S(e)MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.5
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 11M35,
30C15

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ГУРВИЦА

В.И. Кузоватов and **А.М. Кытманов**

Представлено П.П. Петровым

Abstract: We consider the hyperbolic Hurwitz zeta-function constructed from the zeros of some entire function of the first order of growth. An integral representation for this zeta-function is obtained. A relationship between this zeta-function and the classical Hurwitz zeta-function is found. New Mellin pairs of functions are obtained, one of which is a linear combination of Hurwitz zeta-functions.

Keywords: hyperbolic Hurwitz zeta-function, integral representation.

1 Введение

Интегральные представления играют важную роль при изучении специальных функций. Так, например, классические интегральные формулы Плана [1, гл. 7, пример 7] и Бине [1, гл. 12, п. 12.32], наряду с интегральным представлением [2, гл. 2, п. 9, формула 2] для дзета-функции Римана $\zeta(s)$, используются в получении функционального соотношения для дзета-функции Римана [2, гл. 2, п. 9]. Различные обобщения формул Плана и Бине, а также их применение приведены в работах [3]–[7].

Kuzovatov, V.I., Kytmanov, A.M., On the integral representation of the hyperbolic Hurwitz zeta-function.

Работа поддержана РНФ, Правительством Красноярского края и Красноярским краевым фондом науки (грант 26-11-20004).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

Понятие гиперболической дзета-функции Гурвица было введено сравнительно недавно в работе [8] Н.М. Добровольского, Н.Н. Добровольского и др. Дальнейшие результаты, связанные с ней, можно найти в монографии [9, гл. 2] Н.Н. Добровольского. Там же отмечалось, что развиваемая теория во многом является аналогом теории дзета-функции Гурвица.

Целью данной статьи является получение интегрального представления для ряда

$$\zeta_f(s,a)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s},\qquad a\notin\mathbb{Z},\tag{1}$$

где $s\in\mathbb{C}$. Здесь и далее в статье, как обычно, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Число $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ является параметром. Понятно, что данный ряд сходится абсолютно при $\operatorname{Re}s>1$.

Этот ряд лишь числовым множителем отличается от определения гиперболической дзета-функции Гурвица из [8]. Кроме того, в отличие от определения из [8], где a – вещественное, мы допускаем, что a может принимать комплексные значения.

Данный ряд связан с *дзета-функцией Гурвица* (см., например, [10, гл. 1, п. 1.10])

$$\zeta(s,a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s},\qquad \operatorname{Re}\,s>1,\quad a\neq 0,-1,-2,\ldots,-n,\ldots,$$

которая при $a=1$ превращается в $\zeta(s)$. Ее часто также называют *обобщенной дзета-функцией Римана*. Далее мы находим эту связь для различных a и, используя полученное интегральное представление, получаем новые меллиновские пары функций.

Интегральное представление для ряда (1) мы получим, рассматривая его как дзета-функцию, построенную по нулям некоторой целой функции $f(z)$ первого порядка роста. Поясним подробнее.

В.Б. Лидский и В.А. Садовничий в работе [11] для некоторого подкласса K целых функций $f(z)$ первого порядка роста рассмотрели уравнение

$$f(z)=0.\tag{2}$$

Обозначим через $N_f=f^{-1}(0)$ множество всех корней уравнения (2) (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Число корней не более чем счетно.

Дзета-функция $\zeta_f(s)$ корней N_f уравнения (2) определяется следующим образом (см. [11, лемма 2]):

$$\zeta_f(s)=\sum_{z_n\in N_f}(-z_n)^{-s},\tag{3}$$

где $s \in \mathbb{C}$. В этом определении мы поставили знак "минус" перед z_n для удобства дальнейшего изложения.

Данная функция $\zeta_f(s)$ была названа в [11] *дзета-функцией, ассоциированной с целой функцией* $f(z)$.

Понятно, что данный ряд сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s > 1$, так как функция f имеет первый порядок роста.

Интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ (f из класса K) приведено в работе [11, формула 9]. В ней показано (лемма 3), что эта дзета-функция продолжается аналитически на всю комплексную плоскость.

В данной статье мы применяем определение (3) дзета-функции к произвольным целым функциям первого порядка роста.

Сначала мы находим целую функцию, нулями которой являются числа $z_n = -(n+a)$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. А затем получаем интегральное представление для ряда (1) гиперболической дзета-функции Гурвица, в котором интегрирование ведется по неотрицательной части вещественной оси. Фактически речь пойдет об аналитическом продолжении рассмотренной дзета-функции.

Классическая дзета-функция Римана $\zeta(s)$ может быть задана нулями целой функции первого порядка $f(z) = \dfrac{1}{\Gamma(z+1)}$, то есть $z_n = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан и Л.А. Дикий изучали (см., например, работы [12, 13, 14]) дзета-функцию, ассоциированную с собственными значениями оператора Штурма-Лиувилля в 50-х годах прошлого века. Ее значение оказалось связанным со следом данного оператора. В работе [15] С.А. Смагин и М.А. Шубин построили дзета-функцию эллиптических операторов и операторов более общего вида, доказали возможность мероморфного продолжения дзета-функции и дали некоторую информацию о полюсах.

Современные исследования в данном направлении также развиваются активно. Приведем лишь несколько работ. В.И. Кузоватов, А.М. Кытманов, А. Садуллаев в работах [16, 17] рассмотрели дзета-функцию корней одного класса целых функций. А. Лауринчикас и Р. Мацайтене в работе [18] получили совместную теорему универсальности типа Воронина о приближении аналитических функций сдвигами L–функций Дирихле и дзета-функций Лерха. В работе [19] ими же с соавторами показано, что широкий класс аналитических функций приближается сдвигами периодической дзета-функции Гурвица с рациональным параметром. А. Бальчюнас, А. Дубицкас, А. Лауринчикас изучали дзета-функцию Гурвица с алгебраическим иррациональным параметром в [20].

Многомерные результаты получены А.М. Кытмановым и С.Г. Мысливец в работе [21]. Ими было введено понятие дзета-функции, ассоциированной с системой мероморфных функций $f = (f_1, \ldots, f_n)$ в $\mathbb{C}^n$. С использованием теории вычетов этими авторами было дано интегральное представление для дзета-функции, однако в работе были наложены жесткие и сложно проверяемые условия на систему функций $f_1, \ldots, f_n$.

2 Вспомогательные утверждения

В данном разделе мы исследуем целую функцию $f(z)$, нулями z_n которой задается ряд (1). Также приведем оценки для $\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|$ для достаточно малых $|z|$, которые нам потребуются в дальнейшем при получении интегрального представления.

Рассмотрим формулу [22, формула 6.2.3.8]

$$\prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(1+\frac{a}{n+b}\right) e^{-a/n} = \frac{b}{a+b} \sin\left[\pi\left(a+b\right)\right] \operatorname{cosec} \pi b.$$

Отметим, что в этой формуле в [22] пропущены очевидные условия: $n \neq 0$, $b \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. При $b=0$ и $a=-z/\pi$ из этой формулы получаем известное разложение для $\frac{\sin z}{z}$ в бесконечное произведение.

Подобная формула, определяющая ту же целую функцию с теми же нулями, приведена в [23, гл. 1, п. 1.43, формула 1.435].

Выбирая $a=z$, $b=a$, получим

$$\prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left(1+\frac{z}{n+a}\right) e^{-z/n} = \frac{a}{z+a} \sin\left[\pi\left(z+a\right)\right] \operatorname{cosec} \pi a, \quad a \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{4}$$

Таким образом, получена целая функция

$$f(z) = a \operatorname{cosec} \pi a \frac{\sin\left[\pi\left(z+a\right)\right]}{z+a}, \qquad a \notin \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{5}$$

с нулями $z_n = -(n+a)$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. А формула (4) это ее разложение в бесконечное произведение по теореме Адамара ([24, гл. 7]).

Известно (см., например, [24, гл. 7, §1, п. 1.5]), что функция $\frac{\sin w}{w}$ является целой функцией первого порядка. Тогда $f(z)$ также является целой функцией первого порядка. Проведем следующие вычисления.

$$f'(z) = a \operatorname{cosec} \pi a \left(\frac{\pi \cos\left[\pi\left(z+a\right)\right](z+a) - \sin\left[\pi\left(z+a\right)\right]}{(z+a)^2}\right) =$$

$$= a \operatorname{cosec} \pi a \left(\frac{\pi \cos\left[\pi\left(z+a\right)\right]}{(z+a)} - \frac{\sin\left[\pi\left(z+a\right)\right]}{(z+a)^2}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \pi \operatorname{ctg}\left[\pi\left(z+a\right)\right] - \frac{1}{z+a}.$$

Если через $\psi(z)$ обозначить логарифмическую производную Г-функции, т. е. $\psi(z) = \dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, то, воспользовавшись свойством функции $\psi(z)$ (см., например, [10, гл. 1, п. 1.7.1]), последнее равенство можно записать как

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \psi(1 - z - a) - \psi(1 + z + a). \tag{6}$$

Воспользуемся стандартным разложением для котангенса (см., например, [25, гл. 5, §1, п. 71, формула 14]) в абсолютно сходящийся ряд

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \quad z \notin \mathbb{Z}.$$

Тогда получим

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = 2(z + a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z + a)^2 - n^2}, \quad z + a \notin \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Последнее представление позволит нам оценить $\left| \dfrac{f'(z)}{f(z)} \right|$ для достаточно малых $|z|$.

Справедливо утверждение.

Лемма 1. *Пусть даны $f(z)$ – целая функция первого порядка, определенная по формуле (5), $a \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, и сходящийся ряд (при $|z| \neq |n - a|$ и $|z| \neq |n + a|$ для всех натуральных n)*

$$M(|z|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\big||z| - |n - a|\big| \big||z| - |n + a|\big|}.$$

Функция $M(|z|)$ определена для всех $0 \leqslant |z| \leqslant \varepsilon_0$, где $0 < \varepsilon_0$ — расстояние от точек $z \pm a$ до ближайшего целого числа n. Тогда

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqslant 2(|z| + |a|) M(|z|), \qquad \lim_{|z| \to 0} M(|z|) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n - a| \, |n + a|},$$

причем последний ряд сходится.

Доказательство. Используя представление (7), получим

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqslant 2(|z| + |a|) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|z + a - n| \, |z + a + n|}.$$

Далее воспользуемся неравенством

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|. \tag{8}$$

Тогда

$$|z + a - n| = |z - (n - a)| \geqslant \big||z| - |n - a|\big|,$$
$$|z + a + n| = |z - (-n - a)| \geqslant \big||z| - |n + a|\big|$$

и первая часть леммы доказана.

Далее докажем, что предельный переход при $|z| \to 0$ под знаком суммы ряда $M(|z|)$ возможен, т. е. докажем, что ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\big||z|-|n-a|\big|\big||z|-|n+a|\big|} \tag{9}$$

по признаку Вейерштрасса сходится равномерно по параметру $|z|$ на множестве $|z| \in [0; A]$, где $A = \min\{1, \varepsilon_0\}$, а номер n_0 выберем $n_0 = [|a|] + 3$ (здесь квадратные скобки означают целую часть числа).

Действительно, начиная с номера n_0

$$|n-a| > |z| \quad \text{и} \quad |n+a| > |z|$$

при фиксированном a и $|z| \in [0; A]$, поскольку справедливы оценки

$$|n-a| \geqslant \big||n|-|a|\big| = n - |a| > 1 \geqslant |z|\,,$$
$$|n+a| \geqslant \big||n|-|a|\big| = n - |a| > 1 \geqslant |z|\,.$$

Тогда для $n \geqslant n_0$ и $|z| \in [0; A]$

$$\frac{1}{\big||z|-|n-a|\big|\big||z|-|n+a|\big|} = \frac{1}{(|n-a|-|z|)\,(|n+a|-|z|)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(|n-a|-A)\,(|n+a|-A)}.$$

А ряд

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(|n-a|-A)\,(|n+a|-A)}$$

сходится, так как общий член ряда эквивалентен $1/n^2$. Тем самым мы показали, что ряд (9) сходится равномерно на множестве $|z| \in [0; A]$. Поэтому существует предел

$$\lim_{|z|\to 0} M(|z|) = \sum_{n=1}^{n_0-1} \lim_{|z|\to 0} \frac{1}{\big||z|-|n-a|\big|\big||z|-|n+a|\big|} +$$
$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} \lim_{|z|\to 0} \frac{1}{\big||z|-|n-a|\big|\big||z|-|n+a|\big|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n-a|\,|n+a|}.$$

Последний ряд сходится по признаку сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. $\square$

3 Интегральное представление

Пусть дана $f(z)$ – целая функция первого порядка, определенная по формуле (5), а $\operatorname{Im} a \neq 0$. Тогда ее нули $z_1, z_{-1}, z_2, z_{-2}, \ldots, z_n, z_{-n}, \ldots$ не лежат на неотрицательной части вещественной оси. Напомним, что множество нулей функции f мы обозначали через N_f.

Введем область $D \subset \mathbb{C}$ вида

$$D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : r < \operatorname{Re} z < R, \operatorname{Im} z = 0\}, \quad 0 < r < R.$$

Отметим, что D является односвязной областью. Ее граница ∂D состоит из отрезка $[r, R]$ на вещественной оси, окружности S_R радиуса R с центром в начале координат с положительной ориентацией (против часовой стрелки), отрезка $[R, r]$ на $\mathbb{R}$, который получается из $[r, R]$ изменением ориентации, и окружности $-S_r$, получаемой из S_r изменением направления обхода.

Выберем радиусы r и R так, чтобы $\partial D \cap N_f = \varnothing$ и в круге $\{z : |z| < r\}$ не было нулей функции f.

В области D логарифм допускает выделение однозначной ветви. Пусть $\ln z$ означает ту ветвь логарифма, которая принимает вещественные значения на верхнем берегу разреза $z : \{\arg z = 0\}$, $\ln 1 = 0$. Тогда в области D

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

Кроме того, функция $z^{-s} = e^{-s \ln z}$ также голоморфна в D, как и функция $(-z)^{-s} = \left(e^{i\pi} z\right)^{-s}$.

Теорема 1. *Пусть $\zeta_f(s, a)$ – дзета-функция, ассоциированная с целой функцией $f(z)$ первого порядка, определенной по формуле (5), т. е.*

$$\zeta_f(s, a) = \sum_{z_n \in N_f} (-z_n)^{-s}.$$

Тогда в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$ справедливо следующее интегральное представление

$$\zeta_f(s, a) = a^{-s} + \frac{\sin \pi s}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i \right) x^{-s}\, dx \tag{10}$$

при условии $\operatorname{Im} a \neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим возрастающую последовательность положительных чисел $\{R_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, такую, что $R_k \to +\infty$ при $k \to \infty$ и на окружностях $\{z : |z| = R_k\}$ функция f не имеет нулей.

В дальнейшем будем считать, что область $D = D_k =$

$$= \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R_k\} \setminus \{z \in \mathbb{C} : r < \operatorname{Re} z < R_k, \operatorname{Im} z = 0\}, \quad 0 < r < R_k.$$

Так что $R = R_k$.

Рассмотрим интеграл

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \left\{ \frac{f'(z)}{f(z)} - \pi i \right\} (-z)^{-s}\, dz.$$

Тогда функция, стоящая под знаком интеграла, является мероморфной в D с непрерывными граничными значениями.

Имеем

$$I(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}(-z)^{-s}\,dz-\frac{1}{2}\int\limits_{\partial D}(-z)^{-s}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}(-z)^{-s}\,\frac{df}{f}=\sum_{z_n\in N_f\cap D}(-z_n)^{-s}.$$

В этом равенстве второй интеграл равняется нулю по теореме Коши. А последнее равенство – следствие теоремы о логарифмическом вычете.

Так как порядок функции f равен 1, то интеграл

$$I(s)\to\zeta_f(s,a)-a^{-s}\quad\text{при}\quad r\to+0,\quad R=R_k\to+\infty,\quad\text{если}\quad \operatorname{Re}s>1.$$

Далее мы покажем, что предельное значение интеграла $I(s)$ дает аналитическое продолжение дзета-функции $\zeta_f(s,a)$ на полосу $0<\operatorname{Re}s<1$.

Интеграл $I(s)$ можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$I(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_R}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right\}(-z)^{-s}\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right\}(-z)^{-s}\,dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[r,R]}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right\}(-z)^{-s}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{[R,r]}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right\}(-z)^{-s}\,dz=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Таким образом,

$$I_1+I_2+I_3+I_4=\sum_{z_n\in N_f\cap D}(-z_n)^{-s}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\varphi=\arg z$, $0\leqslant\arg z<2\pi$, *интеграл*

$$\int\limits_{S_R}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right\}(-z)^{-s}\,dz$$

стремится к нулю при $R=R_k\to+\infty$ *и* $\operatorname{Re}\ s>0$.

Доказательство. Имеем

$$\left|(-z)^{-s}\right|=\left|e^{-s(\ln R+i(\varphi\pm\pi))}\right|=e^{-\operatorname{Re}\,s\ln R+\operatorname{Im}\,s(\varphi\pm\pi)}=O\left(R^{-\operatorname{Re}\,s}\right)$$

при $R\to+\infty$ и фиксированном $\operatorname{Im}s$. В выражении $\varphi\pm\pi$ знак плюс выбирается, если $0\leqslant\varphi<\pi$, и выбирается знак минус, если $\pi\leqslant\varphi<2\pi$.

Далее воспользуемся представлением (6). Тогда

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right|=\left|\psi(1-z-a)-\psi(1+z+a)-\pi i\right|=\left|\psi(1-z-a)-\right.$$

$$-\ln(1-z-a)+\ln(1-z-a)-\psi(1+z+a)+\ln(1+z+a)-$$

$$\left.-\ln(1+z+a)-\pi i\right|\leqslant\left|\psi(1-z-a)-\ln(1-z-a)\right|+$$

$$+\left|-\psi(1+z+a)+\ln(1+z+a)\right|+\left|\ln(1-z-a)-\ln(1+z+a)-\pi i\right|.$$

Воспользуемся [10, глава 1, п. 1.18, формула 7] асимптотическим разложением для функции $\psi(z)$:

$$-\psi(z) + \ln z = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{при } 0 < \arg z < 2\pi.$$

В монографии [10] эта формула приведена при $-\pi < \arg z < \pi$ (для главного значения логарифма), но она верна и при $0 < \arg z < 2\pi$ для нашей ветви логарифма, поскольку главное значение логарифма и наш логарифм $\ln z$ принимают одинаковые значения в области D. Мы будем рассматривать данную асимптотику на окружностях $\{z : |z| = R_k\}$, на которых функция $f(z)$ не имеет нулей.

Тогда

$$|\psi(1-z-a) - \ln(1-z-a)| \leqslant \frac{C_1}{|1-z-a|}, \quad 0 < \arg(1-z-a) < 2\pi,$$
$$|\psi(1+z+a) - \ln(1+z+a)| \leqslant \frac{C_2}{|1+z+a|}, \quad 0 < \arg(1+z+a) < 2\pi.$$

Поэтому по неравенству (8)

$$\frac{1}{|1-z-a|} \leqslant \frac{1}{\big||1-a| - |z|\big|} = \frac{1}{|z| - |1-a|} = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{при } |z| \to +\infty,$$
$$\frac{1}{|1+z+a|} \leqslant \frac{1}{\big||1+a| - |z|\big|} = \frac{1}{|z| - |1+a|} = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{при } |z| \to +\infty.$$

Итак, при фиксированном a,

$$|\psi(1-z-a) - \ln(1-z-a)| + |-\psi(1+z+a) + \ln(1+z+a)| = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$$

при $|z| \to +\infty$.

Далее упростим выражение $\ln(1-z-a) - \ln(1+z+a) - \pi i$ для его последующей оценки.

Пусть $0 \leqslant \arg z < \pi$, тогда $\ln z - \ln(-z) = i(\arg z - \arg(-z)) = -\pi i$, и

$$\ln(1-z-a) - \ln(1+z+a) - \pi i = \ln\left[-z\left(1 + \frac{1-a}{-z}\right)\right] -$$
$$- \ln\left[z\left(1 + \frac{a+1}{z}\right)\right] - \pi i = \ln(-z) + \ln\left(1 + \frac{a-1}{z}\right) - \ln z -$$
$$- \ln\left(1 + \frac{a+1}{z}\right) - \pi i = \ln\left(1 + \frac{a-1}{z}\right) - \ln\left(1 + \frac{a+1}{z}\right).$$

Если же $\pi \leqslant \arg z < 2\pi$, тогда $\ln z - \ln(-z) = \pi i$ и

$$\begin{aligned}
&\ln(1-z-a) - \ln(1+z+a) - \pi i = \\
&= \ln\left[z\left(-1+\frac{1-a}{z}\right)\right] - \ln\left[-z\left(-1+\frac{a+1}{-z}\right)\right] - \pi i = \\
&= \ln z + \ln\left(-1+\frac{1-a}{z}\right) - \ln(-z) - \ln\left(-1+\frac{a+1}{-z}\right) - \pi i = \\
&= \ln\left(-1+\frac{1-a}{z}\right) - \ln\left(-1+\frac{a+1}{-z}\right) = \\
&= \ln\left[-1\left(1+\frac{a-1}{z}\right)\right] - \ln\left[-1\left(1+\frac{a+1}{z}\right)\right] = \\
&= \ln(-1) + \ln\left(1+\frac{a-1}{z}\right) - \ln(-1) - \ln\left(1+\frac{a+1}{z}\right) = \\
&= \ln\left(1+\frac{a-1}{z}\right) - \ln\left(1+\frac{a+1}{z}\right).
\end{aligned}$$

Для $w \in \mathbb{C}$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}
\left|\ln(1+w)\right| = \left|\ln|1+w| + i\theta\right| = \sqrt{\ln^2|1+w| + \theta^2} \leqslant 2\ln|1+w| \leqslant \\
\leqslant 2\ln(1+|w|), \quad \text{где } \theta = \arg(1+w).
\end{gathered}$$

Таким образом, для $0 \leqslant \arg z < 2\pi$

$$\begin{aligned}
&|\ln(1-z-a) - \ln(1+z+a) - \pi i| \leqslant \left|\ln\left(1+\frac{a-1}{z}\right)\right| + \\
&+ \left|\ln\left(1+\frac{a+1}{z}\right)\right| \leqslant 2\ln\left(1+\left|\frac{a-1}{z}\right|\right) + 2\ln\left(1+\left|\frac{a+1}{z}\right|\right) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)
\end{aligned}$$

при $|z| \to +\infty$, поскольку

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{2\ln\left(1+\frac{|a\pm1|}{|z|}\right)}{\frac{1}{|z|}} = \lim_{|z|\to+\infty} \frac{2\frac{|a\pm1|}{|z|}}{\frac{1}{|z|}} = 2|a\pm1|.$$

Итак, мы показали, что

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)} - \pi i\right| = O\left(\frac{1}{|z|}\right) \quad \text{при} \quad |z| \to +\infty. \tag{11}$$

Тогда понятно, что существует возрастающая последовательность положительных чисел R_k, $R_k \to +\infty$, такая что

$$\left|\frac{f'(z)}{f(z)} - \pi i\right|_{|z|=R_k} \leqslant \frac{C_3}{R_k} \quad \text{для всех} \quad k,$$

что следует из асимптотического разложения (11).

Тогда для модуля интеграла получим следующие оценки

$$\left|\int\limits_{S_R}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right\}(-z)^{-s}\,dz\right|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{S_R}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right|\left|(-z)^{-s}\right|\,|dz|\leqslant C_4R^{-\mathrm{Re}\ s-1}2\pi R=\frac{C_5}{R^{\mathrm{Re}\ s}}\to 0$$

при $R\to+\infty$ и $\mathrm{Re}\ s>0$. □

Лемма 3. *Пусть* $\varphi=\arg z$, *интеграл*

$$\int\limits_{S_r}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right\}(-z)^{-s}\,dz$$

стремится к нулю при $r\to+0$ *и* $\mathrm{Re}\ s<1$.

Доказательство. Аналогично лемме 2 при фиксированном $\mathrm{Im}\,s$

$$\left|(-z)^{-s}\right|=\left|e^{-s(\ln r+i(\varphi\pm\pi))}\right|=e^{-\mathrm{Re}\ s\ln r+\mathrm{Im}\ s(\varphi\pm\pi)}=O\left(r^{-\mathrm{Re}\ s}\right),\quad r\to+0.$$

Выбор знака в выражении $\varphi\pm\pi$ происходит аналогично лемме 2.
Учитывая лемму 1 для модуля интеграла сделаем следующие оценки:

$$\left|\int\limits_{S_r}\left\{\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right\}(-z)^{-s}\,dz\right|\leqslant\int\limits_{S_r}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}-\pi i\right|\left|(-z)^{-s}\right|\,|dz|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{S_r}\left(\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right|+\pi\right)\left|(-z)^{-s}\right|\,|dz|\leqslant$$
$$\leqslant C_6\Big(2\big(r+|a|\big)M(r)+\pi\Big)r^{-\mathrm{Re}\ s}\cdot 2\pi r=C_7\Big(2\big(r+|a|\big)M(r)+\pi\Big)r^{1-\mathrm{Re}\ s}. \tag{12}$$

Поскольку по лемме 1 предел $\lim\limits_{r\to+0}M(r)$ есть положительная константа, то выражение в (12) стремится к нулю при $r\to+0$, если $1-\mathrm{Re}\ s>0$, то есть $\mathrm{Re}\ s<1$. □

Следствие 1. *Если* $0<\mathrm{Re}\,s<1$, *то* $I_1+I_2\to 0$ *при* $r\to+0$ *и* $R=R_k\to+\infty$.

Рассмотрим интегралы по отрезкам, ориентированных в противоположных направлениях. Очевидно, что

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_r^R\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}-\pi i\right\}(-x)^{-s}\,dx.$$

В области D логарифм $\ln z$ однозначен и голоморфен, поэтому после обхода вокруг точки $z = 0$ на угол 2π против часовой стрелки (т. е. подстановки $z = xe^{2\pi i}$) интеграл I_4 преобразуется к виду

$$I_4 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_R^r \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\}(-x)^{-s}e^{-2\pi is}\,dx =$$

$$= -\frac{e^{-2\pi is}}{2\pi i}\int\limits_r^R \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\}(-x)^{-s}\,dx.$$

Таким образом,

$$I_3 + I_4 = \frac{1 - e^{-2\pi is}}{2\pi i}\int\limits_r^R \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\}(-x)^{-s}\,dx.$$

Очевидные вычисления дают:

$$\frac{1 - e^{-2\pi is}}{2\pi i}(-x)^{-s} = \frac{(-x)^{-s}}{e^{\pi is}}\cdot\frac{e^{\pi is} - e^{-\pi is}}{2\pi i} = \left(-xe^{\pi i}\right)^{-s}\frac{\sin\pi s}{\pi} = \frac{\sin\pi s}{\pi}x^{-s}.$$

Таким образом, мы приходим к утверждению.

Лемма 4. *Справедливо равенство*

$$I_3 + I_4 = \frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_r^R \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\}x^{-s}\,dx.$$

Выбирая последовательность R_k так, чтобы $R_k \to +\infty$, и устремляя $r \to +0$, относительно предельного значения выражения $I_3 + I_4$ докажем следующую лемму.

Лемма 5. *При* $r \to +0$ *и* $R = R_k \to +\infty$

$$I_3 + I_4 \to \frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\}x^{-s}\,dx,$$

который абсолютно сходится при $0 < \operatorname{Re} s < 1$.

Доказательство. Исследуем сходимость полученного несобственного интеграла в нуле и на бесконечности, т. е. представим (число A определено в доказательстве леммы 1)

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\}x^{-s}\,dx = \int\limits_0^{A} \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\}x^{-s}\,dx +$$

$$+ \int\limits_A^{+\infty} \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\}x^{-s}\,dx = J_1 + J_2.$$

Из леммы 1 получим

$$\int\limits_0^A \left|\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right| \left|x^{-s}\right| \, dx \leqslant C_8 \int\limits_0^A \Big(2\left(x + |a|\right) M(x) + \pi\Big) \frac{dx}{x^{\operatorname{Re} s}}.$$

Поскольку при $x \to 0$

$$2\left(x + |a|\right) M(x) + \pi \sim 2\,|a|\, M(0) + \pi,$$

что является положительной константой, то интеграл J_1 сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s < 1$.

Из оценки (11) получим

$$\int\limits_A^{+\infty} \left|\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right| \left|x^{-s}\right| \, dx \leqslant C_9 \int\limits_A^{+\infty} \frac{1}{x^{1+\operatorname{Re} s}} \, dx,$$

который сходится при $1 + \operatorname{Re} s > 1$, т. е. при $\operatorname{Re} s > 0$. Таким образом, мы показали, что J_2 сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s > 0$. $\square$

Итак, мы показали, что при $r \to +0$ и $R = R_k \to +\infty$ для $0 < \operatorname{Re} s < 1$

$$I(s) \to \frac{\sin \pi s}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left\{\frac{f'(x)}{f(x)} - \pi i\right\} x^{-s} \, dx.$$

Данные рассуждения заканчивают доказательство теоремы. $\square$

4 Некоторые следствия

Вначале упростим интегральное представление (10). Воспользуемся соотношением (6) и получим

$$\zeta_f(s, a) = a^{-s} + \frac{\sin \pi s}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \Big(\psi(1 - x - a) - \psi(1 + x + a) - \pi i\Big) x^{-s} \, dx.$$

Если воспользоваться свойством (см., например, [10, гл. 1, п. 1.7.1, формула 8]) функции $\psi(z)$, что

$$\psi(1 + z) = \psi(z) + \frac{1}{z}, \quad \text{то} \quad \psi(1 + x + a) = \psi(x + a) + \frac{1}{x + a} \quad \text{и}$$

$$\zeta_f(s, a) = a^{-s} + \frac{\sin \pi s}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \Big(\psi(1 - x - a) - \psi(x + a) - \pi i\Big) x^{-s} \, dx -$$

$$- \frac{\sin \pi s}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{-s}}{x + a} \, dx.$$

Для вычисления последнего интеграла приведем формулу (см., например, [26, гл. 6, п. 6.2, формула 3])

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{x+\alpha}\,dx = \frac{\pi\alpha^{s-1}}{\sin\pi s} \quad \text{при} \quad |\arg\alpha| < \pi, \quad 0 < \mathrm{Re}\ s < 1.$$

Тогда

$$a^{-s} - \frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{-s}}{x+a}\,dx = a^{-s} - \frac{\sin\pi s}{\pi}\cdot\frac{\pi a^{-s}}{\sin\pi s} = 0$$

при тех же условиях на s. Условие $|\arg a| < \pi$ выполнено, поскольку в теореме 1 $\mathrm{Im}\,a \neq 0$. Таким образом, получаем утверждение.

Следствие 2. *В условиях теоремы 1*

$$\zeta_f(s,a) = \frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\Big(\psi(1-x-a) - \psi(x+a) - \pi i\Big)x^{-s}\,dx.$$

Далее воспользуемся свойством (см., например, [10, гл. 1, п. 1.7.1, формула 11]) функции $\psi(z)$, что

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi\,\mathrm{ctg}\,(\pi z), \quad \text{т. е.}$$
$$\psi(1-x-a) - \psi(x+a) = \pi\,\mathrm{ctg}\,[\pi(x+a)].$$

Следствие 3. *В условиях теоремы 1*

$$\zeta_f(s,a) = \sin\pi s\int\limits_0^{+\infty}\Big(\mathrm{ctg}\,[\pi(x+a)] - i\Big)x^{-s}\,dx.$$

Поскольку

$$\mathrm{ctg}\,z - i = i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} - i = i\frac{2e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} = \frac{e^{-iz}}{\sin z},$$

то мы получаем еще одно утверждение.

Следствие 4. *В условиях теоремы 1*

$$\zeta_f(s,a) = \sin\pi s\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\pi(x+a)}}{\sin[\pi(x+a)]}x^{-s}\,dx.$$

5 Связь с дзета-функцией Гурвица

В данном разделе мы найдем связь рассматриваемой дзета-функции $\zeta_f(s,a)$ с дзета-функцией Гурвица $\zeta(s,a)$ для разных значений a. Используя найденную связь и следствия из интегрального представления для $\zeta_f(s,a)$, мы найдем новые меллиновские пары функций.

Лемма 6. *Пусть* $\ln z$ *означает главное значение логарифма, для которого* $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, $\ln 1 = 0$, *и* $s \in \mathbb{C}$. *Тогда справедливы следующие равенства:*

$$(-z)^s = (-1)^s z^s \quad \textit{при} \quad \mathrm{Im}\ z < 0,$$
$$(-z)^s = (-1)^s z^s e^{-2\pi i s} \quad \textit{при} \quad \mathrm{Im}\ z > 0,$$
$$(-z)^s = (-1)^s z^s \quad \textit{при} \quad z = x > 0.$$

Доказательство. Вначале заметим, что если $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то $-\pi < \arg(-z) \leqslant \pi$ и они связаны между собой следующим образом:

$$\arg(-z) = \arg z + \pi, \quad \text{если} \ -\pi < \arg z \leqslant 0, \tag{13}$$

$$\arg(-z) = \arg z - \pi, \quad \text{если} \ 0 < \arg z \leqslant \pi. \tag{14}$$

Формула (13) верна для $\mathrm{Im}\ z < 0$ и $z = x > 0$. Формула (14) верна для $\mathrm{Im}\ z > 0$ и $z = -x < 0$. Случай $z = -x < 0$ мы рассматривать не будем, так как он нам не требуется в дальнейшем.

Найдем условия на $\mathrm{Im}\ z$ и значения $\alpha \in \mathbb{R}$, при котором верно

$$(-z)^s = (-1)^s z^s e^{i\alpha s},$$
$$\left(e^{\ln(-z)}\right)^s = \left(e^{\pi i}\right)^s \left(e^{\ln z}\right)^s \left(e^{i\alpha}\right)^s,$$
$$\ln|-z| + i\arg(-z) = \pi i + \ln|z| + i\arg z + i\alpha,$$
$$\arg(-z) = \pi + \arg z + \alpha.$$

Учитывая (13), получаем, что $\alpha = 0$ для $-\pi < \arg z \leqslant 0$, т. е. для $\mathrm{Im}\ z < 0$ и $z = x > 0$. Учитывая (14), получаем, что $\alpha = -2\pi$ для $0 < \arg z \leqslant \pi$, т. е. для $\mathrm{Im}\ z > 0$. □

Теорема 2. *Пусть* $\zeta_f(s,a)$ *– дзета-функция, определяемая рядом* (1), *и* $\zeta(s,a)$ *– дзета-функция Гурвица. Тогда для всех значений* $s \in \mathbb{C}$ *справедливы равенства:*

$$\zeta_f(s,a) = \zeta(s,a) + (-1)^{-s}\zeta(s,1-a), \quad \mathrm{Im}\ a > 0, \tag{15}$$

$$\zeta_f(s,a) = \zeta(s,a) + e^{\pi i s}\zeta(s,1-a), \quad \mathrm{Im}\ a < 0, \tag{16}$$

$$\zeta_f(s,a) = \zeta(s,a-[a]) + (-1)^{-s}\zeta(s,1-a+[a]), \quad a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}, \tag{17}$$

где $[a]$ *обозначает целую часть числа* a.

Доказательство. Пусть $\mathrm{Re}\ s > 1$. Тогда

$$\zeta_f(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(n+a)^s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^s} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(-k-1+a)^s}. \tag{18}$$

Пусть $-z = -k-1+a$, т. е. $z = k+1-a$. Тогда по лемме 6

$$(-k-1+a)^s = (-1)^s(k+1-a)^s$$

при условии $\mathrm{Im}\ z = \mathrm{Im}\ \ (k+1-a) = -\mathrm{Im}\ a < 0$, то есть $\mathrm{Im}\ a > 0$. Тогда, продолжая равенство (18), получим

$$\zeta_f\left(s,a\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+a\right)^s} + \left(-1\right)^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k+1-a\right)^s}, \quad \mathrm{Im}\ a > 0,$$

и мы доказали равенство (15) для $\mathrm{Re}\ s > 1$. По принципу аналитического продолжения равенство (15) верно для всех s.

Если же, согласно лемме 6,

$$\left(-k-1+a\right)^s = \left(-1\right)^s \left(k+1-a\right)^s e^{-2\pi i s}$$

при условии $\mathrm{Im}\ z = -\mathrm{Im}\ a > 0$, то есть $\mathrm{Im}\ a < 0$, то, продолжая равенство (18), получим

$$\zeta_f\left(s,a\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+a\right)^s} + \left(-1\right)^{-s} e^{2\pi i s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k+1-a\right)^s}, \quad \mathrm{Im}\ a < 0.$$

Таким образом, мы доказали равенство (16) для $\mathrm{Re}\ s > 1$. По принципу аналитического продолжения равенство (16) верно для всех s.

Перейдем к доказательству равенства (17). Будем считать, что существует такое целое число N, что для заданного значения a

$$N < a < N+1. \tag{19}$$

Поскольку a – не целое, то в качестве N можно выбрать $N = [a]$. В дальнейшем мы будем писать N и подставим его в окончательной формуле.

Пусть $\mathrm{Re}\ s > 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\zeta_f\left(s,a\right) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(l+N-N+a\right)^s} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(n+a-N\right)^s} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+a-N\right)^s} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\left(n+a-N\right)^s} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+a-N\right)^s} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(-k-1+a-N\right)^s}.\end{aligned} \tag{20}$$

Из неравенства (19) следует, что $a-N-1 < 0$. Тогда $-k-1+a-N < 0$ для $k \geqslant 0$. Следовательно, из леммы 6 получаем

$$\left(-k-1+a-N\right)^s = \left(-1\right)^s \left(k+1-a+N\right)^s.$$

Тогда, продолжая равенство (20), получим

$$\zeta_f\left(s,a\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(n+a-N\right)^s} + \left(-1\right)^{-s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left(k+1-a+N\right)^s}.$$

Таким образом, мы доказали равенство (17) для $\mathrm{Re}\ s > 1$. По принципу аналитического продолжения равенство (17) верно для всех s. □

6 Меллиновские пары

Напомним (см., например, [2, гл. 2, п. 15]), что формулы обращения Меллина связывают две функции

$$G(s) = \int_0^{+\infty} g(x)\, x^{s-1}\, dx, \qquad g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(s)\, x^{-s}\, ds, \qquad \sigma = \operatorname{Re} s.$$

Они называются меллиновской парой.

В данном разделе на основе результатов предыдущих пунктов приведем меллиновские пары, которые отсутствуют в известных справочниках по специальным функциям (см., например, [26, гл. 6]).

Комбинируя следствие 3, следствие 4 с формулой (15) из теоремы 2 после замены s на $(1-s)$ получим следующий результат.

Следствие 5. *Для* $0 < \operatorname{Re} s < 1$ *и* $\operatorname{Im} a > 0$ *справедливы следующие равенства:*

$$\int_0^{+\infty} \Big(\operatorname{ctg}[\pi(x+a)] - i\Big) x^{s-1}\, dx = \frac{1}{\sin \pi s} \Big\{ \zeta(1-s, a) - e^{\pi i s} \zeta(1-s, 1-a) \Big\},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\pi(x+a)}}{\sin[\pi(x+a)]} x^{s-1}\, dx = \frac{1}{\sin \pi s} \Big\{ \zeta(1-s, a) - e^{\pi i s} \zeta(1-s, 1-a) \Big\}.$$

Аналогично, комбинируя следствие 3, следствие 4 с формулой (16) из теоремы 2 после замены s на $(1-s)$ получим следующий результат.

Следствие 6. *Для* $0 < \operatorname{Re} s < 1$ *и* $\operatorname{Im} a < 0$ *справедливы следующие равенства:*

$$\int_0^{+\infty} \Big(\operatorname{ctg}[\pi(x+a)] - i\Big) x^{s-1}\, dx = \frac{1}{\sin \pi s} \Big\{ \zeta(1-s, a) - e^{-\pi i s} \zeta(1-s, 1-a) \Big\},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\pi(x+a)}}{\sin[\pi(x+a)]} x^{s-1}\, dx = \frac{1}{\sin \pi s} \Big\{ \zeta(1-s, a) - e^{-\pi i s} \zeta(1-s, 1-a) \Big\}.$$

Итак, мы имеем 4 меллиновские пары для $0 < \operatorname{Re} s < 1$:

$$\begin{aligned}
&1)\ G_1(s) = \frac{1}{\sin \pi s}\Big\{\zeta(1-s,a) - e^{\pi i s}\zeta(1-s,1-a)\Big\},\\
&\quad g_1(x) = \operatorname{ctg}[\pi(x+a)] - i, \qquad \operatorname{Im} a > 0,\\
&2)\ G_2(s) = \frac{1}{\sin \pi s}\Big\{\zeta(1-s,a) - e^{\pi i s}\zeta(1-s,1-a)\Big\},\\
&\quad g_2(x) = \frac{e^{-i\pi(x+a)}}{\sin[\pi(x+a)]}, \qquad \operatorname{Im} a > 0,\\
&3)\ G_3(s) = \frac{1}{\sin \pi s}\Big\{\zeta(1-s,a) - e^{-\pi i s}\zeta(1-s,1-a)\Big\},\\
&\quad g_3(x) = \operatorname{ctg}[\pi(x+a)] - i, \qquad \operatorname{Im} a < 0,\\
&4)\ G_4(s) = \frac{1}{\sin \pi s}\Big\{\zeta(1-s,a) - e^{-\pi i s}\zeta(1-s,1-a)\Big\},\\
&\quad g_4(x) = \frac{e^{-i\pi(x+a)}}{\sin[\pi(x+a)]}, \qquad \operatorname{Im} a < 0.
\end{aligned}$$

References

[1] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[2] E.C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford University Press, Oxford, 1951.

[3] A.A. Saaryan, *Towards an Abel-Plana Summing Formula*, Soviet Journal of Contemporary Physics, **21**:5 (1986), 32–36 .

[4] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, *On an Analog of the Plan's Formula*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **53**:3 (2018), 139–146.

[5] V.I. Kuzovatov, *Generalization of the Plana Formula*, Russian Mathematics, **62**:5 (2018), 34–43.

[6] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, *On an analog of the Binet integral representation*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 840–852.

[7] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, *On one integral representation of Binet type*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **21**:2 (2024), 741—754 (in Russian).

[8] N.M. Dobrovolsky, N.N. Dobrovolsky, V.N. Soboleva, D.K. Sobolev, L.P. Dobrovol'skaya, O.E. Bocharova, *On hyperbolic Hurwitz zeta function*, Chebyshevskii sbornik, **17**:3 (2016), 72—105 (in Russian).

[9] N.N. Dobrovolsky, *Zeta-functions of monoids of natural numbers and related topics*, TSPU named after L.N. Tolstoy, Tula, 2024 (in Russian).

[10] H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions. V. 1*, MC Graw-Hill Book Company, New York, 1953.

[11] V.B. Lidskii, V.A. Sadovnichii, *Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions*, Functional Analysis and Its Applications, **1**:2 (1967), 133–139.

[12] I.M. Gel'fand, B.M. Levitan, *On a Simple Identity for Eigenvalues of a Second Order Differential Operator*, Sov. Phys. Dokl., **88**:4 (1953), 593–596 (in Russian).

[13] L.A. Dikii, *The Zeta-Function of an Ordinary Differential Equation on a Finite Interval*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., **19**:4 (1955), 187–200 (in Russian).

[14] L.A. Dikii, *Trace Formulas for Sturm-Liouville Differential Operators*, Uspekhi Mat. Nauk, **13**:3 (1958), 111–143 (in Russian).

[15] S.A. Smagin, M.A. Shubin, *On the Zeta-Function of a Transversally Elliptic Operator*, Russian Mathematical Surveys, **39**:2 (1984), 201–202.

[16] V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov, A. Sadullaev, *On the Zeta-Function of Zeros of an Entire Function*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **14**:5 (2021), 599–603.

[17] V.I. Kuzovatov, *On one Proof of the Integral Representation for the Riemann Zeta-Function*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **18**:6 (2025), 793–798.

[18] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, *The joint universality of Dirichlet L-functions and Lerch zeta-functions*, Siberian Math. J., **55**:4 (2014), 645–657.

[19] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, D. Mochov et al., *Universality of the Periodic Hurwitz Zeta-Function with Rational Parameter*, Siberian Math. J., **59**:5 (2018), 894–900.

[20] A. Balčiūnas, A. Dubickas, A. Laurinčikas, *On the Hurwitz Zeta Functions with Algebraic Irrational Parameter*, Math. Notes, **105**:2 (2019), 173–179.

[21] A.M. Kytmanov, S.G. Myslivets, *On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations*, Siberian Math. J., **48**:5 (2007), 863–870.

[22] A.P. Prudnikov, Yu.A. Brychkov, O.I. Marichev, *Integrals and Series. Elementary Functions*, Gordon & Breach Science Publishers, New York, 1986.

[23] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Sums, Series, and Products*, Publishing House of Physics and Mathematics Literature, Moscow, 1963 (in Russian).

[24] A.I. Markushevich, *The theory of analytic functions. V. 2*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (in Russian).

[25] M.A. Lavrent'ev, B.V. Shabat, *Methods of the Theory of Functions of Complex Variables*, Lan', St. Petersburg, 2002 (in Russian).

[26] H. Bateman, A. Erdelyi, *Tables of integral transforms. V. 1*, MC Graw-Hill Book Company, New York, 1954.

Vyacheslav Igorevich Kuzovatov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: vkuzovatov@sfu-kras.ru

Alexander Mechislavovich Kytmanov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: akytmanov@sfu-kras.ru