

ТОЧНЫЕ ПОРЯДКИ ПОПЕРЕЧНИКОВ ПО
КОЛМОГОРОВУ ДЛЯ КЛАССОВ МНОГОМЕРНЫХ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С АНИЗОТРОПНЫМ
РОСТОМА.Л. СИНАЙ 

ПРЕДСТАВЛЕНО

Abstract: Sharp order estimates for the Kolmogorov widths of classes of multidimensional sequences with anisotropic polynomial growth in weighted ℓ^p spaces with factorized weights are obtained. It is established that in the power case the asymptotics of the widths is determined by the minimal decay exponent of the weight, and the multiplicity of this minimum leads to the appearance of an additional logarithmic factor. In the logarithmic case the order of the widths is given by the minimal logarithmic exponent. Moreover, necessary and sufficient conditions for the precompactness of the classes under study in the considered spaces are proved.

Keywords: Kolmogorov widths, weighted ℓ^p spaces, factorized weights, anisotropic sequence classes, precompactness, logarithmic weights.

1 Введение

Пусть $d \geq 1$ – размерность пространства индексов. Положим

$$\mathbb{N}^d = \{(i_1, \dots, i_d) : i_k \in \mathbb{N}\}.$$

Определим весовое пространство $\ell^p(\omega)$ нормой

$$\|x\|_{p,\omega} = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}^d} |x_i|^p \omega_i^p \right)^{1/p} = \|(x_i \omega_i)_{i \in \mathbb{N}^d}\|_{\ell^p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (1)$$

где весовая последовательность $\omega = (\omega_i)_{i \in \mathbb{N}^d}$ имеет факторизованный вид. Именно, пусть заданы одномерные веса

$$\omega_n^{(k)} = n^{-\alpha_k} \prod_{j=1}^{m_k} (\ln_j n)^{-\beta_{k,j}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, \dots, d, \quad (2)$$

с параметрами $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\beta_{k,j} \in \mathbb{R}$, $m_k \in \mathbb{N}_0$. Здесь $\ln_1 n = \ln(\max\{e, n\})$, а для $j \geq 1$ положим $\ln_{j+1} n = \ln(\max\{e, \ln_j n\})$; при таком определении $\ln_j n \geq 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и рекурсия корректна. Многомерный вес определяется равенством

$$\omega_i = \prod_{k=1}^d \omega_{i_k}^{(k)}. \quad (3)$$

Рассмотрим класс многомерных последовательностей с анизотропным полиномиальным ростом

$$\mathcal{G}_{C,\vec{\theta}} = \left\{ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}^d} : |x_i| \leq C \prod_{k=1}^d i_k^{\theta_k} \quad \forall i \in \mathbb{N}^d \right\}, \quad (4)$$

где $C > 0$ – фиксированная константа, а вектор $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d) \in [0, \infty)^d$ определяет допустимые скорости роста по каждому направлению.

Задача оценки колмогоровских поперечников функциональных классов и конечномерных множеств изучалась в [1, 2, 3]. Оценки поперечников конечномерных множеств получены в [4, 5]; дискретные аналоги этих задач изучались в [6]. Анизотропные эффекты в многомерной теории поперечников исследовались в [7, 8]. В работах [9, 10] изучались пересечения анизотропных шаров в пространствах со смешанной нормой; условия предкомпактности для весовых пространств $\ell^p(\omega)$ с выявлением роли кратности минимального показателя установлены в [11].

В настоящей работе получены точные порядковые оценки колмогоровских поперечников класса $\mathcal{G}_{C,\vec{\theta}}$ в пространствах $\ell^p(\omega)$. В степенном случае (теорема 2) асимптотика определяется наименьшим из показателей $\gamma_k = \alpha_k - \theta_k - 1/p$, причём наличие m направлений с одинаковым минимальным показателем приводит к дополнительному логарифмическому множителю степени $m-1$. В логарифмическом случае (теорема 3) порядок поперечников задаётся минимальным логарифмическим показателем $b = \min_k (\beta_{k,1} - 1/p)$.

2 Предварительные сведения

Для каждого $k = 1, \dots, d$ введём одномерную вспомогательную последовательность

$$\sigma_n^{(k)} = \omega_n^{(k)} n^{\theta_k} = n^{\theta_k - \alpha_k} \prod_{j=1}^{m_k} (\ln_j n)^{-\beta_{k,j}}. \quad (5)$$

Лемма 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^{(k)})^p$ сходится тогда и только тогда, когда либо $\alpha_k > \theta_k + 1/p$, либо найдётся такое $j \in \{1, \dots, m_k\}$, что

$$\alpha_k = \theta_k + \frac{1}{p}, \quad \beta_{k,1} = \dots = \beta_{k,j-1} = \frac{1}{p}, \quad \beta_{k,j} > \frac{1}{p}.$$

Замечание 1. Условие на β означает, что среди показателей $\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \dots$ первым, отличающимся от $1/p$, должен быть показатель, строго больший $1/p$.

Степенной случай. $\alpha_k > \theta_k + 1/p$ и $\beta_{k,j} = 0$ для всех j .

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} (\sigma_j^{(k)})^p \right)^{1/p} \asymp N^{-(\alpha_k - \theta_k - 1/p)} = N^{-\gamma_k}, \quad (6)$$

где $\gamma_k = \alpha_k - \theta_k - 1/p > 0$.

Логарифмический случай. $\alpha_k = \theta_k + 1/p$, $\beta_{k,1} > 1/p$, а все остальные $\beta_{k,j} = 0$. Тогда

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} (\sigma_j^{(k)})^p \right)^{1/p} \asymp (\ln N)^{-(\beta_{k,1} - 1/p)}. \quad (7)$$

Положим $b_k = \beta_{k,1} - 1/p > 0$, так что правая часть имеет вид $(\ln N)^{-b_k}$.

Для элемента $x \in \mathcal{G}_{C, \vec{\theta}}$ определим преобразование

$$y_i = x_i \prod_{k=1}^d i_k^{-\theta_k}, \quad i \in \mathbb{N}^d. \quad (8)$$

Из определения (4) следует, что $|y_i| \leq C$ для всех $i \in \mathbb{N}^d$, т.е.

$$y \in CB_{\ell^\infty(\mathbb{N}^d)},$$

где $B_{\ell^\infty(\mathbb{N}^d)}$ – единичный шар в пространстве ограниченных последовательностей. Вычислим норму элемента x в $\ell^p(\omega)$. Используя (1), (3) и (8), получаем

$$\|x\|_{p, \omega}^p = \sum_{i \in \mathbb{N}^d} |x_i|^p \omega_i^p = \sum_{i \in \mathbb{N}^d} |y_i|^p \prod_{k=1}^d (\omega_{i_k}^{(k)} i_k^{\theta_k})^p.$$

Введём многомерную последовательность $\sigma = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}^d}$, положив

$$\sigma_i = \prod_{k=1}^d \sigma_{i_k}^{(k)}, \quad (9)$$

где $\sigma_{i_k}^{(k)}$ определены в (5). Тогда правая часть последнего равенства совпадает с $\|y\|_{p,\sigma}^p$. Таким образом, установлено равенство

$$\|x\|_{p,\omega} = \|y\|_{p,\sigma}.$$

Описанная конструкция устанавливает изометрическую связь между исходным классом и шаром в пространстве с весом σ .

Лемма 2. *Отображение $\Phi: \mathcal{G}_{C,\vec{\theta}} \rightarrow \ell^p(\sigma)$, заданное формулой*

$$(\Phi x)_i = x_i \prod_{k=1}^d i_k^{-\theta_k},$$

является изометрическим изоморфизмом между $\mathcal{G}_{C,\vec{\theta}} \subset \ell^p(\omega)$ и $K := CB_{\ell^\infty(\mathbb{N}^d)} \subset \ell^p(\sigma)$.

Замечание 2. Формально включение $K \subset \ell^p(\sigma)$ имеет место только при условии $\sum_{i \in \mathbb{N}^d} \sigma_i^p < \infty$, которое в дальнейшем гарантируется предкомпактностью (теорема 1). Все последующие рассуждения, использующие $K \subset \ell^p(\sigma)$, проводятся именно в этом случае.

Предложение 1. *Множество K предкомпактно в $\ell^p(\sigma)$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^d} \sigma_i^p < \infty. \quad (10)$$

Доказательство. Достаточность. Предположим, что ряд (10) сходится. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся конечное множество индексов $I \subset \mathbb{N}^d$ такое, что

$$\sum_{i \notin I} \sigma_i^p < \frac{\varepsilon^p}{C^p}.$$

Рассмотрим оператор проектирования $P_I: \ell^p(\sigma) \rightarrow \ell^p(\sigma)$, определённый как $(P_I y)_i = y_i$ при $i \in I$ и 0 иначе. Образ P_I является конечномерным подпространством. Для любого $y \in K$ имеем $|y_i| \leq C$ при всех i , поэтому

$$\|y - P_I y\|_{p,\sigma}^p = \sum_{i \notin I} |y_i|^p \sigma_i^p \leq C^p \sum_{i \notin I} \sigma_i^p.$$

Учитывая выбор I , получаем $\|y - P_I y\|_{p,\sigma} < \varepsilon$ для всех $y \in K$. Следовательно, $P_I(K)$ является компактным ε -приближением для K , что и означает предкомпактность K .

Необходимость. Докажем от противного. Пусть ряд (10) расходится (так как все члены положительны, это означает $\sum_{i \in \mathbb{N}^d} \sigma_i^p = \infty$). Построим последовательность попарно непересекающихся конечных множеств $J_1, J_2, \dots \subset \mathbb{N}^d$ со следующим свойством:

$$\sum_{i \in J_m} \sigma_i^p \geq 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Такое построение возможно, поскольку удаление любого конечного числа членов не меняет расходимости ряда к $+\infty$. Определим для каждого m элемент $y^{(m)} \in K$, положив

$$y_i^{(m)} = \begin{cases} C, & i \in J_m, \\ 0, & i \notin J_m. \end{cases}$$

Из построения блоков J_m (основанного на расходимости ряда) немедленно следует, что

$$\|y^{(m)}\|_{p,\sigma}^p = C^p \sum_{i \in J_m} \sigma_i^p \geq C^p.$$

Для $m \neq k$ множества J_m и J_k не пересекаются, поэтому

$$\|y^{(m)} - y^{(k)}\|_{p,\sigma}^p = \sum_{i \in J_m} |y_i^{(m)}|^p \sigma_i^p + \sum_{i \in J_k} |y_i^{(k)}|^p \sigma_i^p \geq 2C^p.$$

Следовательно,

$$\|y^{(m)} - y^{(k)}\|_{p,\sigma} \geq 2^{1/p} C > 0.$$

Таким образом, последовательность $\{y^{(m)}\}$ не может содержать фундаментальной подпоследовательности, что противоречит предкомпактности множества K . Предложение доказано. \square

По теореме Тонелли,

$$\sum_{i \in \mathbb{N}^d} \sigma_i^p = \prod_{k=1}^d \left(\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^{(k)})^p \right). \quad (11)$$

Следовательно, сходимость многомерного ряда (10) равносильна сходимости каждого из одномерных рядов. Принимая во внимание лемму 1, получаем следующий критерий.

Теорема 1. *Класс $\mathcal{G}_{C,\vec{\sigma}}$ предкомпактен в $\ell^p(\omega)$ тогда и только тогда, когда для каждого $k = 1, \dots, d$ выполнено одно из условий сходимости, перечисленных в лемме 1.*

Замечание 3. Критерий сходимости не изменяется при изменении любого конечного числа членов весов $\omega_n^{(k)}$. В интересующих нас степенном и логарифмическом случаях элементарная проверка показывает, что $\sigma_n^{(k)}$ монотонно убывают при достаточно больших n . Поэтому в дальнейшем мы без ограничения общности считаем последовательности $\sigma_n^{(k)}$ невозрастающими.

Всюду далее предполагаем, что условие предкомпактности из теоремы 1 выполнено. Тогда из леммы 2 и определения колмогоровского перечника немедленно вытекает равенство

$$d_n(\mathcal{G}_{C,\vec{\sigma}}, \ell^p(\omega)) = C d_n(B_{\ell^\infty(\mathbb{N}^d)}, \ell^p(\sigma)). \quad (12)$$

Таким образом, задача полностью сводится к оценке величины $d_n(K, \ell^p(\sigma))$.

Лемма 3. Пусть $\sigma = (\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}^d}$ – положительная последовательность, для которой $\sum_{i \in \mathbb{N}^d} \sigma_i^p < \infty$. Введём изометрию $T: \ell^p(\sigma) \rightarrow \ell^p$, действующую по правилу $(Ty)_i = \sigma_i y_i$, $i \in \mathbb{N}^d$. Рассмотрим диагональный оператор $D: \ell_\infty(\mathbb{N}^d) \rightarrow \ell^p$, $(Dx)_i = \sigma_i x_i$. Тогда $T(K) = C D(B_{\ell^\infty}) \subset \ell^p$, и

$$d_n(K, \ell^p(\sigma)) = C d_n(D(B_{\ell^\infty}), \ell^p).$$

Пусть $\sigma^* = (\sigma_j^*)_{j=1}^\infty$ – невозрастающая перестановка семейства $\{\sigma_i : i \in \mathbb{N}^d\}$. Согласно классической теореме о поперечниках диагональных операторов (см. [3, 12]),

$$d_n(D(B_{\ell^\infty}), \ell^p) = \left(\sum_{j=n+1}^\infty (\sigma_j^*)^p \right)^{1/p}.$$

Следовательно,

$$d_n(K, \ell^p(\sigma)) = C \left(\sum_{j=n+1}^\infty (\sigma_j^*)^p \right)^{1/p}.$$

3 Оценки в многомерном случае

В силу редукции (12) достаточно исследовать величину $d_n(B_{\ell^\infty(\mathbb{N}^d)}, \ell^p(\sigma))$ для двух различных типов асимптотического поведения веса σ .

Степенной случай. Напомним, что $\rho_k = \alpha_k - \theta_k$, а $\gamma_k = \rho_k - 1/p$; условие предкомпактности гарантирует $\gamma_k > 0$. Пусть для каждого $k = 1, \dots, d$ выполнены условия $\alpha_k > \theta_k + 1/p$ и $\beta_{k,j} = 0$ при всех j . Тогда одномерные вспомогательные последовательности принимают вид

$$\sigma_n^{(k)} = n^{\theta_k - \alpha_k} = n^{-\rho_k}, \quad \rho_k := \alpha_k - \theta_k > \frac{1}{p}. \quad (13)$$

Показатель ρ_k связан с величиной γ_k , определённой в (6), равенством $\rho_k = \gamma_k + 1/p$, откуда $\gamma_k > 0$.

Введём следующие обозначения:

$$\gamma_{\min} = \min_{1 \leq k \leq d} \gamma_k,$$

а через m обозначим число индексов, на которых этот минимум достигается. Положим также

$$\rho_{\min} = \min_{1 \leq k \leq d} \rho_k = \gamma_{\min} + \frac{1}{p}.$$

Перенумеруем координаты таким образом, чтобы

$$\rho_1 = \dots = \rho_m = \rho_{\min} < \rho_{m+1} \leq \dots \leq \rho_d.$$

Таким образом, первые m направлений имеют наименьшую скорость убывания весов, а остальные направления – более быструю.

Многомерная последовательность σ при этом записывается как

$$\sigma_i = \prod_{k=1}^d i_k^{-\rho_k}, \quad i = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d. \quad (14)$$

Лемма 4. Пусть σ_i определена в (14). Тогда при $\lambda \rightarrow 0+$

$$\#\{i \in \mathbb{N}^d : \sigma_i \geq \lambda\} \asymp (\ln \lambda^{-1})^{m-1} \lambda^{-1/\rho_{\min}}. \quad (15)$$

Константы эквивалентности зависят только от d, m и ρ_1, \dots, ρ_d .

Доказательство. Условие $\sigma_i \geq \lambda$ равносильно неравенству

$$\prod_{k=1}^d i_k^{\rho_k} \leq \lambda^{-1}.$$

Положим $T = \lambda^{-1}$; тогда $T \rightarrow +\infty$ при $\lambda \rightarrow 0+$. Зафиксируем значения «быстрых» индексов i_{m+1}, \dots, i_d и обозначим

$$M = \prod_{k=m+1}^d i_k^{\rho_k}.$$

Тогда для первых m координат получаем ограничение

$$\prod_{j=1}^m i_j^{\rho_{\min}} \leq \frac{T}{M} \iff \prod_{j=1}^m i_j \leq \left(\frac{T}{M}\right)^{1/\rho_{\min}}.$$

Хорошо известно (см. [7]), что для любого $U > 1$

$$A_m(U) := \#\{(i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}^m : \prod_{j=1}^m i_j \leq U\} \asymp U(\ln U)^{m-1}, \quad U \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при фиксированных i_{m+1}, \dots, i_d вклад в общее число точек равен

$$A_m((T/M)^{1/\rho_{\min}}) \asymp \left(\frac{T}{M}\right)^{1/\rho_{\min}} (\ln(T/M))^{m-1}.$$

Теперь просуммируем полученное выражение по всем i_{m+1}, \dots, i_d . Заметим, что ряд

$$C_0 := \prod_{k=m+1}^d \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\rho_k/\rho_{\min}}$$

конечен, поскольку $\rho_k > \rho_{\min}$ при $k > m$ и, значит, $\rho_k/\rho_{\min} > 1$.

Разобьём область изменения M на две части:

$$\Omega_1 = \{(i_{m+1}, \dots, i_d) : M \leq T^{1/2}\}, \quad \Omega_2 = \{(i_{m+1}, \dots, i_d) : M > T^{1/2}\}.$$

Вклад области Ω_1 . Если $M \leq T^{1/2}$, то $T/M \geq T^{1/2}$, откуда $\ln(T/M) \geq \frac{1}{2} \ln T$ при $T \geq 1$. Следовательно,

$$\ln(T/M) \asymp \ln T \quad (T \rightarrow \infty)$$

равномерно по $M \in \Omega_1$. Тогда

$$A_m((T/M)^{1/\rho_{\min}}) \asymp T^{1/\rho_{\min}} (\ln T)^{m-1} M^{-1/\rho_{\min}}.$$

Суммируя по Ω_1 и используя определение C_0 , находим

$$\begin{aligned} \sum_{\Omega_1} A_m(\dots) &\asymp T^{1/\rho_{\min}} (\ln T)^{m-1} \sum_{\Omega_1} M^{-1/\rho_{\min}} \\ &= C_0 T^{1/\rho_{\min}} (\ln T)^{m-1} (1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Вклад области Ω_2 . Из асимптотики $A_m(U) \asymp U (\ln U)^{m-1}$ при $U \rightarrow \infty$ следует существование такой константы $C_1 > 0$, что для всех $U \geq 1$ выполнено неравенство

$$A_m(U) \leq C_1 U (\ln(U+1))^{m-1}.$$

При $M > T^{1/2}$ имеем $T/M \leq T^{1/2}$, откуда $\ln(T/M+1) \leq \ln(T^{1/2}+1) \leq \ln T$ при $T \geq 4$. Подставляя это в предыдущее неравенство, получаем

$$A_m((T/M)^{1/\rho_{\min}}) \leq C_1 \left(\frac{T}{M}\right)^{1/\rho_{\min}} (\ln T)^{m-1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{\Omega_2} A_m(\dots) \leq C_1 T^{1/\rho_{\min}} (\ln T)^{m-1} \sum_{M > T^{1/2}} M^{-1/\rho_{\min}}.$$

Оценим сумму по $M > T^{1/2}$. Заметим, что

$$\{M > T^{1/2}\} \subset \bigcup_{k=m+1}^d \{i_k \geq T^{1/(2d\rho_k)}\}.$$

Действительно, если $i_k < T^{1/(2d\rho_k)}$ для всех $k = m+1, \dots, d$, то $M = \prod_{k=m+1}^d i_k^{\rho_k} \leq T^{1/2}$, что противоречит условию $M > T^{1/2}$. На каждом из $d-m$ множеств объединения сумма оценивается как

$$\sum_{i_k \geq T^{1/(2d\rho_k)}} \prod_{j \neq k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\rho_j/\rho_{\min}} \right) \cdot i_k^{-\rho_k/\rho_{\min}} \leq C_2 T^{-\frac{1}{2d\rho_k} \cdot \frac{\rho_k - \rho_{\min}}{\rho_{\min}}} \leq C_2 T^{-\delta},$$

где $\delta = \min_{k > m} \frac{\rho_k - \rho_{\min}}{2d\rho_{\min}\rho_k} > 0$, а константа C_2 зависит лишь от d, m и показателей ρ_k . Следовательно,

$$\sum_{\Omega_2} M^{-1/\rho_{\min}} \leq (d-m) C_2 T^{-\delta} = o(1), \quad T \rightarrow \infty.$$

Поскольку полная сумма по всем i_{m+1}, \dots, i_d равна C_0 , имеем

$$\sum_{\Omega_1} M^{-1/\rho_{\min}} = C_0 - \sum_{\Omega_2} M^{-1/\rho_{\min}} = C_0 - o(1) = C_0(1 + o(1)), \quad T \rightarrow \infty.$$

Возвращаясь к оценке вклада Ω_1 , получаем

$$\sum_{\Omega_1} A_m(\dots) \asymp T^{1/\rho_{\min}} (\ln T)^{m-1} \cdot C_0(1 + o(1)) \asymp T^{1/\rho_{\min}} (\ln T)^{m-1}.$$

Вклад Ω_2 пренебрежим по сравнению с Ω_1 , поэтому общее количество точек удовлетворяет

$$\#\{i \in \mathbb{N}^d : \sigma_i \geq T^{-1}\} \asymp T^{1/\rho_{\min}} (\ln T)^{m-1}, \quad T \rightarrow \infty.$$

Возвращаясь к переменной $\lambda = T^{-1}$, приходим к (15). Лемма доказана. \square

Убывающая перестановка и её свойства. Обозначим через $(\sigma_j^*)_{j=1}^\infty$ невозрастающую перестановку последовательности $\{\sigma_i : i \in \mathbb{N}^d\}$. По определению,

$$\sigma_j^* = \sup\{\lambda > 0 : \varphi(\lambda) \geq j\},$$

где

$$\varphi(\lambda) := \#\{i \in \mathbb{N}^d : \sigma_i \geq \lambda\},$$

Из леммы 4 следует, что

$$\varphi(\lambda) \asymp \lambda^{-1/\rho_{\min}} (\ln \lambda^{-1})^{m-1}, \quad \lambda \rightarrow 0+.$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$ и положим

$$\lambda_j = j^{-\rho_{\min}} (\ln j)^\alpha,$$

где параметр α будет выбран ниже. Подставляя $\lambda = \lambda_j$, получаем

$$\lambda_j^{-1/\rho_{\min}} = j (\ln j)^{-\alpha/\rho_{\min}}, \quad \ln \lambda_j^{-1} = \rho_{\min} \ln j - \alpha \ln \ln j \asymp \ln j.$$

Следовательно,

$$\varphi(\lambda_j) \asymp j (\ln j)^{-\alpha/\rho_{\min}} (\ln j)^{m-1} = j (\ln j)^{m-1-\alpha/\rho_{\min}}.$$

Выбирая $\alpha = (m-1)\rho_{\min}$, получаем $\varphi(\lambda_j) \asymp j$. По определению убывающей перестановки это означает, что

$$\sigma_j^* \asymp \lambda_j = j^{-\rho_{\min}} (\ln j)^{(m-1)\rho_{\min}}, \quad j \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Теорема 2. В степенном случае (т.е. при $\alpha_k > \theta_k + 1/p$ и всех $\beta_{k,j} = 0$) справедлива асимптотическая оценка

$$d_n(\mathcal{G}_{C,\vec{\beta}}, \ell^p(\omega)) \asymp n^{-\gamma_{\min}} (\ln n)^{(m-1)(\gamma_{\min}+1/p)}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\gamma_{\min} = \min_{1 \leq k \leq d} (\alpha_k - \theta_k - 1/p)$, а m – число индексов, на которых этот минимум достигается.

Доказательство. В силу редукции (12) нам достаточно оценить

$$d_n(CB_{\ell^\infty(\mathbb{N}^d)}, \ell^p(\sigma)).$$

Согласно лемме 3,

$$d_n(CB_{\ell^\infty(\mathbb{N}^d)}, \ell^p(\sigma)) = C \left(\sum_{j=n+1}^\infty (\sigma_j^*)^p \right)^{1/p},$$

где σ^* – невозрастающая перестановка последовательности $\{\sigma_i\}$.

Подставляя асимптотику (16) для σ_j^* , получаем

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} (\sigma_j^*)^p \asymp \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-p\rho_{\min}} (\ln j)^{p(m-1)\rho_{\min}}.$$

Так как $p\rho_{\min} = p(\gamma_{\min} + 1/p) = p\gamma_{\min} + 1 > 1$, применение интегрального признака (или леммы 1 в одномерном варианте) даёт

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-p\rho_{\min}} (\ln j)^{p(m-1)\rho_{\min}} \asymp n^{1-p\rho_{\min}} (\ln n)^{p(m-1)\rho_{\min}}.$$

Извлекая корень степени $1/p$, находим

$$d_n(CB_{\ell^\infty}, \ell^p(\sigma)) \asymp C n^{1/p-\rho_{\min}} (\ln n)^{(m-1)\rho_{\min}} = C n^{-\gamma_{\min}} (\ln n)^{(m-1)(\gamma_{\min}+1/p)}.$$

Константа C не влияет на порядок, поэтому окончательно

$$d_n(\mathcal{G}_{C, \vec{\theta}}, \ell^p(\omega)) \asymp n^{-\gamma_{\min}} (\ln n)^{(m-1)(\gamma_{\min}+1/p)}.$$

Теорема доказана. \square

Следствие 1. Если параметры весов изотропны по всем направлениям, т.е. $\alpha_k = \alpha$, $\theta_k = \theta$ для всех k и логарифмические множители отсутствуют, причём $\alpha > \theta + 1/p$, то $\gamma_{\min} = \gamma = \alpha - \theta - 1/p$ и $m = d$. В этом случае

$$d_n(\mathcal{G}_{C, \vec{\theta}}, \ell^p(\omega)) \asymp n^{-\gamma} (\ln n)^{(d-1)(\gamma+1/p)}.$$

Логарифмический случай. Рассмотрим теперь ситуацию, когда основной параметр α_k находится на границе, а главный член асимптотики хвоста определяется логарифмическими множителями. Именно, предположим, что для всех $k = 1, \dots, d$

$$\alpha_k = \theta_k + \frac{1}{p}, \quad \beta_{k,1} > \frac{1}{p},$$

а все остальные $\beta_{k,j} = 0$. Положим

$$b_k = \beta_{k,1} - \frac{1}{p} > 0, \quad b = \min_{1 \leq k \leq d} b_k.$$

В этом случае одномерные вспомогательные последовательности имеют вид

$$\sigma_n^{(k)} = n^{-1/p} (\ln n)^{-\beta_{k,1}}$$

и согласно (7) их хвосты удовлетворяют

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} (\sigma_j^{(k)})^p \right)^{1/p} \asymp (\ln N)^{-b_k}.$$

Теорема 3. В логарифмическом случае

$$d_n(\mathcal{G}_{C, \vec{\theta}}, \ell^p(\omega)) \asymp (\ln n)^{-b}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Верхняя оценка. Выберем натуральные числа n_k , $k = 1, \dots, d$, как $n_k = \lfloor n^{1/d} \rfloor$; тогда $\prod_{k=1}^d n_k \leq n$. Рассмотрим проектор $P_{\vec{n}}$, определяемый усечением по первым n_k координатам в каждом направлении:

$$(P_{\vec{n}}y)_i = \begin{cases} y_i, & \text{если } i_k \leq n_k \text{ для всех } k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Образ проектора имеет размерность $N = \prod_{k=1}^d n_k \leq n$. Поскольку колмогоровский поперечник d_n определяется как инфимум по подпространствам размерности не выше n , подпространство размерности N допустимо, и мы получаем

$$d_n(K, X) \leq \sup_{y \in K} \|y - P_{\vec{n}}y\|_{p,\sigma}.$$

Дополнение к прямоугольнику $R_{\vec{n}} = \{i : 1 \leq i_k \leq n_k, k = 1, \dots, d\}$ разобьём на d непересекающихся областей. А именно, положим

$$\Omega_k = \{i \in \mathbb{N}^d : i_k > n_k, i_j \leq n_j \text{ при } j < k\}, \quad k = 1, \dots, d.$$

Тогда $\mathbb{N}^d \setminus R_{\vec{n}} = \bigsqcup_{k=1}^d \Omega_k$. Для любого $y \in K = CB_{\ell^\infty(\mathbb{N}^d)}$ имеем $|y_i| \leq C$, поэтому, используя факторизацию веса,

$$\|y - P_{\vec{n}}y\|_{p,\sigma}^p = \sum_{i \notin R_{\vec{n}}} |y_i|^p \sigma_i^p \leq C^p \sum_{k=1}^d \sum_{i \in \Omega_k} \sigma_i^p.$$

Оценим сумму по Ω_k для фиксированного k . Подставляя выражение для σ_i и меняя порядок суммирования, получаем

$$\sum_{i \in \Omega_k} \sigma_i^p = \prod_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{i_j=1}^{n_j} (\sigma_{i_j}^{(j)})^p \right) \left(\sum_{i_k=n_k+1}^{\infty} (\sigma_{i_k}^{(k)})^p \right) \prod_{j=k+1}^d \left(\sum_{i_j=1}^{\infty} (\sigma_{i_j}^{(j)})^p \right).$$

Обозначим полные суммы $S_j := \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_n^{(j)})^p$, которые конечны в силу условий на параметры. Частичные суммы не превосходят S_j , поэтому

$$\sum_{i \in \Omega_k} \sigma_i^p \leq \left(\prod_{j \neq k} S_j \right) \left(\sum_{i_k=n_k+1}^{\infty} (\sigma_{i_k}^{(k)})^p \right).$$

Подставляя полученную оценку в неравенство для $\|y - P_{\vec{n}}y\|_{p,\sigma}^p$, имеем

$$\|y - P_{\vec{n}}y\|_{p,\sigma}^p \leq C^p \sum_{k=1}^d \left(\prod_{j \neq k} S_j \right) \left(\sum_{i_k=n_k+1}^{\infty} (\sigma_{i_k}^{(k)})^p \right).$$

Для любого $p \geq 1$ и неотрицательных чисел a_1, \dots, a_d справедливо неравенство $(\sum_{k=1}^d a_k)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^d a_k^{1/p}$ (следствие неравенства $(a+b)^{1/p} \leq a^{1/p} + b^{1/p}$ и индукции). Применим его к

$$a_k = C^p \left(\prod_{j \neq k} S_j \right) \left(\sum_{i_k=n_k+1}^{\infty} (\sigma_{i_k}^{(k)})^p \right),$$

извлекая корень степени p из всего выражения:

$$\|y - P_{\bar{n}}y\|_{p,\sigma} \leq C \sum_{k=1}^d \left[\left(\prod_{j \neq k} S_j \right) \left(\sum_{i_k=n_k+1}^{\infty} (\sigma_{i_k}^{(k)})^p \right) \right]^{1/p}.$$

Поскольку $(\prod_{j \neq k} S_j)^{1/p} = \prod_{j \neq k} S_j^{1/p}$, а $(\sum_{i_k=n_k+1}^{\infty} (\sigma_{i_k}^{(k)})^p)^{1/p}$ оставляем как есть, получаем

$$\|y - P_{\bar{n}}y\|_{p,\sigma} \leq C \sum_{k=1}^d \left(\prod_{j \neq k} S_j^{1/p} \right) \left(\sum_{i_k=n_k+1}^{\infty} (\sigma_{i_k}^{(k)})^p \right)^{1/p}.$$

Теперь применим асимптотику хвостов (7) и учтём, что $n_k \asymp n^{1/d}$. Тогда $(\ln n_k)^{-b_k} \asymp (\ln n)^{-b_k}$. В результате

$$d_n(K, X) \leq \|y - P_{\bar{n}}y\|_{p,\sigma} \leq A \sum_{k=1}^d (\ln n)^{-b_k} \leq \tilde{A} (\ln n)^{-b},$$

поскольку $b = \min_k b_k$ и все слагаемые не превосходят $(\ln n)^{-b}$ с точностью до константы.

Нижняя оценка. Выберем индекс k_0 так, что $b_{k_0} = b$. Одномерная последовательность $\sigma_n^{(k_0)} = n^{-1/p} (\ln n)^{-\beta_{k_0,1}}$ положительна и, начиная с некоторого номера, монотонно убывает. По классической теореме о колмогоровском поперечнике диагонального оператора (см. [3, 12])

$$d_n(B_{\ell^\infty}, \ell^p(\sigma^{(k_0)})) = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} (\sigma_j^{(k_0)})^p \right)^{1/p},$$

и согласно (7) правая часть эквивалентна $(\ln n)^{-b}$.

Вложим одномерную задачу в многомерную. Определим подпространство $L_{k_0} \subset \ell^p(\sigma)$ следующим образом:

$$L_{k_0} = \{y \in \ell^p(\sigma) : y_i = 0 \text{ при } i_j \neq 1 \text{ для некоторого } j \neq k_0\}.$$

Иными словами, носителем элементов L_{k_0} служит «линия», на которой все индексы, кроме k_0 , равны единице. Зададим оператор вложения $U: \ell^p(\sigma^{(k_0)}) \rightarrow L_{k_0}$ равенством

$$(Uz)_i = \begin{cases} z_{i_{k_0}}, & \text{если } i_j = 1 \text{ при } j \neq k_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поскольку $\sigma_1^{(j)} = 1$ для каждого j (следствие определений (2) и (5)), для любого z имеем

$$\|Uz\|_{p,\sigma}^p = \sum_{i_{k_0}=1}^{\infty} |z_{i_{k_0}}|^p (\sigma_{i_{k_0}}^{(k_0)})^p = \|z\|_{p,\sigma^{(k_0)}}^p,$$

так что U – изометрический изоморфизм между $\ell^p(\sigma^{(k_0)})$ и L_{k_0} .

Из определения U видно, что $\|Uz\|_{\ell^\infty} = \|z\|_{\ell^\infty}$, поэтому $U(B_{\ell^\infty}) \subset B_{\ell^\infty}$, а значит, $CU(B_{\ell^\infty}) \subset K$.

Рассмотрим оператор $\Pi_{k_0}: \ell^p(\sigma) \rightarrow L_{k_0}$, действующий по правилу

$$(\Pi_{k_0}y)_i = \begin{cases} y_i, & \text{если } i_j = 1 \text{ для всех } j \neq k_0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что $\|\Pi_{k_0}y\|_{p,\sigma} \leq \|y\|_{p,\sigma}$ (суммирование ведётся по подмножеству индексов), т.е. Π_{k_0} – сжатие. Пусть L_n – произвольное n -мерное подпространство в $\ell^p(\sigma)$ и $\tilde{L}_n = \Pi_{k_0}(L_n) \cap L_{k_0}$. Тогда $\dim \tilde{L}_n \leq n$. Для любого $z \in B_{\ell^\infty}$ и любого $v \in L_n$ имеем

$$\|Uz - v\|_{p,\sigma} \geq \|\Pi_{k_0}(Uz - v)\|_{p,\sigma} = \|Uz - \Pi_{k_0}v\|_{p,\sigma},$$

откуда $\text{dist}_{p,\sigma}(Uz, L_n) \geq \text{dist}_{p,\sigma}(Uz, \tilde{L}_n)$. Следовательно,

$$d_n(U(B_{\ell^\infty}), \ell^p(\sigma)) \geq \inf_{\tilde{L}_n} \sup_{z \in B_{\ell^\infty}} \text{dist}_{p,\sigma}(Uz, \tilde{L}_n) = d_n(U(B_{\ell^\infty}), L_{k_0}),$$

где правый поперечник вычисляется в L_{k_0} с индуцированной нормой. Ввиду изометричности U , $d_n(U(B_{\ell^\infty}), L_{k_0}) = d_n(B_{\ell^\infty}, \ell^p(\sigma^{(k_0)}))$.

Таким образом,

$$d_n(K, \ell^p(\sigma)) \geq C d_n(U(B_{\ell^\infty}), \ell^p(\sigma)) \geq C d_n(B_{\ell^\infty}, \ell^p(\sigma^{(k_0)})) \geq C'(\ln n)^{-b}.$$

Возвращаясь к исходному классу с помощью (12), получаем

$$d_n(\mathcal{G}_{C,\tilde{g}}, \ell^p(\omega)) \gg (\ln n)^{-b}.$$

Объединяя верхнюю и нижнюю оценки, завершаем доказательство теоремы. \square

References

- [1] A. N. Kolmogorov. *Über Die Beste Annäherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktionenklasse*. Ann. of Math., **37**:1 (1936), 107–110.
- [2] V. M. Tikhomirov. *Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations*. Russian Math. Surveys, **15**:3 (1960), 75–111.
- [3] A. Pinkus. *n-Widths in Approximation Theory*. Springer, Berlin, 1985.
- [4] B. S. Kashin. *Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions*. Math. USSR-Izv., **11**:2 (1977), 317–333.
- [5] E. D. Gluskin. *Norms of random matrices and widths of finite-dimensional sets*. Math. USSR-Sb., **48**:1 (1984), 173–182.
- [6] B. S. Kashin, Yu. V. Malykhin, K. S. Ryutin. *Kolmogorov width and approximate rank*. Proc. Steklov Inst. Math., **303** (2018), 140–153.
- [7] V. N. Temlyakov. *Approximation of periodic functions of several variables by trigonometric polynomials, and widths of some classes of functions*. Math. USSR-Izv., **27**:2 (1986), 285–322.
- [8] È. M. Galeev. *Kolmogorov widths in the space \tilde{L}_q of the classes \tilde{W}_p^α and \tilde{H}_p^α of periodic functions of several variables*. Math. USSR-Izv., **27**:2 (1986), 219–237.
- [9] A. A. Vasil'eva. *Estimates for the Kolmogorov widths of an intersection of two balls in a mixed norm*. Sb. Math., **215**:1 (2024), 74–89.

- [10] A. A. Vasil'eva. *Kolmogorov Widths of Weighted Sobolev Classes on an Interval with Conditions on the Zeroth and First Derivatives*. Math. Notes, **107**:3 (2020), 522–524.
- [11] A. A. Vasil'eva. *Entropy numbers of embedding operators of function spaces on sets with tree-like structure*. Izv. Math., **81**:6 (2017), 1095–1142.
- [12] A. Pietsch. *s-Numbers of operators in Banach spaces*. Studia Math., **51**:3 (1974), 201–223.

ARTHUR LVOVICH SINAI
YAROSLAV-THE-WISE NOVGOROD STATE UNIVERSITY,
UL. BOLSHAYA SANKT-PETERBURGSKAYA, 41,
173003, VELIKY NOVGOROD, RUSSIA
Email address: arthur.sinai@mail.ru