n(\bar{x})} \left| \mathbf{E} Y_n I \{ \tau(\bar{x}) > qn \} - \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > qn) \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right| = 0. \quad (35)$$

Имеют место неравенства

$$\left| \mathbf{E} Y_n I \{ n < \tau(\bar{x}) \leq qn \} \right| \leq C \mathbf{P}(n < \tau(\bar{x}) \leq qn), \quad \left| \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right| \leq 2C. \quad (36)$$

Заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(n < \tau(\bar{x}) \leq qn)}{m_n(\bar{x})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m_{qn}(\bar{x})}{m_n(\bar{x})} \right) = 1 - q^{-p/2}.$$

Отсюда и из (34), (35), (36) следует, что для всякого числа $q > 1$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \mathbf{E}(Y_n | \tau(\bar{x}) > n) - \mathbf{E}_x^+ Y_\infty \right| \leq 3C(1 - q^{-p/2}).$$

Переход в последнем неравенстве к пределу при $q \downarrow 1$ завершает доказательство теоремы 5. \square

5 Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть числовые последовательности $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\delta_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$, $\{b_{n,m}\}_{n,m \in \mathbb{N}}$ таковы, что $a_n = \delta_{n,m} + b_{n,m}$ при всех натуральных n , m . Пусть также выполнены условия:

- 1) $\delta_{n,m} \geq 0$, $b_{n,m} \geq 0$ при всех натуральных n и m ;
- 2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,m} = 0$;
- 3) для всякого натурального m существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,m} =: b_m.$$

Тогда существуют, конечны и равны пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a$, $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m$. При этом если $b_m > 0$ для некоторого натурального m , то $a > 0$.

Лемма 2. Пусть $\{\bar{Z}_n\}$ – ПВПСС, сопровождающее блуждание которой удовлетворяет условию (С). Тогда для всякого положительного числа ε существует такое положительное число T , что при всех $t > T$ имеет место неравенство

$$\mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0, \tau(\bar{t}) \leq n) \leq \frac{\varepsilon}{n^{p/2}},$$

где $\bar{t} = (t, t)$.

Лемма 3. В условиях теоремы 1 для всякого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ существует конечный положительный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0 | \tau(\bar{x}) > n) =: v(\bar{x}).$$

Для удобства читателя доказательства лемм 1, 2, 3 вынесены в раздел 6, чтобы не загромождать линию доказательства основной теоремы техническими деталями.

Доказательство теоремы 1. Выберем диагональный вектор $\bar{t} = (t, t)$ столь большим, чтобы имело место неравенство $V(M\bar{t}) > 0$. Положим

$$\begin{aligned} \delta_n(\bar{t}) &= n^{p/2} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0, \tau(\bar{t}) \leq n); \\ b_n(\bar{t}) &= \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0 | \tau(\bar{t}) > n) \cdot n^{p/2} \mathbf{P}(\tau(\bar{t}) > n). \end{aligned}$$

В силу леммы 2 для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой положительный параметр t_0 , что для всякого $t > t_0$ имеет место неравенство $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\bar{t}) < \varepsilon$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_n(\bar{t}) = 0.$$

В силу асимптотического соотношения (16) и леммы 3 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n(\bar{t}) = \varkappa v(\bar{t}) V(M\bar{t}) =: b(\bar{t}).$$

Для достаточно больших t функция $b(\bar{t})$ положительна. Используя представление

$$n^{p/2} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0) = \delta_n(\bar{t}) + b_n(\bar{t})$$

и лемму 1, заключаем, что существует конечный положительный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p/2} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0).$$

Теорема 1 доказана. \square

6 Вспомогательные утверждения

6.1. Доказательства лемм 1 и 2.

Доказательство леммы 1. Отметим, что верхний предел последовательности $\{a_n\}$ не может быть равен $+\infty$. Действительно, найдется такое натуральное число m , что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,m} < +\infty$, тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,m} + \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n,m} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,m} + b_m < +\infty.$$

Поскольку $\delta_{n,m} \geq 0$ при всех натуральных n и m , то для всякого натурального m имеем:

$$b_m \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Отсюда следует, что верхний предел последовательности $\{b_m\}$ обязан быть конечным. Из последнего неравенства также следует, что если найдется такой номер m , что $b_m > 0$, то нижний предел последовательности $\{a_n\}$ положителен. Кроме того, имеют место соотношения:

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} b_m \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \delta_{n,m} + \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} b_m = \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} b_m.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} b_m = \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} b_m.$$

\square

Доказательство леммы 2. Нам потребуется следующее неравенство (см., например, [11], стр. 161)

$$\mathbf{P}_f(Z_n^{(i)} > 0) \leq \exp\left(\min_{0 \leq j \leq n} S_j^{(i)}\right), \quad i = 1, 2. \quad (37)$$

Таким образом, за слишком большой “спуск вниз” сопровождающего блуждания ПВПСС $\{Z_n\}$ “расплачивается” экспоненциально малой вероятностью невырождения при условии среды. Блужданию “невыгодно” спускаться и по первой, и по второй координате.

Зафиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и вектор $\bar{t} = (t, t) \in K$. Заметим, что система событий

$$\{\tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n, m \in \mathbb{N}\}$$

образует разбиение события $\{\tau(\bar{t}) \leq n\}$. Таким образом, имеет место представление

$$\mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0, \tau(\bar{t}) \leq n) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0, \tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n). \quad (38)$$

В силу свойств условного математического ожидания для всякого $m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0, \tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n) &= \\ &= \mathbf{E}\mathbf{E}_{\mathbf{f}} I\{\bar{Z}_n > 0, \tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n\} = \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{P}_{\mathbf{f}}(\bar{Z}_n > 0) I\{\tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n\}]. \end{aligned}$$

В силу неравенства (37)

$$\mathbf{P}_{\mathbf{f}}(\bar{Z}_n > 0) = \mathbf{P}_{\mathbf{f}}(Z_n^{(1)} > 0) \mathbf{P}_{\mathbf{f}}(Z_n^{(2)} > 0) \leq \exp\left(\min_{j \leq n} S_j^{(1)} + \min_{j \leq n} S_j^{(2)}\right).$$

Следовательно, для всякого натурального m справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0, \tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n) &= \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{P}_{\mathbf{f}}(\bar{Z}_n > 0) I\{\tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n\}] \leq \\ &\leq \mathbf{E} \exp\left(\min_{j \leq n} S_j^{(1)} + \min_{j \leq n} S_j^{(2)}\right) I\{\tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n\} \leq \\ &\leq \exp(-mt) \mathbf{P}(\tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n) \leq \\ &\leq \exp(-mt) \mathbf{P}(\tau((m+1)\bar{t}) > n). \end{aligned}$$

Итак, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0, \tau((m+1)\bar{t}) > n, \tau(m\bar{t}) \leq n) &\leq \\ &\leq \exp(-mt) \mathbf{P}(\tau((m+1)\bar{t}) > n). \end{aligned} \quad (39)$$

В силу неравенств (9) и (17) справедлива оценка

$$\mathbf{P}(\tau((m+1)\bar{t}) > n) \leq C \frac{u((m+1)M\bar{t} + \bar{x}_0)}{n^{p/2}} \leq \hat{C} \frac{(m+1)^p t^p}{n^{p/2}}. \quad (40)$$

Отметим, что функция $e^{-t}t^p$ монотонно убывает при $t > p$. Пусть $t \geq T > p$. Тогда для всякого натурального числа m

$$e^{-mt}t^p \leq e^{-mT}T^m.$$

Отсюда, принимая во внимание равенство (38) и неравенства (39), (40), выводим, что при $t \geq T > p$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0, \tau(\bar{t}) \leq n) &\leq \hat{C} \frac{T^p e^{-T}}{n^{p/2}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mT} (m+2)^p \leq \\ &\leq \hat{C} \frac{T^p e^{-T}}{n^{p/2}} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mp} (m+2)^p. \end{aligned}$$

Ряд в правой части неравенства сходится по признаку Коши. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, выберем T столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\hat{C} T^p \exp(-T) \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mp} (m+2)^p < \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана. \square

Замечание 4. Легко видеть, что в лемме 2 по существу не используется двумерность процесса $\{\bar{Z}_n\}$. Таким образом, доказательство остается без изменений для группы из N процессов в общей случайной среде (для произвольного натурального N), если считать, что матрица M такова, что $M\bar{X}$ имеет единичную матрицу ковариации, где \bar{X} имеет то же распределение, что и шаг случайного сопровождающего блуждания.

6.2. Вспомогательные факты о случайных блужданиях.

Доказательство леммы 3 значительно более сложно, чем доказательства лемм 1 и 2. Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Утверждение 5. Пусть $\{S_n\}$ – случайное блуждание с шагами X_j , $\mathbf{E}X_j = 0$, $\mathbf{E}X_j^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty)$. Тогда для всякого положительного α существует такой вещественный параметр C , что для всякого достаточно большого натурального n справедливо неравенство

$$\mathbf{P}(S_j < \alpha \ln n, j \leq n) \leq \frac{C \ln n}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство. См. книгу [10] (Лемма 4.4, стр. 81). \square

Утверждение 6 (Неравенство концентрации). Пусть $\{S_n\}$ – случайное блуждание с шагами, имеющими нулевое среднее и конечную отличную от нуля дисперсию. Тогда существует такое положительное число C , что для всякого положительного Δ найдется такой номер N , что при всех натуральных $n > N$ справедливо неравенство

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \mathbf{P}(S_n \in [x, x + \Delta]) \leq \frac{C\Delta}{\sqrt{n}}. \quad (41)$$

Доказательство. См., например, книгу [12] (глава 3, теорема 9, стр. 66). \square

6.2.1. Нахождение блуждания вне большого квадрата. Целью настоящего подраздела является доказательство факта, заключающегося в том, что с большой вероятностью по мере \mathbf{P}^+ при больших номерах T сопровождающее блуждание \bar{S}_T должно попасть в множество вида $\sqrt{T}D$, где D является отделенным от границы квадранта K достаточно большим компактом. Более точно, мы докажем следующую лемму, в которой, фактически, локализуем положение случайного блуждания при условии положительности.

Лемма 4. Пусть случайное блуждание $\{\bar{S}_n\}$ удовлетворяет условию (C), компоненты шага блуждания имеют положительный коэффициент корреляции $\rho \in (0, 1)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой квадрат $D = [\delta, A] \times [\delta, A]$, что для любого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\bar{x}}^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \notin \sqrt{T}D \right) \leq \varepsilon \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{V(M\bar{x})}. \quad (42)$$

Доказательство леммы 4. Доказательство предварим следующим утверждением.

Утверждение 7. Существует такой вещественный параметр C , что для всех натуральных T и $\bar{x} \in K$ выполнено неравенство

$$\mathbf{E}[\tau(\bar{x}) \wedge T] \leq CT^{1-p/2} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}). \quad (43)$$

Доказательство. Действительно, воспользовавшись неравенством (17), получим искомую оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{E} [\tau(\bar{x}) \wedge T] &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) \wedge T > k) = \sum_{k=0}^{T-1} \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > k) \leq \\ &\leq 1 + Cu(\bar{x}_0 + M\bar{x}) \sum_{k=1}^{T-1} \frac{1}{k^{p/2}} \leq \widehat{C} T^{1-p/2} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}). \end{aligned}$$

□

Зафиксируем $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$. Положим при всех положительных $\delta < A$ и при всех натуральных T

$$\begin{aligned} F &:= \left\{ \bar{z} \in K : |\bar{z}| \geq A\sqrt{T} \right\}, \quad D := [\delta, A] \times [\delta, A], \\ U &:= \left\{ \bar{z} \in K : |\bar{z}| \leq A\sqrt{T}, \text{dist}(\bar{z}, \partial K) < \delta\sqrt{T} \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что имеет место включение $\mathbb{R}^2 \setminus \sqrt{T}D \subseteq F \cup U$. Таким образом, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_x^+ (\bar{S}_T + \bar{x} \notin \sqrt{T}D) \leq \mathbf{P}_x^+ (\bar{S}_T + \bar{x} \in U) + \mathbf{P}_x^+ (\bar{S}_T + \bar{x} \in F). \quad (44)$$

Отметим, что $\bar{S}_T + \bar{x} \leq \bar{A}\sqrt{T} = \sqrt{T}(A, A)$, если $\bar{S}_T + \bar{x} \in U$. Следовательно, имеет место оценка

$$V(M\bar{x}) \mathbf{P}_x^+ (\bar{S}_T + \bar{x} \in U) \leq V(\sqrt{T}M\bar{A}) \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > T, \bar{S}_T + \bar{x} \in U). \quad (45)$$

Не ограничивая общности будем считать, что $A > 1$. В силу неравенства (17) и асимптотического соотношения (16) справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} V(\sqrt{T}M\bar{A}) &\leq C_1 u(\bar{x}_0 + \sqrt{T}M\bar{A}) \leq C_2 \left| R\bar{x}_0 + \sqrt{T}M\bar{A} \right|^p \leq \\ &\leq C_2 \|M\| (2T)^{p/2} A^p \left| 1 + \frac{\bar{x}_0}{\sqrt{T} |M\bar{A}|} \right|^p \leq \\ &\leq C_3 T^{p/2} A^p \left| 1 + \|M^{-1}\| \frac{\bar{x}_0}{\sqrt{2}} \right|^p = C_4 T^{p/2} A^p, \end{aligned} \quad (46)$$

где параметр C_4 не зависит ни от T , ни от A . Положим

$$\Gamma_i := \left\{ \bar{z} = (z_1, z_2) \in K : z_i \leq \delta\sqrt{T} \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Фиксируем $i \in \{1, 2\}$. Справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > T, \bar{S}_T + \bar{x} \in \Gamma_i) \leq \\
& \leq \int_{-x_1}^{+\infty} \int_{-x_2}^{+\infty} \mathbf{P}(\bar{S}_j + \bar{x} > 0, j \leq T/2, \bar{S}_{T/2} + \bar{x} \in d\bar{w}) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(\bar{S}_j + \bar{w} > 0, j \leq T/2, S_T^{(i)} + w_i \in (0, \delta\sqrt{T})) \leq \\
& \leq \int_{-x_1}^{+\infty} \int_{-x_2}^{+\infty} \mathbf{P}(\bar{S}_j + \bar{x} > 0, j \leq T/2, \bar{S}_{T/2} + \bar{x} \in d\bar{w}) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(S_T^{(i)} + w_i \in (0, \delta\sqrt{T})). \tag{47}
\end{aligned}$$

В силу неравенства концентрации (41) имеем оценку

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S_T^{(i)} + w_i \in (0, \delta\sqrt{T})) & \leq \sum_{k=1}^{[\delta\sqrt{T}]+1} \mathbf{P}(S_T^{(i)} + w_i \in [k, k-1]) \leq \\
& \leq C \frac{\delta\sqrt{T} + 1}{\sqrt{T}} = C\delta + \frac{C}{\sqrt{T}}.
\end{aligned}$$

Отсюда, приняв во внимание неравенства (17) и (47), получаем соотношение

$$\mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > T, \bar{S}_T + \bar{x} \in \Gamma_i) \leq C_5 \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{T^{p/2}} \left(\delta + \frac{1}{\sqrt{T}} \right).$$

Отсюда и из неравенств (45), (46) имеем оценку

$$\begin{aligned}
& \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+(\bar{S}_T + \bar{x} \in U) \leq \\
& \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^2 \frac{V(\sqrt{T}M\bar{A})}{V(M\bar{x})} \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > T, \bar{S}_T + \bar{x} \in \Gamma_i) \leq \\
& \leq 2C_4C_5 \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{V(M\bar{x})} A^p \delta = C_6 \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{V(M\bar{x})} A^p \delta, \tag{48}
\end{aligned}$$

где константа C_6 не зависит ни от δ , ни от A .

Из неравенств (9) и (22) получаем соотношение

$$\begin{aligned}
& V(M\bar{x}) \mathbf{P}_x^+(\bar{S}_T + \bar{x} \in F) \leq \\
& \leq C_2 \mathbf{E} |\bar{x}_0 + M(\bar{S}_T + \bar{x})|^p I \{ \tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in F \}.
\end{aligned}$$

При $\bar{S}_T + \bar{x} \in F$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\bar{x}_0 + M(\bar{S}_T + \bar{x})|^p &\leq \|M\| |\bar{S}_T + \bar{x}|^p \left| \frac{\bar{x}_0}{|M(\bar{S}_T + \bar{x})|} + 1 \right|^p \leq \\ &\leq \|M\| |\bar{S}_T + \bar{x}|^p \left| \frac{\|M^{-1}\|\bar{x}_0}{A\sqrt{T}} + 1 \right|^p \leq \\ &\leq C_7 |\bar{S}_T + \bar{x}|^p \leq C_7 (A\sqrt{T})^{p-2} |\bar{S}_T + \bar{x}|^2, \end{aligned}$$

где последнее неравенство имеет место в силу того, что $p < 2$. Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned} V(M\bar{x}) \mathbf{P}_x^+ (\bar{S}_T + \bar{x} \in F) &\leq \\ &\leq C_2 C_7 (A\sqrt{T})^{p-2} \mathbf{E} |\bar{S}_T + \bar{x}|^2 I \{ \tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in F \} \leq \\ &\leq C_8 (A\sqrt{T})^{p-2} \mathbf{E} |\bar{S}_{\tau(\bar{x}) \wedge T} + \bar{x}|^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Заметим, что имеет место равенство

$$\mathbf{E} \left(|\bar{S}_n + \bar{x}|^2 \middle| \mathcal{F}_{n-1} \right) = |\bar{S}_{n-1} + \bar{x}|^2 + \mathbf{E} |\bar{X}|^2, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(\bar{S}_j, j \leq n).$$

Следовательно, последовательность $\{\chi_n(\bar{x}) = |\bar{S}_n + \bar{x}|^2 - n\mu\}_n$ – мартингал относительно фильтрации (\mathcal{F}_n) при $\mu = \mathbf{E} |\bar{X}|^2$. Кроме того, $\tau(\bar{x}) \wedge T$ – ограниченный марковский момент. Используя теорему об остановке мартингала, заключаем, что

$$\mathbf{E} |\bar{S}_{\tau(\bar{x}) \wedge T} + \bar{x}|^2 = |\bar{x}|^2 + \mu \mathbf{E} [\tau(\bar{x}) \wedge T]. \quad (50)$$

В силу утверждения 7 имеет место оценка

$$\mu \mathbf{E} [\tau(\bar{x}) \wedge T] \leq CT^{1-p/2} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}).$$

Отсюда, вспоминая соотношения (49), (50), выводим, что

$$\mathbf{P}_x^+ (\bar{S}_T + \bar{x} \in F) \leq C_9 |\bar{x}|^2 \frac{A^{p-2} T^{p/2-1}}{V(M\bar{x})} + C_{10} A^{p-2} \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{V(M\bar{x})}.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ (\bar{S}_T + \bar{x} \in F) \leq C_{10} A^{p-2} \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{V(M\bar{x})}. \quad (51)$$

Наконец, из неравенств (44), (48), (51) получаем оценку

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \notin \sqrt{T}D \right) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in U \right) + \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in F \right) \leq \\ & \leq \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{V(M\bar{x})} (C_6 A^p \delta + C_{10} A^{p-2}). \end{aligned}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и такое число A , что $C_{10} A^{p-2} \leq \varepsilon/2$. Существование такого A обеспечивается условием $p < 2$. Выберем такое положительное число δ , для которого $C_6 \delta A^{p-1} \leq \varepsilon/2$. Тем самым, мы зафиксировали квадрат $D = [\delta, A] \times [\delta, A]$, причем сделали это так, что

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \notin \sqrt{T}D \right) \leq \varepsilon \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{V(M\bar{x})}.$$

Лемма 4 доказана. \square

6.2.2. Отделимость блуждания от границы квадранта.

Лемма 5. Пусть случайное блуждание $\{\bar{S}_n\}$ удовлетворяет условию (C), пусть также $D \subset K$ – ограниченное измеримое множество, отделенное от границы конуса K , то есть $\delta := \text{dist}(D, \partial K) > 0$. Тогда для всякого числа $s \in (0, 1/2)$ и всякого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ выполнено соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s} \right) = 0,$$

где

$$U_{T,s} = \{ \bar{x} \in K : \text{dist}(\bar{x}, \partial K) > T^{1/2-s} \}. \quad (52)$$

Доказательство. Зафиксируем множество D , удовлетворяющее условиям леммы 5, а также $s \in (0, 1/2)$. В силу теоремы 5 для всякого натурального T справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_{\mathbf{x}}^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j \in (T, n] : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s} \mid \tau(\bar{x}) > n \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P} \left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j \in (T, n] : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s} \right)}{m_n(\bar{x})} = 0.$$

нЕВыроЖДЕНИИ пАры ВЕтВящИхся процЕссов В оБщЕй сЛУчАЙной срЕДнЕ

Выберем T столь большим, чтобы было выполнено неравенство $\text{dist}(\sqrt{T}D, \partial K) > T^{1/2-s}$. Используя свойства условного математического ожидания, имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j \in (T, n] : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s}\right) = \\ & = \mathbf{P}\left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\right) - \\ & - \mathbf{P}\left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \bar{S}_j + \bar{x} \in U_{T,s}, j \in (T, n]\right) = \\ & = \mathbf{E}I\{\tau(\bar{x}) > T\}I\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\} \times \\ & \quad \times (m_{n-T}(\bar{S}_T + \bar{x}) - m_{n-T}(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)), \end{aligned}$$

где $\bar{w}_T = T^{1/2-s}\bar{1}$, $\bar{1} := (1, 1)$, то есть $\bar{w}_T + K = U_{T,s}$.

Применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, заключаем, что

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}I\{\tau(\bar{x}) > T\}I\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\} \frac{m_{n-T}(\bar{S}_T + \bar{x})}{m_n(\bar{x})} = \\ & = \mathbf{E}_x^+ I\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\}, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}I\{\tau(\bar{x}) > T\}I\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\} \frac{m_{n-T}(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)}{m_n(\bar{x})} = \\ & = \mathbf{E}_x^+ I\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\} \frac{V(M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T))}{V(M(\bar{S}_T + \bar{x}))}. \end{aligned}$$

Существование интегрируемых мажорант, обосновывающих последнее равенство, немедленно вытекает из рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 5, см. неравенство (26). Таким образом, справедливо представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_x^+\left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s}\right) = \\ & = \mathbf{E}_x^+ I\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\} \left(1 - \frac{V(M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T))}{V(M(\bar{S}_T + \bar{x}))}\right). \quad (53) \end{aligned}$$

На событии $\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\}$ из неравенств (23), (24) следуют соотношения

$$\begin{aligned} |M(\bar{S}_T + \bar{x})| &\geq \frac{|\bar{S}_T + \bar{x}|}{\|M^{-1}\|} \geq \frac{\text{dist}(\bar{S}_T + \bar{x}, \partial K)}{\|M^{-1}\|} \geq \frac{\delta\sqrt{T}}{\|M^{-1}\|} \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow \infty, \\ \frac{|M\bar{w}_T|}{|M(\bar{S}_T + \bar{x})|} &\leq \frac{\|M^{-1}\|\|M\|\sqrt{2} \cdot T^{1/2-s}}{\delta\sqrt{T}} \leq \frac{\|M^{-1}\|\|M\|\sqrt{2}}{\delta T^s} \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty, \\ \text{dist}(M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T), \partial MK) &\geq \frac{\delta\sqrt{T} - T^{1/2-s}}{\|M^{-1}\|} \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, из равенства (8) и соотношения (20) выводим, что при $T \rightarrow \infty$

$$\frac{V(M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T))}{V(M(\bar{S}_T + \bar{x}))} \sim \frac{g_1(M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)/|M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)|)}{g_1(M(\bar{S}_T + \bar{x})/|M(\bar{S}_T + \bar{x})|)}, \quad (54)$$

где функция g_1 задана равенством (10). При всех натуральных числах T и всех векторах $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ положим

$$\bar{A}_T(\bar{x}) := \frac{M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)}{|M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)|}, \quad \bar{B}_T(\bar{x}) := \frac{M(\bar{S}_T + \bar{x})}{|M(\bar{S}_T + \bar{x})|}.$$

На событии $\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\bar{A}_T(\bar{x}) - \bar{B}_T(\bar{x})| &\leq \frac{|M\bar{w}_T|}{|M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)|} + \\ &+ |M(\bar{S}_T + \bar{x})| \left| \frac{1}{|M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)|} - \frac{1}{|M(\bar{S}_T + \bar{x})|} \right| \leq \\ &\leq \frac{2|M\bar{w}_T|}{|M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T)|} \leq \frac{2\sqrt{2}\|M\|\|M^{-1}\|T^{1/2-s}}{\delta\sqrt{T} - T^{1/2-s}}, \quad (55) \end{aligned}$$

где правая часть стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$.

Функция g_1 определена и непрерывна на множестве $\bar{\Sigma}$, где Σ – множество из определения 2 для $K = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. В силу того, что непрерывная на компакте функция равномерно непрерывна, а также в силу оценки (55) и ее равномерности по \bar{x} , получаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое T_0 , что для всякого $T > T_0$ и всякого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ на событии $\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\}$ имеет место неравенство:

$$|g_1(\bar{A}_T(\bar{x})) - g_1(\bar{B}_T(\bar{x}))| < \varepsilon.$$

Так как множество D ограничено, то будем считать, что D лежит в шаре радиуса r с центром в начале координат. Напомним, что функция g_1 обращается в ноль только на множестве $\partial\Sigma$ (см. замечание 1). При этом случайная величина $\bar{B}_T(\bar{x})$ отделена от границы $\partial\Sigma$. Действительно, для всякого вектора \bar{x} на событии $\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\}$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \text{dist}(\bar{B}_T(\bar{x}), \partial\Sigma) &\geq \frac{\text{dist}(\bar{S}_T + \bar{x}, \partial K)}{\|M^{-1}\| |M(\bar{S}_T + \bar{x})|} \geq \\ &\geq \frac{\delta\sqrt{T}}{\|M^{-1}\| \|M\| r\sqrt{T}} \geq \frac{\delta}{\|M^{-1}\| \|M\| r} > 0. \end{aligned}$$

Отделимость \bar{B}_T от границы $\partial\Sigma$ означает, что существует число $\theta > 0$, что для всякого вектора \bar{x} справедлива оценка $g_1(\bar{B}_T(\bar{x})) > \theta > 0$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое число T_0 , что для $T > T_0$ и вектора \bar{x} на событии $\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\}$ имеет место неравенство

$$\left| 1 - \frac{g_1(\bar{A}_T(\bar{x}))}{g_1(\bar{B}_T(\bar{x}))} \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для $T > T_0$ на событии $\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{V(M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T))}{V(M(\bar{S}_T + \bar{x}))} \right| &\leq \left| 1 - \frac{g_1(\bar{A}_T(\bar{x}))}{g_1(\bar{B}_T(\bar{x}))} \right| + \varepsilon \frac{g_1(\bar{A}_T(\bar{x}))}{g_1(\bar{B}_T(\bar{x}))} \leq \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon(1 + \varepsilon) = 2\varepsilon + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Отсюда, вспоминая представление (53), получаем оценку

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s} \right) &\leq \\ &\leq \mathbf{E}_x^+ I\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\} \left| 1 - \frac{V(M(\bar{S}_T + \bar{x} - \bar{w}_T))}{V(M(\bar{S}_T + \bar{x}))} \right| \leq \\ &\leq (2\varepsilon + \varepsilon^2) \mathbf{E}_x^+ I\{\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D\} \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s} \right) \leq 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Для доказательства леммы 5 остается перейти в последнем соотношении к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$. \square

Утверждение 8. Пусть случайное блуждание $\{\bar{S}_n\}$ удовлетворяет условию (C). Тогда для всякого $\alpha > 0$ существует такой положительный параметр $C = C(\alpha)$, что для всякого достаточно большого натурального n и всякого вектора $\bar{x} \in K$ выполнено неравенство

$$\mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in K \setminus K_{n,\alpha}) \leq \frac{C \ln^2 n}{n^{p/2+1}} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}), \quad (56)$$

где

$$K_{n,\alpha} := \{\bar{z} \in K : \text{dist}(\bar{z}, \partial K) > \alpha \ln n\}. \quad (57)$$

Доказательство. Положим $A_1 = \{\bar{z} \in K : z_1 \leq \alpha \ln n\}$, $A_2 = \{\bar{z} \in K : z_2 \leq \alpha \ln n\}$. Зафиксируем $\bar{x} \in K$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in K \setminus K_{n,\alpha}) &\leq \\ &\leq \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in A_1) + \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in A_2). \end{aligned}$$

Положим $V := (-\infty, \alpha \ln n) \times \mathbb{R}$. Заметим, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in A_1) &= \\ &= \int_K \int_V \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in A_1, \bar{S}_{[n/3]} + \bar{x} \in d\bar{u}, \bar{S}_n - \bar{S}_{n-[n/3]} \in d\bar{v}) \leq \\ &\leq \int_K \int_{-\infty}^{\alpha \ln n} \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > [n/3], \bar{S}_{[n/3]} + \bar{x} \in d\bar{u}) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(S_{n-2[n/3]}^{(1)} \in (-v_1 - u_1, -v_1 - u_1 + \alpha \ln n)) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(S_j^{(1)} > v_1 - \alpha \ln n, j \leq [n/3], S_{[n/3]}^{(1)} \in dv_1) =: I. \end{aligned} \quad (58)$$

В силу неравенства концентрации (41) имеем

$$\mathbf{P}(S_{n-2[n/3]}^{(1)} \in (-v_1 - u_1, -v_1 - u_1 + \alpha \ln n)) \leq \frac{C_1 \alpha \ln n}{\sqrt{n}},$$

где C_1 не зависит ни от u_1 , ни от v_1 . Отсюда вытекает неравенство

$$I \leq \frac{C_1 \alpha \ln n}{\sqrt{n}} \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > [n/3]) \mathbf{P}(S_j^{(1)} > S_{[n/3]}^{(1)} - \alpha \ln n, j \leq [n/3]). \quad (59)$$

Положим

$$\tilde{S}_j = S_{[n/3]}^{(1)} - S_{[n/3]-j}^{(1)}, \quad j = 0, 1, \dots, [n/3].$$

В силу утверждения 5 справедлива оценка

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left(S_j^{(1)} > S_{[n/3]}^{(1)} - \alpha \ln n, j \leq [n/3] \right) &= \mathbf{P} \left(\tilde{S}_j < \alpha \ln n, j \leq [n/3] \right) \leq \\ &\leq \frac{C_2 \alpha \ln n}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Приняв во внимание неравенство (17), из соотношений (58), (59) и (60) выводим оценку

$$\mathbf{P} \left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in A_1 \right) \leq \frac{C \ln^2 n}{n^{p/2+1}} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}).$$

Проводя те же рассуждения для множества A_2 , получаем требуемое. \square

Лемма 6. Пусть случайное блуждание $\{\bar{S}_n\}$ удовлетворяет условию (C), коэффициент корреляции компонент шага блуждания ρ лежит в интервале $(0, 1)$, $D \subset K$ – ограниченное измеримое множество, $\text{dist}(D, \partial K) > 0$. Тогда для всякого числа $\alpha > 0$ и всякого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \right) = 0,$$

где множества $K_{j,\alpha}$ при $j \in \mathbb{N}$ определены соотношением (57).

Доказательство. Зафиксируем $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ и множество D , удовлетворяющее условиям леммы 6. Для $s \in (0, 1/2)$ и $T \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \right) &\leq \\ &\leq \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right) + \\ &+ \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \notin U_{T,s} \right), \end{aligned}$$

где $U_{T,s}$ определено соотношением (52). Отсюда, воспользовавшись леммой 5, получаем, что

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \right) &\leq \\ &\leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right). \end{aligned}$$

Пусть $n > T$,

$$A_n = \left\{ \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j \in (T, n] : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right\}.$$

В силу теоремы 5 для $T \in \mathbb{N}$ справедливо представление

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}_x^+ \left(\bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} (A_n | \tau(\bar{x}) > n). \end{aligned}$$

Таким образом, для доказательства леммы достаточно проверить справедливость соотношения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p/2} \mathbf{P} (\{\tau(\bar{x}) > n\} \cap A_n) = 0.$$

Пусть $n > T$ – фиксированные натуральные числа. Ясно, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} (\{\tau(\bar{x}) > n\} \cap A_n) \leq \\ & \leq \sum_{j=T}^{n-1} \mathbf{P} \left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right) + \\ & + \mathbf{P} (\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in K \setminus K_{n,\alpha}). \end{aligned} \quad (61)$$

Зафиксируем натуральное число $j \in [T, n-1]$. В силу свойств условного математического ожидания

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right) = \\ & = \mathbf{E} m_{n-j} (\bar{S}_j + \bar{x}) I \left\{ \tau(\bar{x}) > j, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Комбинируя неравенства (13) и (17), получаем оценку

$$\begin{aligned} & m_{n-j} (\bar{S}_j + \bar{x}) \leq \\ & \leq \frac{C_0}{(n-j)^{p/2}} |\bar{x}_0 + M (\bar{S}_j + \bar{x})|^{p-1} \text{dist} (\bar{x}_0 + M (\bar{S}_j + \bar{x}), \partial MK). \end{aligned} \quad (63)$$

Отметим, что существуют такие положительные параметры C_1 и C_2 , что при всех достаточно больших $T \in \mathbb{N}$ и $\bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}$, где $j \geq T$, справедливы оценки:

$$\begin{aligned} & |\bar{x}_0 + M (\bar{S}_j + \bar{x})|^{p-1} \leq C_1 |\bar{S}_j + \bar{x}|^{p-1}, \\ & \text{dist} (\bar{x}_0 + M (\bar{S}_j + \bar{x}), \partial MK) \leq C_2 \text{dist} (\bar{S}_j + \bar{x}, \partial K) \leq \alpha C_2 \ln j. \end{aligned}$$

Отсюда и из (62), принимая во внимание неравенство (63), выводим, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{T}D, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right) \leq \\ & \leq \frac{C \ln j}{(n-j)^{p/2}} \mathbf{E} |\bar{S}_j + \bar{x}|^{p-1} I \{ \tau(\bar{x}) > j, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \} =: \\ & =: \frac{C \ln j}{(n-j)^{p/2}} E_j. \end{aligned} \quad (64)$$

Выберем положительное число h таким образом, чтобы было выполнено двойное неравенство

$$\frac{2-p/2}{3-p} < h < \frac{p/2}{p-1}. \quad (65)$$

Существование такого h вытекает из условия $p \in (1, 2)$. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} E_j &= \mathbf{E} |\bar{S}_j + \bar{x}|^{p-1} I \{ \tau(\bar{x}) > j, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}, |\bar{S}_j + \bar{x}| < j^h \} + \\ &+ \mathbf{E} |\bar{S}_j + \bar{x}|^{p-1} I \{ \tau(\bar{x}) > j, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s}, |\bar{S}_j + \bar{x}| \geq j^h \} =: \\ &=: E_{j,1} + E_{j,2}. \end{aligned}$$

В силу неравенства (56)

$$\begin{aligned} E_{j,1} &\leq j^{h(p-1)} \mathbf{P} \left(\tau(\bar{x}) > j, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \right) \leq \\ &\leq C_3 (\ln j)^2 \cdot j^{h(p-1)-p/2-1} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}). \end{aligned}$$

Из второго неравенства в (65) вытекает соотношение $h(p-1)-p/2-1 < -1$. Поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что

$$\ln j \cdot E_{j,1} \leq \frac{C_4 u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{j^{1+\delta_1}} \quad (66)$$

для всех достаточно больших натуральных j . Также верна оценка

$$E_{j,2} \leq j^{h(p-3)} \mathbf{E} |\bar{S}_j + \bar{x}|^2 I \{ \tau(\bar{x}) > j \} \leq j^{h(p-3)} \mathbf{E} |\bar{x} + \bar{S}_{\tau(\bar{x}) \wedge j}|^2. \quad (67)$$

При фиксированном векторе $\bar{x} \in K$ для всех j из (50) и (43) выводим соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{E} |\bar{x} + \bar{S}_{\tau(\bar{x}) \wedge j}|^2 &= |\bar{x}|^2 + \mathbf{E} |\bar{X}|^2 \mathbf{E} [\tau(\bar{x}) \wedge j] \leq \\ &\leq |\bar{x}|^2 + C_5 j^{1-p/2} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}) \leq C_6 j^{1-p/2} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (67) для достаточно больших j получаем оценку

$$E_{j,2} \leq C_7 j^{h(p-3)+1-p/2} u(\bar{x}_0 + M\bar{x}).$$

Приняв во внимание неравенство $h(p-3)+1-p/2 < -1$, заключаем, что существует такое положительное число δ_2 , что

$$\ln j \cdot E_{j,2} \leq \frac{C_8 u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{j^{1+\delta_2}} \quad (68)$$

при всех достаточно больших j . Положим $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Из (66) и (68) получаем, что

$$\ln j \cdot E_j \leq \frac{C}{j^{1+\delta}} \quad (69)$$

для достаточно больших j . Если T выбрано достаточно большим, то при всех натуральных $j \in [T, n-1]$ из соотношений (64) и (69) получаем неравенство

$$\mathbf{P} \left(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_T + \bar{x} \in \sqrt{TD}, \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha} \cap U_{T,s} \right) \leq \frac{\tilde{C}}{j^{1+\delta}(n-j)^{p/2}},$$

где \tilde{C} не зависит ни от n , ни от j . Отсюда, приняв во внимание (61), заключаем, что

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p/2} \mathbf{P}(\{\tau(\bar{x}) > n\} \cap A_n) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{p/2} \tilde{C} \sum_{j=T}^{n-1} \frac{1}{j^{1+\delta}(n-j)^{p/2}} + \\ & + \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{p/2} \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in K \setminus K_{n,\alpha}). \end{aligned}$$

В силу неравенства (56)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{p/2} \mathbf{P}(\tau(\bar{x}) > n, \bar{S}_n + \bar{x} \in K \setminus K_{n,\alpha}) = 0.$$

Заметим, что справедливы оценки

$$n^{p/2} \sum_{j=T}^{n/2-1} \frac{1}{j^{1+\delta}(n-j)^{p/2}} \leq 2^{p/2} \sum_{j=T}^{n/2-1} \frac{1}{j^{1+\delta}} \leq 2^{p/2} \sum_{j=T}^{+\infty} \frac{1}{j^{1+\delta}}; \quad (70)$$

$$n^{p/2} \sum_{j=n/2}^{n-1} \frac{1}{j^{1+\delta}(n-j)^{p/2}} \leq 2^{1+\delta} n^{p/2-1-\delta} \sum_{j=1}^{n/2} \frac{1}{j^{p/2}} \leq \hat{C} n^{p/2-1-\delta+1-p/2} \leq \frac{\hat{C}}{n^\delta}. \quad (71)$$

Остается заметить, что правая часть неравенства (70) стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$, а правая часть неравенства (71) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Лемма 6 доказана. \square

Следствие 3. Пусть случайное блуждание $\{\bar{S}_n\}$ удовлетворяет условию (C), коэффициент корреляции компонент шага блуждания ρ лежит в интервале $(0, 1)$. Тогда для всякого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ и для всякого положительного числа α справедливо равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ (\exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha}) = 0,$$

где

$$K_{j,\alpha} = \{\bar{x} \in K : \text{dist}(\bar{x}, \partial K) > \alpha \ln j\}.$$

Доказательство. Фиксируем положительное число ε и вектор $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$. Найдем такой квадрат D , что выполнено неравенство (42). В силу леммы 6 имеем соотношение

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ (\exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha}) &\leq \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ (\bar{S}_T + \bar{x} \notin \sqrt{TD}) \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{u(\bar{x}_0 + M\bar{x})}{V(M\bar{x})}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$, получаем равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_x^+ (\exists j > T : \bar{S}_j + \bar{x} \in K \setminus K_{j,\alpha}) = 0.$$

□

Следствие 4. Пусть случайное блуждание $\{\bar{S}_n\}$ удовлетворяет условию (C), коэффициент корреляции компонент шага блуждания ρ лежит в интервале $(0, 1)$. Тогда для всякого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$ имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(i)} = +\infty, \quad \mathbf{P}_x^+ - \text{n.н.}, i = 1, 2.$$

6.3. Доказательство леммы 3. В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение, связывающее вероятность невырождения ветвящегося процесса при фиксированной среде с сопровождающим блужданием и случайными величинами $\xi^{(\cdot)}$, определенными соотношением (4).

Утверждение 9. Пусть $\{\bar{Z}_n\}$ – группа из N ветвящихся процессов в общей случайной среде, $\{\bar{S}_n\}$ – ее сопровождающее блуждание, тогда для каждого $i \in \{1, 2, \dots, N\}$:

- справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_f (Z_n^{(i)} > 0) &= \\ &= \left(\exp(-S_n^{(i)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \exp(-S_k^{(i)}) g_k^{(i)} (f_{k+2,n}^{(i)}(0)) \right)^{-1}, \quad (72) \end{aligned}$$

где

$$f_{k,n}^{(i)}(t) := f_k^{(i)} \circ f_{k+1}^{(i)} \circ \dots \circ f_n^{(i)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad f_{n+1,n}^{(i)}(t) := t,$$

$$g_k^{(i)}(t) := \frac{1}{1 - f_{k+1}^{(i)}(t)} - \frac{1}{\left(f_{k+1}^{(i)}\right)'(1) \cdot (1 - t)}, \quad t \in [0, 1),$$

$f^{(\cdot)}$ – производящие функции из определения случайной среды (см. (1));

- имеет место неравенство

$$\mathbf{P}_f(Z_n^{(i)} > 0) \geq \left(\exp(-S_n^{(i)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^{(i)} \exp(-S_k^{(i)}) \right)^{-1}, \quad (73)$$

где $\xi^{(\cdot)}$ определяются соотношением (4).

Доказательство. См. лемму 19.5, [11]. \square

Для того, чтобы доказать лемму 3, нам потребуется следующая техническая лемма, показывающая, что для достаточно большого β с вероятностью 1 по мере \mathbf{P}^+ произойдет лишь конечное число событий $\{\xi_k^{(\cdot)} > k^\beta\}$, $k \in \mathbb{N}$. Всюду ниже буквой q будем обозначать параметр из теоремы 1, то есть такое положительное число, что

$$\mathbf{E} \left(\xi_0^{(1)} \right)^q < \infty, \quad \mathbf{E} \left(\xi_0^{(2)} \right)^q < \infty.$$

Лемма 7. В условиях теоремы 1 для всякого числа $\beta > 2/(q(2-p))$ и всякого вектора $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}_x^+ \left(\xi_k^{(i)} > k^\beta \right) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Доказательство. Зафиксируем вектор $\bar{x} \in \mathcal{X}_V$, $k \in \mathbb{N}$ и индекс $i \in \{1, 2\}$. Для того, чтобы не загромождать обозначения, будем опускать верхний индекс у случайных величин $\xi_k^{(i)}$. Согласно определению меры \mathbf{P}^+ имеем равенство:

$$V(M\bar{x}) \mathbf{P}_x^+ \left(\xi_k > k^\beta \right) = \mathbf{E}V \left(M(\bar{x} + \bar{S}_{k+1}) I\{\tau(\bar{x}) > k+1\} I\{\xi_k > k^\beta\} \right). \quad (74)$$

Для вектора $\bar{w} = (w_1, w_2)$ положим $\bar{w}^+ = (w_1 I\{w_1 \geq 0\}, w_2 I\{w_2 \geq 0\})$. В силу соотношений (21), (22) на событии $\{\tau(\bar{x}) > k+1\}$ справедлива цепочка оценок

$$\begin{aligned} V \left(M(\bar{x} + \bar{S}_{k+1}) \right) &\leq V \left(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + (M\bar{X}_{k+1})^+ \right) \leq \\ &\leq Cu \left(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0 + (M\bar{X}_{k+1})^+ \right). \end{aligned} \quad (75)$$

Отметим, что для $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in MK$ выполнено неравенство $\text{dist}(\bar{z}_1 + \bar{z}_2, \partial MK) \geq \text{dist}(\bar{z}_i, \partial MK)$, $i = 1, 2$. Таким образом, если $\bar{x} + \bar{S}_k \in K$, то

$$\text{dist}(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0, \partial MK) \geq \text{dist}(\bar{x}_0, \partial MK) > 0.$$

Воспользовавшись неравенством (25) для переменных $M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0$ и $(M\bar{X}_{k+1})^+$, получим оценку

$$\begin{aligned} u(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0 + (M\bar{X}_{k+1})^+) &\leq \\ &\leq C_1 \max\left(\left|(M\bar{X}_{k+1})^+\right|^p, 1\right) u(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0). \end{aligned}$$

Отсюда, из равенства (74) и неравенства (75) следует, что

$$\begin{aligned} V(M\bar{x}) \mathbf{P}_x^+(\xi_k > k^\beta) &\leq \\ &\leq CC_1 \mathbf{E}u(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0) I\{\tau(\bar{x}) > k+1\} \times \\ &\quad \times \max\left(\left|(M\bar{X}_{k+1})^+\right|^p, 1\right) I\{\xi_k > k^\beta\} \leq \\ &\leq CC_1 \mathbf{E}u(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0) I\{\tau(\bar{x}) > k\} \times \\ &\quad \times \mathbf{E} \max\left(\left|(M\bar{X}_{k+1})^+\right|^p, 1\right) I\{\xi_k > k^\beta\}. \end{aligned} \tag{76}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}u(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0) I\{\tau(\bar{x}) > k\} &\leq \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}u(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0) I\{\tau(\bar{x} + M^{-1}\bar{x}_0) > k\} = V(M\bar{x} + \bar{x}_0), \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из соотношения (18). Отсюда заключаем, что существует такое число C_2 , что

$$\mathbf{E}u(M(\bar{x} + \bar{S}_k) + \bar{x}_0) I\{\tau(\bar{x}) > k\} \leq C_2 V(M\bar{x} + \bar{x}_0) \tag{77}$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Для второго множителя в правой части соотношения (76) имеем неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \max\left(\left|(M\bar{X}_{k+1})^+\right|^p, 1\right) I\{\xi_k > k^\beta\} &\leq \\ &\leq \mathbf{P}(\xi_k > k^\beta) + \mathbf{E}\left|(M\bar{X}_{k+1})^+\right|^p I\{\xi_k > k^\beta\}. \end{aligned}$$

Применив неравенство Гельдера с показателями $2/p$ и $2/(2-p)$, получим

$$\mathbf{E}\left|(M\bar{X}_{k+1})^+\right|^p I\{\xi_k > k^\beta\} \leq \left(\mathbf{E}\left|(M\bar{X}_{k+1})^+\right|^2\right)^{p/2} \cdot (\mathbf{P}(\xi_k > k^\beta))^{(2-p)/2}.$$

При этом

$$\mathbf{E} \left| (M\bar{X}_{k+1})^+ \right|^2 \leq \mathbf{E} |M\bar{X}_{k+1}|^2 < \infty.$$

В силу неравенства Маркова

$$\mathbf{P} (\xi_k > k^\beta) \leq \frac{\mathbf{E}\xi^q}{k^{\beta q}}.$$

Отсюда выводим, что

$$\mathbf{E} \max \left(\left| (M\bar{X}_{k+1})^+ \right|^p, 1 \right) I\{\xi_k > k^\beta\} \leq \frac{\mathbf{E}\xi^q}{k^{\beta q}} + C_3 \left(\frac{1}{k^{\beta q}} \right)^{(2-p)/2} \leq \frac{C_4}{k^{1+\varepsilon}} \quad (78)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Из неравенства (76), приняв во внимание соотношения (77), (78), получаем при всех натуральных k следующую оценку:

$$\mathbf{P}_x^+ (\xi_k > k^\beta) \leq CC_1C_2C_4 \frac{V(M\bar{x} + \bar{x}_0)}{V(M\bar{x})} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} = \frac{C(\bar{x})}{k^{1+\varepsilon}}.$$

Суммирование последнего неравенства по всем натуральным k завершает доказательство леммы 7. \square

Наконец, мы готовы привести доказательство леммы 3.

Доказательство леммы 3. Зафиксируем $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathcal{X}_V$. В силу представления (72) случайная величина $\mathbf{P}_f(\bar{Z}_n > 0)$ является \mathcal{F}_n -измеримой. Последовательность $\{\mathbf{P}_f(\bar{Z}_n > 0)\}$ является монотонной и ограниченной, следовательно, $\{\mathbf{P}_f(\bar{Z}_n > 0)\}$ сходится \mathbf{P}_x^+ -п.н.. В силу теоремы 5 существует предел

$$\begin{aligned} v(\bar{x}) &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\bar{Z}_n > 0 | \tau(\bar{x}) > n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(\mathbf{P}_f(\bar{Z}_n > 0) | \tau(\bar{x}) > n) = \\ &= \mathbf{E}_x^+ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_f(\bar{Z}_n > 0). \end{aligned}$$

Остается проверить положительность предельной функции v в точке \bar{x} . Зафиксируем числа $\beta = 1 + 2/(q(2-p))$ и $\alpha = 2 + \beta$. При целых неотрицательных T и вещественных u и w положим

$$\begin{aligned} A_T &:= \left\{ \xi_k^{(i)} \leq u, \exp(-S_k^{(i)}) \leq w, i = 1, 2, k = 0, \dots, T-1 \right\}, \\ B_T &:= \left\{ \xi_k^{(i)} \leq k^\beta, k \geq T, i = 1, 2 \right\}, \quad G_T := \left\{ \bar{S}_j + \bar{x} \in K_{j,\alpha}, j \geq T \right\}, \\ K_{j,\alpha} &:= \left\{ \bar{z} \in K : \text{dist}(\bar{z}, \partial K) > \alpha \ln j \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x^+(A_T \cap B_T \cap G_T) &= \\ &= \mathbf{P}_x^+(A_T) - \mathbf{P}_x^+(A_T \cap \bar{B}_T) - \mathbf{P}_x^+(A_T \cap B_T \cap \bar{G}_T) \geq \\ &\geq \mathbf{P}_x^+(A_T) - \mathbf{P}_x^+(\bar{B}_T) - \mathbf{P}_x^+(\bar{G}_T). \end{aligned} \quad (79)$$

Выберем число $\varepsilon \in (0, 1/3)$. В силу следствия 3 из леммы 6 можем найти такое T_1 , что для всякого $T > T_1$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}_x^+(\bar{G}_T) = \mathbf{P}_x^+(\exists j \geq T : \bar{S}_j + \bar{t} \in K \setminus K_{j,\alpha}) \leq \varepsilon. \quad (80)$$

В силу леммы 7

$$\sum_k \mathbf{P}_x^+(\xi_k^{(i)} > k^\beta) < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда вытекает существование такого T_2 , что

$$\mathbf{P}_x^+(\bar{B}_T) \leq \sum_{k=T}^{\infty} \sum_{i=1}^2 \mathbf{P}_x^+(\xi_k^{(i)} > k^\beta) < \varepsilon \quad (81)$$

для любого $T > T_2$. Зафиксируем $T > \max(T_1, T_2)$. Выберем такие u и w , для которых

$$\mathbf{P}_x^+(A_T) \geq 1 - \varepsilon. \quad (82)$$

Наконец, из соотношения (79), приняв во внимание неравенства (80), (81), (82), получим оценку

$$\mathbf{P}_x^+(A_T \cap B_T \cap G_T) \geq 1 - 3\varepsilon > 0.$$

В силу неравенства (73) и следствия 4 из леммы 6 имеем

$$\begin{aligned} v(\bar{x}) &= \mathbf{E}_x^+ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_f(\bar{Z}_n > 0) \geq \\ &\geq \mathbf{E}_x^+ \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^2 \left(\exp(-S_n^{(i)}) + \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^{(i)} \exp(-S_k^{(i)}) \right)^{-1} = \mathbf{E}_x^+ \zeta^{(1)} \zeta^{(2)}, \\ \zeta^{(i)} &:= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(i)} \exp(-S_k^{(i)}) \right)^{-1}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Отметим, что при $i = 1, 2$ имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \zeta^{(i)} I\{A_T \cap B_T \cap G_T\} &\geq \left(ulT + \sum_{k=T}^{\infty} \frac{e^{x_i}}{k^{\alpha-\beta}} \right)^{-1} I\{A_T \cap B_T \cap G_T\} \geq \\ &\geq (ulT + 2e^{x_i})^{-1} I\{A_T \cap B_T \cap G_T\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку

$$v(\bar{x}) \geq \mathbf{E}_x^+ \zeta^{(1)} \zeta^{(2)} \geq \frac{1}{(ulT + 2e^{x_1})(ulT + 2e^{x_2})} \mathbf{P}_x^+ (A_T \cap B_T \cap G_T) > 0,$$

которая завершает доказательство леммы 3. □

7 Заключение

Пользуюсь возможностью выразить благодарность А.В. Шкляеву за всестороннюю поддержку работы, советы и замечания и профессору В.А. Ватутину, чьи замечания способствовали значительному улучшению текста статьи.

References

- [1] W. Smith, W. Wilkinson, *On branching processes in random environments*, The Annals of Mathematical Statistics, 814–827, 1969.
- [2] A. Agresti, *On the extinction times of varying and random environment branching processes*, Journal of Applied Probability, 12(1):39–46, 1975.
- [3] V.A. Vatutin, E.E. Dyakonova, *Multitype branching processes in random environment*, Russian Math. Surveys, 76:6 (2021), 1019–1063.
- [4] M.V. Kozlov, *On the Asymptotic Behavior of the Probability of Non-Extinction for Critical Branching Processes in a Random Environment*, Theory Probab. Appl., 21:4 (1977), 791–804.
- [5] J. Geiger, G. Kersting, *The survival probability of a critical branching process in random environment*, Theory Probab. Appl., 45:3 (2001), 517–525.
- [6] V.I. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting, V.A. Vatutin, *Criticality for branching processes in random environment*, The Annals of Probability, 33:2(2005), 645–673.
- [7] D.Denisov, V. Wachtel, *Random walks in cones*, The Annals of Probability, 43:3(2015): 992-1044.
- [8] D.Denisov, V. Wachtel, *Random walks in cones revisited* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist, 60:1(2024), 126-166.
- [9] N. Elizarov, V. Wachtel, *Co-existence of branching populations in random environment*, 2025.
- [10] G. Kersting, V.Vatutin, *Discrete time branching processes in random environment*, John Wiley & Sons, 2017.
- [11] V.I. Afanasyev, *Random walks and branching processes*, Lect. courses NOTS, 6, MIAN, 2007, 3–187.
- [12] V.V. Petrov, *Sums of Independent Random Variables*, Springer Science & Business Media, 2012.

НЕВЫРОЖДЕНИИ ПАРЫ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ОБЩЕЙ СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

DMITRII ANDREEVICH АРАПОВ
LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY,
LENINSKIYE GORY, 1,
119991, MOSCOW, RUSSIAN FEDERATION
Email address: dmitrii.arapov@math.msu.ru