S(e)MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Стр. 1–16 (2026) УДК 517.9
https://doi.org/ MSC 34B45, 47B06

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ И АСИМПТОТИКА ПОПЕРЕЧНИКОВ ПО КОЛМОГОРОВУ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ЗВЁЗДНОМ ГРАФЕ С УСЛОВИЯМИ РОБЕНА

А.Л. СИНАЙ

ПРЕДСТАВЛЕНО

Abstract: For a star graph with m edges ($m \geq 2$) endowed with Robin boundary conditions at the endpoints and a δ-type condition at the central vertex, exact formulas for the Kolmogorov widths d_n are obtained in terms of the roots of two characteristic equations. The spectral problem is reduced to two Sturm–Liouville problems; exact equations are derived for the symmetric and standard branches, the alternation of roots is proved, and a piecewise explicit formula for d_n is found. A uniform asymptotics on compact subsets of the parameter space is established, and the critical case of loss of strict positive definiteness is investigated.

Keywords: Kolmogorov widths, star graph, quantum graph, Robin boundary condition, Sturm–Liouville problem, eigenvalue asymptotics, critical case

1 Введение

Пусть H – гильбертово пространство, $T\colon H \to H$ – компактный самосопряжённый положительный оператор. Колмогоровским поперечником

Sinai, A.L., Exact formulas and asymptotics of Kolmogorov widths for the Laplace operator on a star graph with Robin conditions.

порядка $n \in \mathbb{N}_0$ образа единичного шара $T(B_H)$ называется

$$d_n(T(B_H), H) = \inf_{\substack{L_n \subset H \\ \dim L_n \le n}} \sup_{x \in B_H} \inf_{y \in L_n} \|Tx - y\|_H.$$

Для компактного самосопряжённого положительного оператора поперечники совпадают с его собственными значениями, занумерованными по убыванию:

$$d_n\big(T(B_H), H\big) = \lambda_{n+1}(T).$$

Общая теория поперечников и s-чисел изложена в [1, 2, 3, 4]. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов получены в [5]; верхние оценки колмогоровских поперечников для интегральных операторов с экспоненциальным ядром даны в [6].

Спектральная теория дифференциальных операторов на метрических графах (квантовых графах) систематически изложена в монографиях [7, 8], а также в недавней статье [9], где для общих деревьев с условиями Робена-Кирхгофа получены асимптотики собственных значений. Граничные условия Робена с параметрами изучались в [10, 11]. Для эволюционных уравнений на сетях эффективны методы полугрупп операторов [12]. Изучение поперечников операторов на графах продолжает классическую программу Колмогорова-Тихомирова.

Поскольку $d_n = \lambda_{n+1}$, задача сводится к вычислению спектра; для рассматриваемой звезды с условиями Робена это удаётся сделать явно. Аппроксимативные характеристики соболевских вложений на метрических графах изучались М. Соломяком [13], где получены равномерные оценки поперечников с точными константами. Аппроксимационные числа операторов типа Харди на деревьях исследовались в [14]. Эти работы дают универсальные оценки и асимптотики для широких классов, но не содержат явных формул для поперечников конкретных дифференциальных операторов на графах с нестандартными граничными условиями.

Явные формулы для поперечников необходимы при построении оптимальных аппроксимаций решений краевых задач на графах и в обратных спектральных задачах. Звезда с m рёбрами ($m \ge 2$) – простейший граф с ветвлением, допускающий явное спектральное разложение. Выбор δ-условия в центре и условий Робена на внешних вершинах обеспечивает баланс между физической содержательностью и аналитической разрешимостью, а симметричный случай $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \alpha$ позволяет выделить влияние числа рёбер m на поведение поперечников. В этой связи исследуется оператор $T = L_{\alpha,\gamma}^{-1}$, где $L_{\alpha,\gamma}$ – дифференциальный оператор второго порядка на этой звезде, действующий как $L_{\alpha,\gamma} = -\frac{d^2}{dx^2}$ на каждом ребре, с δ-условием в центре (непрерывность и баланс потоков с коэффициентом γ) и условиями Робена $u'(1) + \alpha u(1) = 0$ на внешних вершинах. Все результаты получены для произвольного фиксированного $m \ge 2$ и содержат явную зависимость от числа рёбер.

Доказано, что спектр T состоит из двух серий, отвечающих симметричной и стандартной ветвям, и установлено правило чередования соответствующих корней (теорема 2). На основе этого получена кусочно-явная формула для поперечников (теорема 3). Кроме того, найдены равномерные асимптотические разложения d_n при $n \to \infty$ с явными коэффициентами (теорема 4), описан критический переход при $\gamma \to \gamma_{\mathrm{crit}}$, когда квадратичная форма теряет строгую положительную определённость, и исследована асимптотика низшего собственного значения при $\gamma \searrow \gamma_{\mathrm{crit}}$.

2 Спектральное разложение и явные формулы для поперечников

Рассмотрим звёздный граф Γ, состоящий из m рёбер $e_1, \dots, e_m$ единичной длины ($m \geq 2$), соединённых в вершине $v = 0$. Координату на каждом ребре обозначим $x \in [0,1]$, причём $x = 0$ отвечает центру, а $x = 1$ – внешнему концу. Пространство $L^2(\Gamma) = \bigoplus_{j=1}^m L^2[0,1]$; элементы $y = (y_1, \dots, y_m)$.

Оператор $L_{\alpha,\gamma}$ задаётся дифференциальным выражением

$$L_{\alpha,\gamma}\, y = (-y_1'', \dots, -y_m''),$$

на области определения $\bigoplus_{j=1}^m H^2[0,1]$ с граничными условиями

$$y_1(0) = \cdots = y_m(0) =: y(0), \qquad \sum_{j=1}^m y_j'(0) = \gamma\, y(0), \tag{1}$$

$$y_j'(1) + \alpha_j\, y_j(1) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \tag{2}$$

где $\alpha_j > -1$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Квадратичная форма оператора имеет вид

$$Q_{\alpha,\gamma}[y] = \sum_{j=1}^m \int_0^1 |y_j'|^2\, dx + \sum_{j=1}^m \alpha_j |y_j(1)|^2 + \gamma |y(0)|^2, \tag{3}$$

и определена на $\bigoplus_{j=1}^m H^1[0,1]$ с условием непрерывности $y_1(0) = \cdots = y_m(0)$.

Лемма 1. *При $\alpha_j > -1$ для любого y из области определения $Q_{\alpha,\gamma}$ выполнено*

$$\sum_{j=1}^m \Big(\int_0^1 |y_j'|^2\, dx + \alpha_j |y_j(1)|^2 \Big) \geq \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{1+\alpha_j}\, |y_j(0)|^2.$$

Доказательство. Зафиксируем номер ребра j и рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J[y] = \int_0^1 |y'(x)|^2\, dx + \alpha_j |y(1)|^2$$

на множестве функций $y \in H^1[0,1]$ с фиксированным значением $y(0) = c$. Подынтегральное выражение не зависит от y, поэтому уравнение Эйлера–Лагранжа имеет вид $2y'' = 0$, откуда y – линейная функция:

$$y(x) = c + (y(1) - c)x.$$

Подставим эту функцию в граничное условие $y'(1) + \alpha_j y(1) = 0$, которое выделяет минимизирующую функцию среди всех линейных. Имеем $y'(1) = y(1) - c$, следовательно,

$$(y(1) - c) + \alpha_j y(1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(1) = \frac{c}{1 + \alpha_j}.$$

Вычислим значение функционала на этой функции:

$$J[y] = \int_0^1 (y(1) - c)^2\,dx + \alpha_j \Big(\frac{c}{1 + \alpha_j}\Big)^2 = (y(1) - c)^2 + \alpha_j \frac{c^2}{(1 + \alpha_j)^2}.$$

Подставляя $y(1) - c = c\big(\frac{1}{1+\alpha_j} - 1\big) = -\frac{\alpha_j}{1+\alpha_j}c$, получаем

$$J[y] = \frac{\alpha_j^2}{(1 + \alpha_j)^2}c^2 + \frac{\alpha_j}{(1 + \alpha_j)^2}c^2 = \frac{\alpha_j}{1 + \alpha_j}c^2.$$

Для любой другой функции y с тем же $y(0) = c$ значение $J[y]$ не меньше этого минимума (строго больше, если y нелинейна или не удовлетворяет правому граничному условию). Таким образом,

$$\int_0^1 |y_j'|^2\,dx + \alpha_j |y_j(1)|^2 \geq \frac{\alpha_j}{1 + \alpha_j}|y_j(0)|^2.$$

Суммируя это неравенство по $j = 1, \ldots, m$ и учитывая, что в силу непрерывности в центре $y_j(0) = y(0)$ для всех j, приходим к утверждению леммы. □

Предложение 1. *Пусть $\alpha_j > -1$ и выполнено условие*

$$\gamma > -\sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{1 + \alpha_j}. \tag{4}$$

Тогда квадратичная форма $Q_{\alpha,\gamma}$ строго положительна и коэрцитивна на $H^1(\Gamma)$: существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $y \in H^1(\Gamma)$ с условием непрерывности в центре

$$Q_{\alpha,\gamma}[y] \geq \varepsilon \|y\|^2_{H^1(\Gamma)}.$$

Следовательно, оператор $L_{\alpha,\gamma}$, ассоциированный с этой формой, является положительно определённым самосопряжённым оператором в $L^2(\Gamma)$, а обратный оператор $T_{\alpha,\gamma} = L_{\alpha,\gamma}^{-1}$ компактен и самосопряжён.

Доказательство. Обозначим $c_0 := \sum_{j=1}^m \frac{\alpha_j}{1+\alpha_j}$. Из леммы 1 и условия непрерывности $y_j(0) = y(0)$ немедленно получаем

$$Q_{\alpha,\gamma}[y] \geq (c_0 + \gamma)|y(0)|^2.$$

По условию (4) величина $c_0 + \gamma > 0$, поэтому $Q_{\alpha,\gamma}[y] \ge 0$, причём из $Q[y] = 0$ следует $y(0) = 0$.

Покажем строгую положительность. Если $Q[y] = 0$, то $y(0) = 0$ и

$$0 = Q[y] = \sum_{j=1}^{m} \Big(\int_0^1 |y_j'|^2 \, dx + \alpha_j |y_j(1)|^2 \Big).$$

Для каждого ребра с $y_j(0) = 0$ минимум $\int_0^1 |y'|^2 \, dx$ при фиксированном $y_j(1)$ достигается на линейной функции $y(x) = y_j(1)x$ и равен $|y_j(1)|^2$. Поэтому

$$\int_0^1 |y_j'|^2 \, dx + \alpha_j |y_j(1)|^2 \ge (1 + \alpha_j) |y_j(1)|^2 \ge 0,$$

так как $1 + \alpha_j > 0$. Следовательно, каждое слагаемое неотрицательно, и их сумма равна нулю только при $y_j(1) = 0$ и линейности y_j, что вместе с $y_j(0) = 0$ даёт $y_j \equiv 0$. Таким образом, $Q[y] > 0$ при $y \ne 0$.

Установим эквивалентность нормы графика H^1-норме. Представим каждую компоненту в виде

$$y_j(x) = y(0) + u_j(x), \qquad u_j \in H^1(0,1), \; u_j(0) = 0.$$

Тогда $\int_0^1 |y_j'|^2 = \int_0^1 |u_j'|^2$. Используя неравенство $|u_j(1)|^2 \le \int_0^1 |u_j'|^2 \, dx$ (следствие неравенства Коши–Буняковского) и элементарную оценку

$$|y(0) + u_j(1)|^2 \le 2|y(0)|^2 + 2|u_j(1)|^2,$$

получаем

$$\alpha_j |y_j(1)|^2 \ge -2|\alpha_j| \big(|y(0)|^2 + \int_0^1 |u_j'|^2 \, dx \big).$$

Следовательно,

$$Q[y] \ge \sum_{j=1}^{m} \big(1 - 2|\alpha_j| \big) \int_0^1 |u_j'|^2 + \Big(\gamma - 2 \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \Big) |y(0)|^2.$$

С другой стороны,

$$\|y\|_{L^2}^2 \le 2m |y(0)|^2 + 2 \sum_{j=1}^{m} \int_0^1 |u_j|^2.$$

В силу неравенства Пуанкаре для функций с нулевым следом на конце $\int_0^1 |u_j|^2 \le \frac{4}{\pi^2} \int_0^1 |u_j'|^2$ для $u_j(0) = 0$. Поэтому для любого $\lambda > 0$

$$Q[y] + \lambda \|y\|_{L^2}^2 \ge \sum_{j=1}^{m} \Big(1 - 2|\alpha_j| + \frac{8\lambda}{\pi^2} \Big) \int_0^1 |u_j'|^2 + \Big(\gamma - 2 \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| + 2m\lambda \Big) |y(0)|^2.$$

При достаточно большом λ оба коэффициента положительны, и существует $c_1 > 0$ такое, что

$$Q[y] + \lambda \|y\|_{L^2}^2 \geq c_1 \Big(\sum_{j=1}^{m} \int_0^1 |u_j'|^2 + |y(0)|^2 \Big).$$

Правая часть эквивалентна квадрату H^1-нормы, поэтому норма графика $\|y\|_Q^2 = Q[y] + \|y\|^2$ эквивалентна H^1-норме. Так как $\lambda > 0$ фиксировано, $\|y\|_Q^2 \sim Q[y] + \|y\|^2 \sim \|y\|_{H^1}^2$.

Вложение $D(Q) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ компактно, а форма Q замкнута и строго положительна. Следовательно, ассоциированный самосопряжённый оператор $L_{\alpha,\gamma}$ имеет дискретный спектр и положительно определён: существует $\lambda_1 > 0$ такое, что

$$Q[y] \geq \lambda_1 \|y\|_{L^2}^2 \qquad \forall\, y \in D(Q).$$

Используя неравенство $Q[y] \geq \lambda_1 \|y\|_{L^2}^2$ и оценку $Q[y] + \|y\|_{L^2}^2 \geq c\|y\|_{H^1}^2$, получаем

$$\begin{aligned} Q[y] &= \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} Q[y] + \frac{1}{1+\lambda_1} Q[y] \geq \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} Q[y] + \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \|y\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} \big(Q[y] + \|y\|_{L^2}^2 \big) \geq \frac{c\lambda_1}{1+\lambda_1} \|y\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

откуда следует коэрцитивность с константой $\varepsilon = \frac{c\lambda_1}{1+\lambda_1} > 0$. Таким образом, $L_{\alpha,\gamma}$ имеет ограниченный обратный $T_{\alpha,\gamma} = L_{\alpha,\gamma}^{-1}$, который компактен и самосопряжён. □

Ортогональное разложение и инвариантные подпространства. Далее рассматривается симметричный случай $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \alpha > -1$. Условие положительной определённости (предложение 1) принимает вид

$$\gamma > -\frac{m\alpha}{1+\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma(1+\alpha) + m\alpha > 0.$$

Отсюда, в частности, $m\alpha + \gamma > 0$ (при $\alpha \neq 0$ выполнено $m\alpha + \gamma > \frac{m\alpha^2}{1+\alpha} > 0$, а при $\alpha = 0$ условие даёт $\gamma > 0$, так что $m\alpha + \gamma = \gamma > 0$).

Оператор $L_{\alpha,\gamma}$ инвариантен относительно перестановок рёбер. Это позволяет разложить пространство $L^2(\Gamma)$ в ортогональную сумму двух подпространств:

$$L^2(\Gamma) = \mathcal{H}_{\mathrm{s}} \oplus \mathcal{H}_{\mathrm{st}}, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered} \mathcal{H}_{\mathrm{s}} = \{ y \in L^2(\Gamma) : y_1 = y_2 = \cdots = y_m \}, \\ \mathcal{H}_{\mathrm{st}} = \{ y \in L^2(\Gamma) : y_1 + y_2 + \cdots + y_m = 0 \}. \end{gathered}$$

Подпространство $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ называют *симметричным*, а $\mathcal{H}_{\mathrm{st}}$ – *стандартным* (иногда «антисимметричным»). Размерность $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ равна 1 (все компоненты определяются одной функцией), размерность $\mathcal{H}_{\mathrm{st}}$ равна $m-1$. Оба подпространства инвариантны относительно $L_{\alpha,\gamma}$, поэтому изучение спектра сводится к рассмотрению сужений оператора на каждое из них.

Стандартная ветвь. На подпространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{st}}$ из условия $y_1 + \dots + y_m = 0$ и непрерывности в центре $y_1(0) = \dots = y_m(0) =: y(0)$ следует $my(0) = 0$, т.е. $y(0) = 0$. Баланс потоков в центре $\sum y_j'(0) = \gamma y(0)$ выполняется автоматически ($0 = 0$). Таким образом, для каждой компоненты y_j получается задача

$$\begin{cases} -y_j'' = \mu y_j, & x \in (0,1), \\ y_j(0) = 0, \\ y_j'(1) + \alpha y_j(1) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

При $\mu \le 0$ уравнение имеет только тривиальное решение (при $\mu = 0$ решение $y_j = Ax$; из $y_j(0) = 0$ следует $A = 0$). Для $\mu > 0$ положим $\omega = \sqrt{\mu}$. Общее решение: $y_j(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$. Условие $y_j(0) = 0$ даёт $A = 0$, поэтому $y_j(x) = B\sin\omega x$. Подстановка во второе граничное условие приводит к

$$B\omega\cos\omega + \alpha B\sin\omega = 0.$$

Нетривиальное решение существует при $B \ne 0$, откуда

$$\omega\cos\omega + \alpha\sin\omega = 0.$$

Если $\sin\omega = 0$, то $\cos\omega = \pm 1$, и уравнение даёт $\pm\omega = 0$, что невозможно при $\omega > 0$. Следовательно, $\sin\omega \ne 0$, и последнее равенство переписывается в виде

$$\omega\cot\omega = -\alpha. \tag{7}$$

Функция $f(\omega) = \omega\cot\omega$ строго убывает на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$, $k = 1, 2, \dots$, причём $f((k-1)\pi+) = +\infty$ при $k \ge 2$ и $f(0+) = 1$, а $f(k\pi-) = -\infty$. Поскольку $\alpha > -1$, уравнение (7) имеет на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$ ровно один простой корень. Обозначим эти корни через $\omega_k^{(\mathrm{st})}(\alpha)$, $k = 1, 2, \dots$, занумерованные в порядке возрастания. Соответствующие собственные значения оператора $L_{\alpha,\gamma}$ на $\mathcal{H}_{\mathrm{st}}$ имеют вид

$$\mu_k^{(\mathrm{st})} = \big(\omega_k^{(\mathrm{st})}(\alpha)\big)^2,$$

и каждое из них имеет кратность $m-1$, поскольку каждому $\omega_k^{(\mathrm{st})}$ отвечает $(m-1)$-мерное пространство функций, удовлетворяющих условию $\sum y_j = 0$. В терминах обратного оператора $T_{\alpha,\gamma} = L_{\alpha,\gamma}^{-1}$ получаем собственные значения

$$\lambda_k^{(\mathrm{st})} = \frac{1}{\big(\omega_k^{(\mathrm{st})}(\alpha)\big)^2}, \qquad k = 1, 2, \dots, \quad \text{кратность } m-1. \tag{8}$$

Симметричная ветвь. На подпространстве $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ все компоненты равны: $y_1 = \dots = y_m =: y$. Условия (1) и (2) сводятся к одномерной задаче

$$\begin{cases} -y'' = \mu y, & x \in (0,1), \\ y'(0) = \dfrac{\gamma}{m}\, y(0), \\ y'(1) + \alpha y(1) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

При $\mu > 0$ положим $\omega = \sqrt{\mu}$. Общее решение: $y(x) = C\cos\omega x + D\sin\omega x$. Из условия в нуле:

$$y'(0) = \omega D = \frac{\gamma}{m}\,y(0) = \frac{\gamma}{m}C \quad\Longrightarrow\quad D = \frac{\gamma}{m\omega}C,$$

(при $\omega > 0$ деление допустимо). Теперь вычислим $y(1)$ и $y'(1)$:

$$y(1) = C\cos\omega + D\sin\omega, \qquad y'(1) = -C\omega\sin\omega + D\omega\cos\omega.$$

Подставляя D и сокращая на C (нетривиальное решение требует $C \neq 0$), получаем

$$\bigl(-C\omega\sin\omega + \tfrac{\gamma}{m\omega}C\omega\cos\omega\bigr) + \alpha\bigl(C\cos\omega + \tfrac{\gamma}{m\omega}C\sin\omega\bigr) = 0,$$

или, после умножения на $m\omega$,

$$-m\omega^2\sin\omega + \gamma\omega\cos\omega + m\alpha\omega\cos\omega + \alpha\gamma\sin\omega = 0.$$

Группируя члены с $\sin\omega$ и $\cos\omega$, приходим к характеристическому уравнению

$$(-m\omega^2 + \alpha\gamma)\sin\omega + \omega(m\alpha + \gamma)\cos\omega = 0. \tag{10}$$

По условию положительной определённости выполнено $\gamma(1+\alpha) + m\alpha > 0$, откуда, как показано выше, $m\alpha + \gamma > 0$. В невырожденном случае $\cos\omega \neq 0$ (значения $\omega = \pi/2 + \pi k$ являются корнями лишь при $\alpha\gamma = m(\pi/2 + \pi k)^2$, что не влияет на чередование и асимптотику) уравнение можно разделить на $\cos\omega$:

$$\omega\cot\omega = \frac{m\omega^2 - \alpha\gamma}{m\alpha + \gamma}.$$

Правая часть строго возрастает по ω (её производная положительна в силу $m\alpha+\gamma > 0$), левая строго убывает на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$. Следовательно, на каждом таком интервале существует ровно один простой корень $\omega_k^{(\mathrm{s})}(\alpha,\gamma)$, $k = 1, 2, \ldots$ (при $k = 1$ левый предел левой части равен 1, а значение правой в нуле есть $-\alpha\gamma/(m\alpha + \gamma)$, и неравенство $1 > -\alpha\gamma/(m\alpha + \gamma)$ вытекает из $\gamma(1 + \alpha) + m\alpha > 0$). Соответствующие собственные значения оператора $L_{\alpha,\gamma}$ на $\mathcal{H}_{\mathrm{s}}$ однократны:

$$\mu_k^{(\mathrm{s})} = \bigl(\omega_k^{(\mathrm{s})}(\alpha,\gamma)\bigr)^2,$$

а для $T_{\alpha,\gamma}$ имеем

$$\lambda_k^{(\mathrm{s})} = \frac{1}{\bigl(\omega_k^{(\mathrm{s})}(\alpha,\gamma)\bigr)^2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \quad \text{кратность } 1. \tag{11}$$

Теорема 1 (Спектральное представление)**.** *Пусть* $\alpha > -1$ *и* $\gamma > \gamma_{\mathrm{crit}} = -\frac{m\alpha}{1+\alpha}$ *(т.е.* $\gamma(1+\alpha) + m\alpha > 0$*). Тогда собственные значения оператора* $T_{\alpha,\gamma} = L_{\alpha,\gamma}^{-1}$ *исчерпываются сериями* $\{\lambda_k^{(\mathrm{s})}\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\{\lambda_k^{(\mathrm{st})}\}_{k=1}^{\infty}$*, определёнными в* (11) *и* (8)*, где* $\omega_k^{(\mathrm{s})}(\alpha,\gamma)$ *– корни уравнения* (10)*, а* $\omega_k^{(\mathrm{st})}(\alpha)$ *– корни уравнения* (7)*. Кратности: каждое* $\lambda_k^{(\mathrm{s})}$ *однократно, каждое* $\lambda_k^{(\mathrm{st})}$ *имеет кратность* $m - 1$*.*

Чередование корней. Для построения последовательности поперечников d_n по формуле $d_n = \lambda_{n+1}$ необходимо упорядочить объединённый спектр $\{\lambda_k^{(\mathrm{s})}\} \cup \{\lambda_k^{(\mathrm{st})}\}$ по убыванию. Следующая теорема описывает взаимное расположение соответствующих корней $\omega_k^{(\mathrm{s})}$ и $\omega_k^{(\mathrm{st})}$.

Теорема 2 (Чередование корней)**.** *Пусть $\alpha > -1$ и $\gamma > \gamma_{\mathrm{crit}} = -\frac{m\alpha}{1+\alpha}$. Тогда для всех $k = 1, 2, \ldots$ выполнены неравенства*

$$\omega_k^{(\mathrm{s})}(\alpha, \gamma) \;<\; \omega_k^{(\mathrm{st})}(\alpha) \;<\; \omega_{k+1}^{(\mathrm{s})}(\alpha, \gamma). \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим две задачи Штурма–Лиувилля на отрезке $[0, 1]$ с одинаковым дифференциальным выражением $-y'' = \mu y$ и одинаковым правым граничным условием $y'(1) + \alpha y(1) = 0$. Левые условия различны:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{S}) \quad y'(0) - \frac{\gamma}{m} y(0) = 0, \\ &(\mathrm{ST}) \quad y(0) = 0. \end{aligned}$$

Условие (ST) соответствует $\theta = +\infty$ (условие Дирихле), а (S) – конечному $\theta = \gamma/m$ в параметризации $y'(0) - \theta y(0) = 0$. Известно (см., например, [11]), что собственные значения задачи Штурма–Лиувилля строго возрастают при возрастании параметра θ. Обозначим через $\mu_k(\theta)$ k-е собственное значение задачи с левым условием $y'(0) - \theta y(0) = 0$ (при $\theta = \gamma/m$) и через $\mu_k(\infty)$ – с условием $y(0) = 0$. Тогда для любого конечного θ выполнено

$$\mu_k(\theta) < \mu_k(\infty) < \mu_{k+1}(\theta), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Здесь $\mu_k(\gamma/m) = (\omega_k^{(\mathrm{s})})^2$, $\mu_k(\infty) = (\omega_k^{(\mathrm{st})})^2$, что и даёт (12). □

Из теоремы 2 и соотношений $\lambda = 1/\omega^2$ следует

$$\lambda_k^{(\mathrm{s})} > \lambda_k^{(\mathrm{st})} > \lambda_{k+1}^{(\mathrm{s})}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Учитывая кратности ($\lambda_k^{(\mathrm{s})}$ однократны, $\lambda_k^{(\mathrm{st})}$ имеют кратность $m-1$), получаем следующую убывающую последовательность собственных значений оператора $T_{\alpha,\gamma}$:

$$\lambda_1^{(\mathrm{s})} > \underbrace{\lambda_1^{(\mathrm{st})} = \cdots = \lambda_1^{(\mathrm{st})}}_{m-1} > \lambda_2^{(\mathrm{s})} > \underbrace{\lambda_2^{(\mathrm{st})} = \cdots = \lambda_2^{(\mathrm{st})}}_{m-1} > \lambda_3^{(\mathrm{s})} > \ldots$$

В компактной форме:

$$\lambda_{mk+1} = \lambda_{k+1}^{(\mathrm{s})}, \qquad \lambda_{mk+2} = \cdots = \lambda_{m(k+1)} = \lambda_{k+1}^{(\mathrm{st})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Теорема 3 (Явная формула для поперечников)**.** *В условиях теоремы 2 для любого $n \geq 0$ выполнено*

$$d_n = \lambda_{n+1},$$

где λ_k *– упорядоченная по убыванию последовательность собственных значений* $T_{\alpha,\gamma}$*, определяемая формулой* (13)*. В явном виде:*

$$d_{mk} = \frac{1}{\left(\omega^{(\mathrm{s})}_{k+1}(\alpha,\gamma)\right)^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$d_{mk+r} = \frac{1}{\left(\omega^{(\mathrm{st})}_{k+1}(\alpha)\right)^2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,\ r = 1, \ldots, m-1.$$

3 Равномерная асимптотика поперечников

Асимптотическое поведение d_n при $n \to \infty$ определяется разложениями корней $\omega^{(\mathrm{st})}_k(\alpha)$ и $\omega^{(\mathrm{s})}_k(\alpha,\gamma)$. Все получаемые ниже формулы равномерны по параметрам (α,γ) на любом компакте

$$K \subset \big\{(\alpha,\gamma) : \alpha > -1,\ \gamma(1+\alpha) + m\alpha > 0\big\}.$$

Стандартная ветвь. Корни $\omega^{(\mathrm{st})}_k(\alpha)$ удовлетворяют уравнению (7):

$$\omega \cot \omega = -\alpha.$$

Известно, что $\omega^{(\mathrm{st})}_k \in \big((k-1)\pi,\ k\pi\big)$. Введём обозначение

$$N = k - \frac{1}{2}, \qquad \eta_k = \omega^{(\mathrm{st})}_k - \pi N.$$

Тогда $\eta_k \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ и $\eta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Подставляя $\omega = \pi N + \eta_k$ в уравнение и используя тождество $\cot(\pi N + \eta) = -\tan \eta$, получаем

$$(\pi N + \eta_k) \tan \eta_k = \alpha. \tag{14}$$

Лемма 2. *При* $k \to \infty$ *справедлива оценка* $\eta_k = O(1/N)$*, равномерная по* α *на любом компакте* $K_1 \subset (-1, \infty)$*.*

Доказательство. Для $|\eta| < \pi/2$ выполняется неравенство $|\tan \eta| \geq |\eta|$. Из (14) имеем

$$|\alpha| = |\pi N + \eta_k|\,|\tan \eta_k| \geq (\pi N - |\eta_k|)|\eta_k|.$$

При достаточно больших N (таких, что $\pi N > |\eta_k| + 1$) отсюда следует

$$|\eta_k| \leq \frac{|\alpha|}{\pi N - |\eta_k|} \leq \frac{2|\alpha|}{\pi N},$$

где последнее неравенство верно при $|\eta_k| \leq \pi N/2$, что выполнено для всех больших N. Таким образом, $\eta_k = O(1/N)$, причём константа в оценке зависит только от $\sup_{K_1} |\alpha|$. □

В силу этой оценки разложим $\tan \eta_k$ в ряд Маклорена. Представим η_k в виде асимптотического ряда по степеням $1/N$:

$$\eta_k = \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N^3} + O(N^{-4}),$$

где коэффициенты $a_j = a_j(\alpha)$ подлежат определению. Подставляем это выражение в (14) и используем разложение

$$\tan\eta = \eta + \frac{1}{3}\eta^3 + O(\eta^5).$$

Тогда

$$\pi N \tan\eta = \pi N\left(\frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N^3} + \frac{1}{3}\frac{a_1^3}{N^3} + O(N^{-4})\right)$$
$$= \pi a_1 + \frac{\pi a_2}{N} + \frac{\pi a_3 + \frac{\pi}{3}a_1^3}{N^2} + O(N^{-3}),$$

$$\eta\tan\eta = \left(\frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N^3}\right)\left(\frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N^3} + \frac{1}{3}\frac{a_1^3}{N^3}\right) + O(N^{-5})$$
$$= \frac{a_1^2}{N^2} + \frac{2a_1a_2}{N^3} + O(N^{-4}).$$

Складывая, получаем

$$(\pi N + \eta)\tan\eta = \pi a_1 + \frac{\pi a_2}{N} + \frac{\pi a_3 + \frac{\pi}{3}a_1^3 + a_1^2}{N^2} + O(N^{-3}) = \alpha.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $1/N$, находим:

$$\pi a_1 = \alpha, \tag{15}$$
$$\pi a_2 = 0, \tag{16}$$
$$\pi a_3 + \frac{\pi}{3}a_1^3 + a_1^2 = 0. \tag{17}$$

Из (15) получаем $a_1 = \alpha/\pi$. Из (16) имеем $a_2 = 0$. Подставляя a_1 в (17):

$$\pi a_3 + \frac{\pi}{3}\frac{\alpha^3}{\pi^3} + \frac{\alpha^2}{\pi^2} = 0 \implies \pi a_3 = -\frac{\alpha^2}{\pi^2} - \frac{\alpha^3}{3\pi^2} \implies a_3 = -\frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^3}.$$

Таким образом,

$$\eta_k = \frac{\alpha}{\pi N} - \frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^3 N^3} + O(N^{-4}), \tag{18}$$

причём остаточный член равномерен по α на компактах. Следовательно,

$$\omega_k^{(\mathrm{st})} = \pi\left(k - \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)} - \frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^3\left(k - \frac{1}{2}\right)^3} + O(k^{-5}).$$

Симметричная ветвь. Корни $\omega_k^{(\mathrm{s})}(\alpha, \gamma)$ удовлетворяют уравнению (10):

$$(-m\omega^2 + \alpha\gamma)\sin\omega + \omega(m\alpha + \gamma)\cos\omega = 0.$$

При больших k корни лежат в интервалах $((k-1)\pi,\ k\pi)$ и приближаются к левому концу. Положим

$$\zeta_k = \omega_k^{(\mathrm{s})} - (k-1)\pi, \qquad \zeta_k \to 0^+ \quad (k \to \infty).$$

Подставляя $\omega=(k-1)\pi+\zeta_k$ и используя $\sin((k-1)\pi+\zeta)=(-1)^{k-1}\sin\zeta$, $\cos((k-1)\pi+\zeta)=(-1)^{k-1}\cos\zeta$, после сокращения на $(-1)^{k-1}$ получаем

$$\bigl(-m((k-1)\pi+\zeta_k)^2+\alpha\gamma\bigr)\sin\zeta_k+((k-1)\pi+\zeta_k)(m\alpha+\gamma)\cos\zeta_k=0. \quad (19)$$

Разложим при малых ζ_k: $\sin\zeta_k=\zeta_k+O(\zeta_k^3)$, $\cos\zeta_k=1+O(\zeta_k^2)$. Удерживая главные члены, имеем

$$\bigl(-m((k-1)\pi)^2+\alpha\gamma+O(\zeta_k)\bigr)\zeta_k+((k-1)\pi)(m\alpha+\gamma)(1+O(\zeta_k))=0.$$

Отсюда

$$-m\pi^2(k-1)^2\zeta_k+\pi(k-1)(m\alpha+\gamma)+O(\zeta_k)+O((k-1)\zeta_k)=0.$$

Разрешая относительно ζ_k, получаем

$$\zeta_k=\frac{m\alpha+\gamma}{m\pi(k-1)}+O\bigl((k-1)^{-2}\bigr).$$

При $k\to\infty$ замена $k-1$ на k даёт

$$\zeta_k=\frac{m\alpha+\gamma}{m\pi k}+O(k^{-2}), \quad (20)$$

равномерно по (α,γ) на компактах.

Следовательно,

$$\omega_k^{(\mathrm{s})}=(k-1)\pi+\frac{m\alpha+\gamma}{m\pi k}+O(k^{-2}),$$
$$\omega_{k+1}^{(\mathrm{s})}=k\pi+\frac{m\alpha+\gamma}{m\pi k}+O(k^{-2}).$$

Асимптотика поперечников d_n. Согласно теореме 3, для каждого $n\geq 0$ положим $r=n \bmod m$ $(r=0,1,\dots,m-1)$. Тогда $n=mk+r$, где $k=\lfloor n/m\rfloor$, и

$$d_{mk}=\frac{1}{(\omega_{k+1}^{(\mathrm{s})})^2},\qquad d_{mk+r}=\frac{1}{(\omega_{k+1}^{(\mathrm{st})})^2},\quad r=1,\dots,m-1.$$

Случай $n=mk$ $(r=0)$. Из асимптотики $\omega_{k+1}^{(\mathrm{s})}$ имеем

$$\omega_{k+1}^{(\mathrm{s})}=k\pi\left(1+\frac{m\alpha+\gamma}{m\pi^2k^2}+O(k^{-3})\right).$$

Тогда

$$\bigl(\omega_{k+1}^{(\mathrm{s})}\bigr)^{-2}=\frac{1}{\pi^2k^2}\left(1-\frac{2(m\alpha+\gamma)}{m\pi^2k^2}+O(k^{-3})\right)=\frac{1}{\pi^2k^2}-\frac{2(m\alpha+\gamma)}{m\pi^4k^4}+O(k^{-5}).$$

Выражая через $n=mk$, получаем $k=n/m$, $k^{-2}=m^2n^{-2}$, $k^{-4}=m^4n^{-4}$. Следовательно,

$$d_{mk}=\frac{m^2}{\pi^2n^2}+O(n^{-4}),$$

где $O(n^{-4})$ равномерна по параметрам на компактах. Поправка имеет порядок n^{-4}, поскольку разложение $\omega_{k+1}^{(\mathrm{s})}$ содержит лишь чётные степени $1/k$, и первый нетривиальный член даёт k^{-4}.

Случай $n = mk+r$, $1 \le r \le m-1$. Здесь $k = (n-r)/m$, $k+1 = \frac{n+m-r}{m}$, $k+1/2 = \frac{2n+m-2r}{2m}$. Положим $s = m-r$ $(1 \le s \le m-1)$, тогда $k+1/2 = \frac{2n+2s-m}{2m} = \frac{n}{m} + \frac{2s-m}{2m}$. Обозначим $t = 2s-m = m-2r$. Тогда

$$k + \frac{1}{2} = \frac{n}{m} + \frac{t}{2m} = \frac{n}{m}\left(1 + \frac{t}{2n}\right).$$

Из (18) имеем

$$\omega_{k+1}^{(\mathrm{st})} = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\alpha}{\pi(k+\frac{1}{2})} + O\big((k+\tfrac{1}{2})^{-3}\big).$$

Подставим $A = k+1/2$:

$$\pi A = \frac{\pi n}{m}\left(1+\frac{t}{2n}\right), \qquad \frac{1}{A} = \frac{m}{n}\left(1+\frac{t}{2n}\right)^{-1} = \frac{m}{n}\left(1 - \frac{t}{2n} + O(n^{-2})\right).$$

Тогда

$$\omega_{k+1}^{(\mathrm{st})} = \frac{\pi n}{m}\left(1+\frac{t}{2n}\right) + \frac{\alpha m}{\pi n}\left(1-\frac{t}{2n}\right) + O(n^{-3}).$$

Возведём в квадрат и разложим обратную величину:

$$\begin{aligned}
\big(\omega_{k+1}^{(\mathrm{st})}\big)^{-2} &= \left(\frac{\pi n}{m}\right)^{-2}\left(1 + \frac{t}{2n} + \frac{\alpha m^2}{\pi^2 n^2} + O(n^{-3})\right)^{-2} \\
&= \frac{m^2}{\pi^2 n^2}\left[1 - 2\left(\frac{t}{2n} + \frac{\alpha m^2}{\pi^2 n^2}\right) + 3\left(\frac{t}{2n}\right)^2 + O(n^{-3})\right] \\
&= \frac{m^2}{\pi^2 n^2} - \frac{m^2 t}{\pi^2 n^3} + O(n^{-4}).
\end{aligned}$$

Подставляя $t = m-2r$, получаем окончательно

$$d_{mk+r} = \frac{m^2}{\pi^2 n^2} - \frac{m^2(m-2r)}{\pi^2 n^3} + O(n^{-4}), \qquad r = 1, \dots, m-1.$$

Объединяя результаты, сформулируем окончательную теорему.

Теорема 4 (Равномерная асимптотика поперечников)**.** *Пусть* $\alpha > -1$ *и* $\gamma > \gamma_{\mathrm{crit}} = -\frac{m\alpha}{1+\alpha}$. *Тогда при* $n \to \infty$ *для колмогоровских поперечников* $d_n = d_n(T_{\alpha,\gamma}(B_{L^2}), L^2)$ *справедливы асимптотические разложения*

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{m^2}{\pi^2 n^2} + O(n^{-4}), & n &\equiv 0 \pmod m, \\
d_n &= \frac{m^2}{\pi^2 n^2} - \frac{m^2(m-2r)}{\pi^2 n^3} + O(n^{-4}), & n &\equiv r \pmod m,\ r = 1, \dots, m-1,
\end{aligned}$$

причём остаточные члены $O(n^{-4})$ *равномерны по* (α, γ) *на любом компакте* $K \subset \{(\alpha,\gamma) : \alpha > -1,\ \gamma(1+\alpha) + m\alpha > 0\}$.

4 Критический случай и поперечники на факторпространстве

Критическое значение параметра. Из предложения 1 следует, что квадратичная форма $Q_{\alpha,\gamma}$ перестаёт быть строго положительной при выполнении условия
$$\gamma = \gamma_{\rm crit} := -\sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j}{1+\alpha_j}.$$
Для симметричного случая $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \alpha$ это условие принимает вид
$$\gamma_{\rm crit} = -\frac{m\alpha}{1+\alpha}. \tag{21}$$
При этом
$$m\alpha + \gamma_{\rm crit} = \frac{m\alpha^2}{1+\alpha}.$$
Для $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$ эта величина положительна, поэтому форма на подпространстве $\mathcal{H}_{\rm st}$ остаётся положительной, а потеря положительности происходит только на $\mathcal{H}_{\rm s}$. Случай $\alpha = 0$ (при котором $\gamma_{\rm crit} = 0$ и $m\alpha + \gamma_{\rm crit} = 0$) требует отдельного рассмотрения и в настоящей работе не рассматривается. При $\alpha \neq 0$ оператор $L_{\alpha,\gamma_{\rm crit}}$ имеет однократное нулевое собственное значение, отвечающее собственной функции из $\mathcal{H}_{\rm s}$; все остальные собственные значения строго положительны.

Асимптотика низшего собственного значения симметричной ветви при $\gamma \searrow \gamma_{\rm crit}$. Пусть $\alpha \neq 0$ и $\gamma = \gamma_{\rm crit} + \varepsilon$ с $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$. Обозначим
$$A := m\alpha + \gamma_{\rm crit} = \frac{m\alpha^2}{1+\alpha} > 0.$$
Тогда
$$m\alpha + \gamma = A + \varepsilon, \qquad \alpha\gamma = \alpha\gamma_{\rm crit} + \alpha\varepsilon = -A + \alpha\varepsilon.$$
Подставим эти выражения в характеристическое уравнение симметричной ветви (10):
$$\bigl(-m\omega^2 - A + \alpha\varepsilon\bigr)\sin\omega + \omega(A+\varepsilon)\cos\omega = 0.$$
Разложим $\sin\omega$ и $\cos\omega$ при $\omega \to 0$:
$$\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{6} + O(\omega^5), \qquad \cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + O(\omega^4).$$
Подставляя и удерживая члены до $O(\omega^3)$ и $O(\varepsilon\omega)$, получаем
$$\bigl(-m\omega^2 - A + \alpha\varepsilon\bigr)\bigl(\omega - \tfrac{\omega^3}{6}\bigr) + \omega(A+\varepsilon)\bigl(1 - \tfrac{\omega^2}{2}\bigr) + \cdots = 0.$$
Раскрывая скобки, находим
$$\begin{aligned}&(-m\omega^2)\omega + (-A)\omega + (\alpha\varepsilon)\omega + (-m\omega^2)(-\tfrac{\omega^3}{6})\\ &\quad + (-A)(-\tfrac{\omega^3}{6}) + (\alpha\varepsilon)(-\tfrac{\omega^3}{6}) + \omega(A+\varepsilon) - \tfrac{\omega^3}{2}(A+\varepsilon) + \cdots = 0.\end{aligned}$$

Группируя члены порядка ω, имеем

$$-A\omega + \alpha\varepsilon\omega + \omega(A+\varepsilon) = (\alpha\varepsilon + \varepsilon)\omega = \varepsilon(\alpha+1)\omega.$$

Члены порядка ω^3 (без учёта $\varepsilon\omega^3$, которые имеют высший порядок малости) дают

$$-m\omega^3 + \frac{A\omega^3}{6} - \frac{A\omega^3}{2} = \omega^3\left(-m - \frac{A}{3}\right).$$

С точностью до $O(\omega^5, \varepsilon\omega^3)$ уравнение принимает вид

$$\varepsilon(\alpha+1)\omega + \omega^3\left(-m - \frac{A}{3}\right) = 0.$$

Сокращая на $\omega > 0$, получаем

$$\varepsilon(\alpha+1) + \omega^2\left(-m - \frac{A}{3}\right) = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon(\alpha+1)}{m + \dfrac{A}{3}}.$$

Подставляя $A = m\alpha^2/(1+\alpha)$, находим

$$m + \frac{A}{3} = m + \frac{m\alpha^2}{3(1+\alpha)} = m\,\frac{3(1+\alpha)+\alpha^2}{3(1+\alpha)} = \frac{m(\alpha^2+3\alpha+3)}{3(1+\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{\varepsilon(\alpha+1)}{\dfrac{m(\alpha^2+3\alpha+3)}{3(1+\alpha)}} = \frac{3(1+\alpha)^2}{m(\alpha^2+3\alpha+3)}\,\varepsilon.$$

Поскольку $\mu_1^{(\mathrm{s})} = \omega^2$, получаем

$$\mu_1^{(\mathrm{s})} = \frac{3(1+\alpha)^2}{m(\alpha^2+3\alpha+3)}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2). \tag{22}$$

Поперечники на факторпространстве. При $\gamma = \gamma_{\mathrm{crit}}$ оператор $L_{\alpha,\gamma_{\mathrm{crit}}}$ не является обратимым на всём $L^2(\Gamma)$, поскольку имеет одномерное ядро. Рассмотрим ортогональное дополнение к ядру:

$$\mathcal{H}_0 := L^2(\Gamma) \ominus \ker L_{\alpha,\gamma_{\mathrm{crit}}}, \qquad \dim\ker L_{\alpha,\gamma_{\mathrm{crit}}} = 1.$$

Сужение $L_{\alpha,\gamma_{\mathrm{crit}}}|_{\mathcal{H}_0}$ инъективно и имеет компактный обратный

$$T_{\mathrm{crit}} := \big(L_{\alpha,\gamma_{\mathrm{crit}}}|_{\mathcal{H}_0}\big)^{-1}\colon \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0.$$

Собственные значения T_{crit} суть величины, обратные к положительным собственным значениям $L_{\alpha,\gamma_{\mathrm{crit}}}$. Обозначим через

$$0 = \mu_1 < \mu_2 \le \mu_3 \le \dots$$

полный спектр $L_{\alpha,\gamma_{\mathrm{crit}}}$ (с учётом кратности). Тогда

$$d_n^{\mathrm{crit}} := d_n\big(T_{\mathrm{crit}}(B_{\mathcal{H}_0}), \mathcal{H}_0\big) = \mu_{n+2}^{-1}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

поскольку первое собственное значение $\mu_1 = 0$ исключено. Для $\gamma > \gamma_{\mathrm{crit}}$ собственные значения $L_{\alpha,\gamma}$ непрерывно зависят от γ, и $\mu_{k+1}(\gamma) \to \mu_{k+2}$ при $\gamma \searrow \gamma_{\mathrm{crit}}$ (где $k \geq 0$ – номер собственного значения, отсчитываемый от единицы; явная связь с m несущественна для данной асимптотики). Следовательно,

$$d_0^{\mathrm{crit}} = \mu_2^{-1} = \lim_{\gamma \searrow \gamma_{\mathrm{crit}}} d_1(\gamma), \qquad d_n^{\mathrm{crit}} = \lim_{\gamma \searrow \gamma_{\mathrm{crit}}} d_{n+1}(\gamma), \quad n \geq 1.$$

Таким образом, последовательность критических поперечников получается из обычной сдвигом на единицу, причём d_0^{crit} соответствует первому положительному собственному значению.

References

[1] A. N. Kolmogorov. *Über die beste Annäherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse*. Ann. of Math. (2), **37**:1 (1936), 107–110.

[2] V. M. Tikhomirov. *Some problems in approximation theory*. Math. Notes, **9**:5 (1971), 343–350.

[3] A. Pinkus. *n-Widths in Approximation Theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, **7**. Springer, Berlin–Heidelberg, 1985.

[4] A. Pietsch. *s-Numbers of operators in Banach spaces*. Studia Math., **51** (1974), 201–223.

[5] M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak. *Estimates of singular numbers of integral operators*. Russian Math. Surveys, **32**:1 (1977), 15–89.

[6] D. Lewis, B. Sing. *An upper bound on the Kolmogorov widths of a certain family of integral operators*. J. Approx. Theory, **240** (2019), 71–95.

[7] G. Berkolaiko. *An elementary introduction to quantum graphs*. Contemp. Math., **700** (2017), 41–72.

[8] P. Kuchment. *Quantum graphs. I. Some basic structures*. Waves Random Media, **14** (2004), S107–S128.

[9] Y. Latushkin, V. Pivovarchik, A. Supranovych. *Sturm–Liouville problems on graphs with Robin boundary conditions*. Preprint, 2025.

[10] P. Exner. *Leaky Quantum Graphs: A Review*. Preprint, 2008.

[11] A. Zettl. *Sturm–Liouville Theory*. Mathematical Surveys and Monographs, **121**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[12] D. Mugnolo. *Semigroup Methods for Evolution Equations on Networks*. Springer, 2014.

[13] M. Solomyak. *On approximation of functions from Sobolev spaces on metric graphs*. J. Approx. Theory, **121**:2 (2003), 199–219.

[14] W. D. Evans, D. J. Harris, J. Lang. *The approximation numbers of Hardy–type operators on trees*. Proc. Lond. Math. Soc., **83**:2 (2001), 390–418.

Arthur Lvovich Sinai
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University,
ul. Bolshaya Sankt-Peterburgskaya, 41,
173003, Veliky Novgorod, Russia
Email address: arthur.sinai@mail.ru