S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Vol. 20, No. 2, pp. 144–145 (2023)
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.???

УДК 512.54
MSC 20F50

ГИПОТЕЗА СУНЯ О СТЕПЕНЯХ ЭЛЕМЕНТОВ ГРУППЫ

А. А. БУТУРЛАКИН, Н. Р. ШАКИРОВ orcid.pdf

Abstract: This paper considers the conjecture [2, conjecture 4.1], also [1, question 20.100]).

In the paper [2], this conjecture is proved for arbitrary groups with $n \leqslant 3$ and for arbitrary n in the class of torsion-free abelian groups.

The aim of this paper is to prove this conjecture in the class of periodic groups for all $n \leqslant 6$.

Keywords: group theory, algebra.

1 Введение

В данной работе рассматривается следующая гипотеза

Гипотеза ([2, гипотеза 4.1], также [1, вопрос 20.100]). *Пусть n — натуральное число и G — группа, в которой нет элементов порядков 2, 3, ..., $n+1$. Тогда для любого подмножества A группы G, состоящего из n элементов, существует такое упорядочение элементов этого множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, что элементы a_1, a_2^2, ..., a_n^n попарно различны.*

В работе [2] эта гипотеза доказана для произвольных групп при $n \leqslant 3$ и для произвольных n в классе абелевых групп без кручения.

Buturlakin A. A., Shakirov N. R., Sun's hypothesis on the degrees of group elements.

The work of the second author was supported by the Russian Science Foundation, project 25-41-10008.

.

Целью настоящей работы является доказательство этой гипотезы в классе периодических групп для всех $n \leqslant 6$.

Теорема. *Пусть $n \leqslant 6$ — натуральное число и G — периодическая группа, в которой нет элементов порядков $2, 3, \ldots, n+1$. Тогда для любого подмножества A группы G, состоящего из n элементов, существует такое упорядочение элементов этого множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, что элементы a_1, a_2^2, …, a_n^n попарно различны.*

В первой главе приведены вспомогательные леммы, описывающие свойства степеней элементов в периодической группе, не содержащей элементов малых порядков. В частности, показано, что при определённых условиях совпадение степеней двух элементов влечёт их равенство или совпадение порождённых ими циклических подгрупп. Во второй главе осуществляется непосредственное доказательство теоремы для $n = 4, 5, 6$. Основным инструментом является введение графов $\Gamma(A)$ и $\gamma(A)$, которые позволяют свести задачу к анализу возможных конфигураций рёбер, соответствующих соотношениям между степенями элементов. С помощью лемм о композиции цветов рёбер и оценок на количество рёбер показывается, что контрпример к утверждению теоремы невозможен.

2 Предварительные леммы

Напомним, что группа называется периодической, если все её элементы имеют конечный порядок.

Везде далее n — натуральное число и G — периодическая группа без элементов порядков 2, 3, …, $n+1$.

Для натуральных чисел k и m через (k, m) обозначается их наибольший общий делитель, $\equiv_k$ обозначает сравнимость по модулю k.

Отметим сначала некоторые свойства соответствующих степеней элементов группы G.

Lemma 1. *Пусть a_i, $a_j \in G$ и $a_i^k = a_j^l$ для некоторых $1 \leqslant k, l \leqslant n$. Тогда $\langle a_i \rangle = \langle a_j \rangle$.*

Proof. В силу условий на порядки элементов группы G числа k и l взаимно просты с порядками a_i и a_j соответственно и, следовательно, обратимы по этим модулям. Таким образом, существуют такие целые u и v, что $a_i = (a_i^k)^u = a_j^{lu}$ и $a_j = a_i^{kv}$. В частности, группа $\langle a_i \rangle$ содержится в $\langle a_j \rangle$ и наоборот, т.е. они совпадают, что и требовалось показать. □

Lemma 2. *Пусть a_i, $a_j \in G$ и $a_i^{lk} = a_j^{mk}$ для $1 \leqslant l, m, k \leqslant n$. Тогда $a_i^l = a_j^m$. В частности, если $l = m$, то $a_i = a_j$.*

Proof. По лемме 1 элементы a_i и a_j порождают одну циклическую группу. Так как $(k, |a_i|) = 1$, то существуют $u, v \in \mathbb{Z}$ такие, что $k \cdot u + |a_i| \cdot v = 1$, откуда следует, что $a_i^l = a_i^{lku} = a_j^{mku} = a_j^m$. □

Lemma 3. *Пусть* $a_i^k = a_j^l$ *и* $a_i^s = a_j^t$, *где* $1 \leqslant k, l, s, t \leqslant n$. *Положим*

$$d = \begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix}.$$

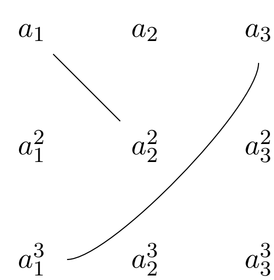
Тогда $|a_i|$ *делит* d. *В частности, если* $d \neq 0$, *то* $|a_i|$ *не превосходит* $n^2 - 1$.

Proof. По лемме 1 подгруппы, порожденные a_i и a_j, совпадают. Кроме того, порядок $|a_i^k|$ совпадает с $\alpha = |a_i|$. Следовательно, существует целое число u такое, что $a_i^s = a_i^{ku}$. Тогда $a_j^{lu} = a_j^t$. Отсюда получаем, что $ku \equiv_\alpha s$ и $lu \equiv_\alpha t$, а значит $u(kt - ls) \equiv_\alpha 0$. Осталось заметить, что поскольку a_i^s порождает ту же группу, что и a_i, число u взаимно просто с α и $d = (ks - lt) \equiv_\alpha 0$. $\square$

3 Доказательство теоремы

Утверждение теоремы для $n \leqslant 3$ доказано в [2, теорема 1.4].

Будем называть нумерацию элементов множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ хорошей, если элементы $a_1, a_2^2, \ldots, a_n^n$ попарно различны, и плохой в противном случае. Препятствием для существования подходящей нумерации элементов множества A являются зависимости вида $x^k = y^l$, где $x, y \in A$ и $1 \leqslant k, l \leqslant n$. Зафиксируем некоторую нумерацию множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Для наглядности будем изображать зависимости между элементами множества A в виде n-дольного графа $\Gamma(A)$, в котором i-ая доля, которую мы будем обозначать через $[a_i]$, состоит из a_i, a_i^2, $\ldots$, a_i^n. При этом две вершины из разных долей соединены ребром, если соответствующие элементы совпадают. Например, граф



изображает, что для трех элементов a_1, a_2 и a_3 выполнены равенства $a_1 = a_2^2$ и $a_3 = a_1^3$. Заметим, что, если $a_i^k = a_j^l$, то все нумерации множества A, в которых a_i и a_j стоят на местах k и l, являются плохими. Количество таких нумераций равно $(n-2)!$. Следовательно, если для множества A не существует хорошей нумерации, то граф $\Gamma(A)$ имеет не менее $n(n-1)$ ребер. В силу ограничений на порядки элементов группы, если v — вершина графа $\Gamma(A)$ и $[a_i]$ — это доля, не содержащая v, то существует не более одного ребра вида (v, u), где $u \in [a_i]$. Отсюда сразу следует, что подграф, чье множество вершин состоит из двух долей, содержит не более чем n ребер. Кроме того, согласно лемме 2 граф $\Gamma(A)$ не содержит "горизонтальных" ребер, т.е. соотношений вида $a_i^k = a_j^k$.

Будем обозначать через $\gamma(A)$ граф, чье множество вершин — это множество долей графа $\Gamma(A)$ и в котором две вершины соединены ребром, если индуцированный подграф на этих двух долях непуст. Так, например, для графа на рис.1, граф $\gamma(A)$ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{ccc} [a_1] & — & [a_2] \\ & \diagdown & \\ & & [a_3] \end{array}$$

Пусть $n = 4$ и подмножество $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ группы G является контрпримером к утверждению теоремы. Тогда граф $\Gamma(A)$ должен иметь не менее 12 ребер.

Покажем, что в этом случае можно считать, что граф $\gamma(A)$ связен. Если $\gamma(A)$ несвязен, то он имеет компоненту связности из 1 или 2 вершин. В первом случае занумеруем A таким образом, чтобы доля $[a_4]$, была компонентой связности $\gamma(A)$, а нумерация a_1, a_2, a_3 была хорошей нумерацией оставшихся трех элементов. Получившаяся нумерация, очевидно, является хорошей. Во втором случае две компоненты связности образуют два двудольных графа на четырех вершинах. Максимальное количество рёбер между двумя долями одного двудольного графа равно четырем. В итоге граф $\Gamma(A)$ содержит не более восьми рёбер, в то время как для контрпримера необходимо не менее 12 рёбер. Таким образом, можно считать, что граф $\gamma(A)$ связен. В частности, все множество A содержится в одной циклической подгруппе, например, $\langle a_1 \rangle$, по лемме 1.

Два ребра между двумя данными долями, например, $[a_i]$ и $[a_j]$, назовем коллинеарными, если они имеют вид $a_i^k = a_j^l$ и $a_i^s = a_j^t$ и

$$\begin{vmatrix} k & l \\ s & t \end{vmatrix} = 0$$

По лемме 3, если граф $\Gamma(A)$ имеет неколлинеарные рёбра, то порядок элемента не будет превосходить $n^2 - 1$. Если $n = 4$, то $|a_1| \leqslant 4^2 - 1 = 15$. При этом порядок элемента должен раскладываться на простые множители, которые превосходят числа 2, 3, $\ldots$, $n + 1$. Таким образом, единственные возможные порядки для элемента a_1 будут соответственно 7, 11, 13. В данном случае утверждение проверяется с помощью компьютерных вычислений.

Если $|a_1| > 15$, то максимальное количество ребер между долями равно 2, причем эта пара ребер имеет вид $a_i = a_j^2$ и $a_i^2 = a_j^4$. Поскольку нам необходимо минимум 12 ребер в графе, то получаем, что между любыми двумя долями должно быть два ребра. Рассмотрим доли $[a_1]$, $[a_2]$ и $[a_3]$ в индуцированном подграфе $\gamma(A)$. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 = a_2^2$. Для a_2 и a_3 имеем либо $a_2 = a_3^2$, либо $a_3 = a_2^2$. В последнем случае $a_3 = a_1$; противоречие. В первом случае имеем $a_1 = a_3^4$, что противоречит тому что должно быть либо $a_1 = a_3^2$, либо $a_3 = a_1^2$, что завершает доказательство для $n = 4$.

Пусть $n = 5$. Если пара (G, A) является контрпримером к утверждению теоремы, то соответствующий граф должен иметь не менее 20 рёбер.

Покажем, что в этом случае, можно считать, что граф $\gamma(A)$ связен. Если $\gamma(A)$ несвязен, то он имеет компоненту связности из 1 или 2 вершин. В первом случае занумеруем A таким образом, чтобы доля, соответствующая a_5, была компонентой связности $\gamma(A)$, а a_1, a_2, a_3, a_4 были хорошей нумерацией оставшихся четырех элементов. Во втором случае, элементы, не лежащие в соответствующей компоненте размера 2, имеют хорошую нумерацию a_1, a_2, a_3, которую можно дополнить до хорошей нумерации всех пяти элементов. Действительно, равенства $a_4^4 = a_5^5$ и $a_4^5 = a_5^4$ влекут, что $|a_5| = |a_4| = 9$, что запрещено в группе G. Таким образом, можем считать, что граф $\gamma(A)$ связен, что как и раньше влечет $A \subseteq \langle a_1 \rangle$. Если $|a_1| \leqslant 5^2 - 1 = 24$, то утверждение может быть проверенно с помощью компьютерных вычислений.

Если $|a_1| > 24$, то количество ребер между любыми двумя долями не превосходит 2. Следовательно, контрпример возможен только если между любой парой долей два ребра. По аналогии с предыдущим пунктом, ситуация, когда любые две доли связаны соотношениями $a_i = a_i^2$, $a_i^2 = a_j^4$ влечет, что общее количество ребер в графе не будет превосходить 19. Таким образом, для $n = 5$ контрпримера не существует.

Пусть $n = 6$. Если пара (G, A) является контрпримером к утверждению теоремы, то соответствующий граф должен иметь не менее чем 30 ребер.

Lemma 4. *Количество ребер между двумя долями графа* $\Gamma(A)$ *меньше или равно* 4 *и граф* $\gamma(A)$ *связен.*

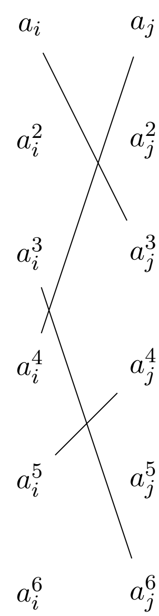
Proof. Пусть найдутся доли между которыми проходит 6 ребер. Тогда, перемножив все соотношения получим, $a_i^{21} = a_j^{21}$. Поскольку в группе нет элементов порядка $2, 3, \dots, 7$, то $(21, |a_i|) = 1$ и из этого равенства следует, что $a_i = a_j$ — противоречие.

Пусть между двумя долями 5 ребер. Допустим, что в одной из долей, например, соответствующей a_i, вершины a_i и a_i^2 соединены ребрами со второй долей, т.е. имеют место соотношения $a_i = a_j^k$ и $a_i^2 = a_j^l$. Следовательно, либо $l = 2k$, либо порядок a_i делит $l - 2k$. В первом случае $k = 2$ или 3. Во втором случае $l - 2k$ по модулю не превосходит 11, следовательно, $|a_i| = 11$, $l = 1$ и $k = 6$. Рассмотрим эти случаи по отдельности.

Пусть $a_i = a_j^2$, тогда еще $a_i^2 = a_j^4$ и $a_i^3 = a_j^6$. Как минимум одна из вершин a_i^4 и a_i^5 должна быть соединена ребром с вершиной из доли a_j.

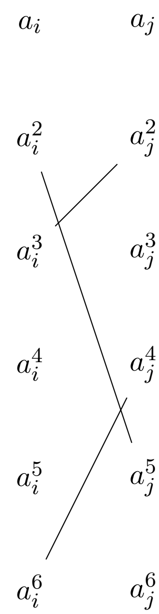
Если $a_i^4 = a_j^n$, то $a_j^{8-n} = 1$ и $8 - n \leqslant 7$, что невозможно. Если $a_i^5 = a_j^k$, то $a_j^{10-k} = 1$, где $10 - k \leqslant 9$.

Пусть теперь $a_i = a_j^3$ и $a_i^2 = a_j^6$. Аналогично предыдущему показывается, что ребро вида $a_i^3 = a_j^t$ приводит к противоречию. Следовательно, из всех остальных вершин доли a_i выходит по ребру, но из соотношения $a_i^4 = a_j^s$, следует, что $|a_j| = 11$. В этом случае непосредственно проверяется, что подграф, порожденный долями a_i и a_j имеет следующий вид.

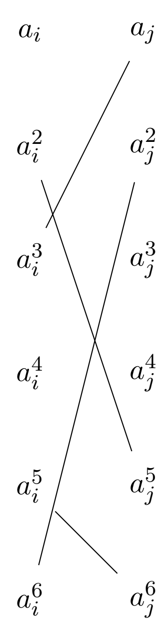


Отсюда заключаем, что одна из вершин из каждой пары (a_i, a_i^2) и (a_j, a_j^2) не должна быть инцидента ребру. С точностью до перенумерации можем считать, что не инциндентны рёбрам a_i и a_j^2. Тогда имеют место соотношения $a_i^2 = a_j^k$ и $a_i^3 = a_j^l$ для некоторых $1 \leqslant k, l \leqslant 6$ и порядок a_i делит $2l - 3k \neq 0$. Поскольку $2l - 3k$ по модулю не превосходит 16, получаем $|a_i| = 11$ или 13.

Пусть $|a_i| = 11$. Из уравнения $|2l - 3k| = 11$ получаем, что $k = 5$ и $l = 2$. Построим данный граф и убедимся, что количество вершин не превосходит 4.



Пусть $|a_i| = 13$. Из уравнения $|2l - 3k| = 13$ получаем, что $k = 5$ и $l = 1$. Как и в предыдущем случае, построим граф и убедимся, что количество вершин не превосходит 4.



Таким образом, между любыми двумя долями графа количество вершин не превосходит 4.

Покажем, что граф $\gamma(A)$ связен. Если $\gamma(A)$ несвязен, то он имеет компоненту связности из 1, 2 или 3 вершин. В первом случае занумеруем A таким образом, чтобы доля, соответствующая a_6, была компонентой связности $\gamma(A)$, а a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 были хорошей нумерацией оставшихся элементов. Во втором случае, как мы уже показали между любыми двумя долями не более чем 4 ребра. Значит максимальное количество ребер в графе равно 28. При этом для контрпримера необходимо не менее 30 ребер. В третьем случае, аналогично предыдущему, максимальное количество ребер в графе равно 24. Таким образом, можем считать, что граф $\gamma(A)$ связен. □

Если порядки a_i меньше 35, то утверждение может быть напрямую проверено с помощью компьютерных вычислений. Поэтому будем считать, что порядки элементов больше 35.

Если сопоставить каждому ребру графа $\gamma(A)$ набор ребер графа $\Gamma(A)$, соединяющих соответствующие доли, то получится граф с раскрашенными ребрами, полностью отражающий структуру графа $\Gamma(A)$. При этом, если ребро e соединяет вершины a_i и a_j в графе $\gamma(A)$, то его цвет можно записать как множество пар чисел (k, l) таких, что граф $\Gamma(A)$ содержит ребро (a_i^k, a_j^l). Если порядки a_i больше 35, то из леммы следует, что все такие пары из одного цвета должны быть пропорциональны. Например, вместе с ребром (a_i, a_j^2) граф $\Gamma(A)$ должен содержать ребра (a_i^2, a_j^4) и (a_i^3, a_j^6) и не может содержать других ребер между этими долями. Кроме того, если между двумя долями есть, например, ребро (a_i^2, a_j^4), то по лемме 2 есть и ребро (a_i, a_j^2), т.е. "наименьшее" ребро в любом цвете имеет вид (a_i^k, a_j^l), где k и l — взаимно простые числа.

Таким образом, с точностью до перестановки долей в графе $\gamma(A)$ могут быть представлены следующие цвета (цвет мы будем обозначать в формате k_l, где k — вес цвета, т.е. количество ребер в нем, а l — номер цвета среди цветов данного веса, либо пустой символ, если цвет такого веса один).

Цвет	Ребра	Цвет	Ребра	Цвет	Ребра
3	$(1,2),(2,4),(3,6)$	1_2	$(1,\ 5)$	1_6	$(3,5)$
2_1	$(1,3),(2,6)$	1_3	$(1,\ 6)$	1_7	$(4,5)$
2_2	$(2,3),(4,6)$	1_4	$(2,\ 5)$	1_8	$(5,6)$
1_1	$(1,4)$	1_5	$(3,\ 4)$		

Таблица 1. Цвета

При этом пары цветов, соответствующих перестановке долей, например, пару (3 5) и (5 3), естественно различать, вводя направление соответствующего ребра. Договоримся началом ребра считать ту долю, у которой показатели степеней меньше.

Если Ω — некоторое множество и $r,\ s \subseteq \Omega^2$ — два бинарных отношения на Ω, то композицией rs этих отношений называется подмножество Ω^2, определенное по правилу

$$rs = \{(\alpha, \beta) | \exists \gamma \in \Omega : (\alpha, \gamma) \in r \text{ и } (\gamma, \beta) \in s\}.$$

Если в графе $\gamma(A)$ в некоторую вершину входит ребро e цвета 3 и выходит ребро f того же цвета, то начало ребра e соединено с концом ребра f ребром цвета 1_1. Опишем все ситуации, когда наличие двух смежных ребер в графе $\gamma(A)$ влечет существование третьего ребра. Заметим, что цвета ребер в нашем определении являются бинарными отношениями на множестве $\{1, \dots, 6\}$ и при такой интерпретации цвет 1_1 является композицией цветов 3 и 3. Будем считать, что композиция задается упорядоченной парой (f, g), где f, g —цвета. Кроме того, из равенства $f \circ g = h$, где h —некоторый цвет, следует, что если из одной вершины исходят два ребра цветов f и h, то между ними обязательно возникнет ребро цвета g. Аналогично между g и h будет ребро цвета f. Данная ситуация описана на рис. 1. Все такие правила композиции цветов приведены в таблице 2.

$$\begin{tikzcd}
{[a_i]} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & {[a_j]} \arrow[d, "g"] \\
 & {[a_k]}
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Композиция

Прочерки в таблице 2 означают, что композиция соответствующих цветов не является цветом из таблицы 1.

Lemma 5. *Если граф* $\gamma(A)$ *содержит* 6, 5 *или* 4 *ребра цвета* 3*, то он также содержит не менее* 6, 4 *или* 2 *ребер цвета* 1_1 *соответственно.*

Proof. Пусть 6 ребер имеют цвет 3. По лемме 2 из одной вершины $\gamma(A)$ не может выходить два ребра одного цвета и в вершину не может входить два ребра одного цвета. Следовательно, в каждую вершину графа $\gamma(A)$ входит и выходит ребро цвета 3. Следовательно, согласно таблице 1 найдется не менее 6 ребер цвета 1_1.

Пусть 5 ребер имеют цвет 3. Пусть S —множество вершин, из которых исходит ребро цвета 3, T — множество вершин, в которые входит ребро цвета 3. Тогда $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$. Поскольку $|S| = |T| = 5$, а $|S \cup T| = 5$ или 6, имеем $|S \cap T| = 5$ или $|S \cap T| = 4$. Следовательно, найдется не менее 4 ребер цвета 1_1.

Если есть 4 ребра цвета 3, то $|S \cap T| \geqslant 2$. Следовательно, найдется по крайней мере 2 ребра цвета 1_1. $\square$

	3	2_1	2_2	1_1	1_2	1_3	1_4	1_5	1_6	1_7	1_8
3	1_1	1_3	2_1	-	-	-	1_2	-	-	1_4	-
2_1	1_3	-	-	-	-	-	-	1_1	1_2	-	-
2_2	2_1	-	-	-	-	-	-	3	1_4	-	-
1_1	-	-	1_3	-	-	-	-	-	-	1_2	-
1_2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1_3
1_3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1_4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2_1
1_5	-	-	3	-	-	-	-	-	-	1_6	-
1_6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3
1_7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2_2
1_8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Таблица 2. композиция цветов

Всюду дальше количество ребер цвета 3, 2 и 1 в графе $\Gamma(A)$ будем обозначать тройкой чисел (a, b, c), где a — количество ребер цвета 3, b — количество ребер цветов с весом 2 и c — количество ребер цветов с весом 1. Будем называть такую тройку чисел типом графа $\gamma(A)$. Поскольку граф $\gamma(A)$ имеет не более 15 ребер, имеем $a + b + c \leqslant 15$. При этом количество ребер в графе $\Gamma(A)$ должно быть не менее 30. Таким образом, $3a + 2b + c \geqslant 30$.

Пусть граф $\gamma(A)$ содержит $k \geqslant 4$ ребер цвета 3. Тогда выполнено одно из следующих утверждений.

1) $k = 6$ и $\gamma(A)$ имеет тип $(6, 3, 6)$;
2) $k = 5$ и $\gamma(A)$ имеет тип $(5, 6, 4)$ или $(5, 5, 5)$;
3) $k = 4$ и $\gamma(A)$ имеет тип $(4, 8, 2)$, $(4, 9, 2)$, $(4, 8, 3)$ или $(4, 7, 4)$.

Proof. Пусть тип $\gamma(A)$ имеет вид $(6, b, c)$. Из леммы 5 следует, что $c \geqslant 6$. Таким образом, $b \leqslant 3$ и неравенство $3a + 2b + c \geqslant 30$ имеет единственное решение $(6, 3, 6)$.

Остальные случаи разбираются аналогично. $\square$

Lemma 6. *Если граф $\gamma(A)$ содержит $k \geqslant 6$ ребер цветов с весом 2, то он также содержит не менее $k - 6$ ребер цвета 3.*

Proof. Из таблицы 1 видно, что если из одной вершины $[a_i]$ исходят рёбра цветов 2_1 и 2_2, то концы этих рёбер соединены ребром g_{a_i} цвета 3. Следовательно, если количество рёбер цвета 2 больше 6, то найдется $k - 6$ вершин из которых исходят одновременно два ребра цвета 2_1 и 2_2. При этом соответствие $a_i \mapsto g_{a_i}$ инъективно, поскольку в одну вершину не могут входить рёбра одного цвета. Таким образом, найдётся как минимум $k - 6$ ребер цвета 3. $\square$

Lemma 7. *Пусть тип $\gamma(A)$ имеет вид (a, b, c) и $b = k + l$, где k — количество ребер цвета 2_1, а l — количество ребер цвета 2_2. Тогда граф $\gamma(A)$ содержит не менее $k + a - 6$ рёбер цвета 1_3 и $l + a - 6$ рёбер цвет 1_5. В частности, $c \geqslant 2a + b - 12$.*

Proof. Согласно таблице 2 композиция цветов 3 и 2_1 — это цвет 1_3, а композиция цветов 2_2 и 1_5 — это цвет 3. Таким образом, по формуле включений и исключений, найдутся по крайней мере $k + a - 6$ вершин, в которые одновременно входит ребро цвета 2_1 и выходит ребро цвета 3. А также $l + a - 6$ вершин из которых одновременно исходят ребра цвета 2_2 и 3. В итоге, получаем что общее количество цветов веса 1 в графе $\gamma(A)$ не менее $b + 2a - 12$. □

Lemma 8. *Если (a, b, c) — это тип графа $\gamma(A)$, то $a \leqslant 3$.*

Proof. По следствию если $a = 6$, то $(a, b, c) = (6, 3, 6)$. По лемме 5 граф $\gamma(A)$ содержит 6 ребер цвета 1_1. Однако, по лемме 7 граф $\gamma(A)$ должен содержать как минимум 3 ребра цвета 1_3 или 1_5. Таким образом, этот случай невозможен.

В случаях $(a, b, c) = (5, 6, 4)$, $(5, 5, 5)$, $(4, 7, 4)$ число ребер цветов 1_3 и 1_5 больше либо равно соответственно 4, 3 и 3. При этом по лемме 5 граф $\gamma(A)$ должен содержать не менее 2 ребер цвета 1_1; противоречие.

Случаи $(a, b, c) = (4, 8, 2)$, $(4, 9, 2)$, $(4, 8, 3)$ невозможны в силу леммы 7. □

Lemma 9. *Пусть граф $\gamma(A)$ имеет два ребра цвета 2, которые соединяют вершины $[a_i]$, $[a_j]$ и $[a_j]$, $[a_k]$ в указанном порядке. Тогда между вершинами $[a_i]$ и $[a_k]$ не может быть ребра цвета 2 или 3, проведенном в любом направлении.*

Proof. Пусть между вершинами $[a_i]$, $[a_j]$ и $[a_j]$, $[a_k]$ есть соотношение, которое соответствует цвету 2, то есть $a_i^k = a_j^3$ и $a_j^l = a_k^3$, где $k, l \in \{1, 2\}$. Тогда, если между вершинами $[a_i]$ и $[a_k]$ есть ребро цвета 2 или 3, то имеет место соотношение вида $a_i^x = a_k^y$, где x, $y \in \{1, 2, 3\}$ и $x \neq y$. Отсюда по лемме 3 следует, что $|a_i| \leqslant 26$, но мы считаем, что $|a_i| > 35$. Таким образом, между ребрами цвета 2, не могут быть ребра цвета 2 или 3. □

Напомним, что граф $\Gamma(A)$ должен содержать как минимум 30 ребер. Таким образом, граф $\gamma(A)$ должен содержать не менее 10 ребер. Кроме того, полный граф на 6 вершинах содержит 15 ребер. Поскольку из одной вершины графа $\gamma(A)$ не могут выходить ребра одинакового цвета и не могут входить ребра одного цвета, ребер данного цвета в графе $\gamma(A)$ может быть не более 6. Пусть (a, b, c) — это тип графа $\gamma(A)$. По лемме 8 имеем $a \leqslant 3$. Следовательно,

$$2(b + c) \geqslant 30 - 3a \text{ и } a + b + c \geqslant a + 15 - \frac{3a}{2} = 15 - \frac{a}{2} = 13,5.$$

Таким образом, $a + b + c \geqslant 14$.

Пусть общее количество ребер в графе $\gamma(A)$ равно 14. Решая систему $2b+c \geqslant 30-3a$ и $b+c=14-a$ для подходящих значений a, получаем следующие варианты для типа графа $\gamma(A)$:

$$(2,12,0),\ (3,11,0),\ (3,10,1).$$

Они все невозможны в силу леммы 7.

Пусть количество ребер в графе $\gamma(A)$ равно 15. Пусть (a,b,c) — это тип графа $\gamma(A)$. Поскольку $a \leqslant 3$, из леммы 6 следует, что $b \leqslant 9$. Тогда $c \geqslant 3$ и, следовательно, $(a,b,c)=(3,9,3)$. Разберем случай $(3,9,3)$:

В графе $\gamma(A)$ имеется 9 ребер цвета 2. Пусть S и T — это множества вершин, из которых исходят ребра цветов 2_1 и 2_2 соответственно. Тогда $|S|+|T|=9$ и $|S\cup T|=5$ или 6.

Рассмотрим случай, $|S\cup T|=6$. Тогда граф $\gamma(A)$ содержит (ориентированный) цикл, в котором все ребра имеют цвет 2. По лемме 9 длина этого цикла не меньше 4.

Пусть граф $\gamma(A)$ имеет цикл из ребер цвета 2 длины 6. Тогда, не нарушая общности, можем считать, что из вершины $[a_1]$ выходит ребро цвета 3, причем приходить оно может только в вершину $[a_4]$, в силу леммы 9. Аналогично вершины $[a_2]$ и $[a_3]$ являются либо исходящими, либо входящими для ребер цвета 3. На рис. 2 проиллюстрирована данная ситуация, причем ребра проведенные пунктирной линией обозначают ребра цвета 3.

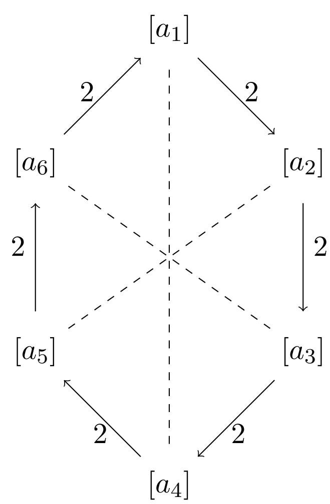


Рис. 2

По лемме 9 не входящие в цикл ребра цвета 2 должны также соединять противоположные пары вершин, что невозможно.

Пусть теперь ребра цвета 2 образуют цикл длины 5. Внутри цикла провести ребро цвета 3 нельзя, поэтому всякое ребро цвета 3 должно быть входящим или исходящим для вершины $[a_6]$.

Отметим, что по лемме 5 все ребра цвета 1 в графе $\gamma(A)$ имеют цвет 1_3 или 1_5. Таким образом, из таблицы 2 следует, что не существует вершины, которая является одновременно начальной и конечной вершиной для ребер цвета 3. Поскольку из одной вершины не могут выходить два ребра одного цвета и не могут входить в нее, получаем что любая вершина графа $\gamma(A)$ инцидентна ровно одному ребру цвета 3. Таким образом, всего ребер цвета 3 в данном случае не больше 1 (рис. 3).

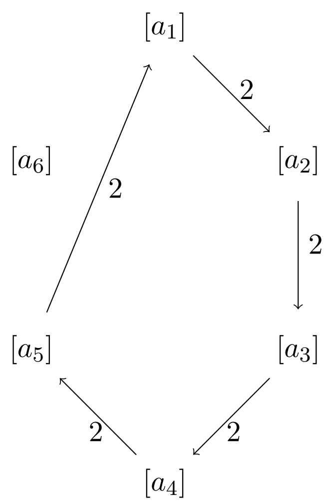


Рис. 3

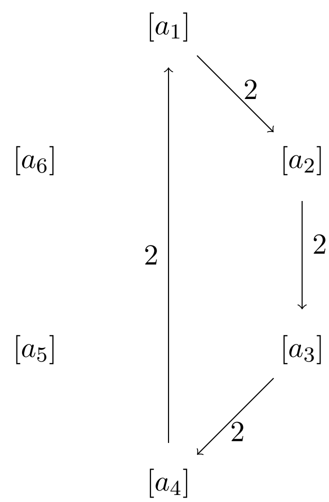


Рис. 4

Пусть теперь ребра цвета 2 образуют цикл длины 4. Аналогично предыдущей ситуации, ребро цвета 3 мы можем провести только из вершин $[a_5]$ и $[a_6]$, но каждой вершине инцидентна только одно ребро цвета 3. Следовательно, максимум ребер цвета 3 в графе $\gamma(A)$ будет равно двум (Рис. 4).

Пусть $|S \cup T| = 5$. Тогда есть вершина, из которой не исходит ребро цвета 2. Поскольку в эту вершину входит не более двух ребер цвета 2, подграф, порожденный оставшимися 5 вершинами, содержит как минимум 7 ребер цвета 2. По лемме 9 этот подграф не содержит треугольников из ребер цвета 2. По теореме Турана (см., [3] или [4, стр. 273]) количество ребер в графе на v вершинах без полного подграфа на n вершинах не превосходит $\frac{(n-2)(v^2-r^2)}{2n-2} + \frac{r(r-1)}{2}$, где r — это остаток от деления v на $n-1$. Таким образом, подставляя $v = 5$ и $n = 3$, получаем, что максимальное количество ребер равно 6; противоречие.

References

[1] V. D. Mazurov and E. I. Khukhro (eds.), The Kourovka Notebook: Unsolved Problems in Group Theory, 20th augmented ed., Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2022 (https://arxiv.org/abs/1401.0300).

[2] Z.-W. Sun, Permutations of $\{1, \ldots, n\}$ and related topics, J. Algebraic Combin. 54 (2021), 893–912.

[3] P. Turán, On an Extremal Problem in Graph Theory, Matematikai és Fisikai Lapok, Vol. 48, 1941, pp. 436-452.

[4] O. Ore, Graph Theory, Moscow: Nauka. Chief Editor of Physical and Mathematical Literature, 1980, 336 pages.

Aleksandr Aleksandrovich Buturlakin,
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: a.buturlakin@g.nsu.ru

Nail' Rinatovich Shakirov
Novosibirsk state university,
st. Pirogova, 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: n.shakirov@g.nsu.ru