S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Vol. 20, No. 2, pp. 144–145 (2023) УДК 517.3-045.73
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 30C15,
32A26

СХОДИМОСТЬ ИНТЕГРАЛОВ МЕЛЛИНА–БАРНСА ДЛЯ СИСТЕМ ДВУХ ТРИНОМИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.П. Горшунова, В.Р. Куликов

Communicated by P.P. Petrov

Abstract: In this paper, we investigate the convergence conditions of the Mellin–Barnes integral, which represents the solution of a system of two trinomial algebraic equations. Mellin–Barnes-type integral representations are powerful tools for analyzing algebraic functions. For a system of equations in the given form, where one monomial with a coefficient of (-1) is highlighted in each equation, we construct the corresponding integral. The main result of the work is a proof that for any non-degenerate system of two trinomial equations, there exists a reduction to the specified form in which the Mellin–Barnes integral has a non-empty domain of convergence.

Keywords: algebraic equations, Mellin–Barnes integral, domain of convergence, reduction the system.

Gorshunova, V.P., Kulikov, V.R., Convergence of Mellin–Barnes integrals fod systems of two trinomial equations.

The work is supported by the Krasnoyarsk Mathematical Center funded by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Agreement 075-02-2025-1790).

Received January, 1, 2023, Published December, 31, 2023.

1 Введение

В работе Х.Р. Меллина 1921 года приводится решение приведенного алгебраичекого уравнения в виде гипергеометрического интеграла [8, 7], который впоследствии получит название интеграла Меллина–Барнса. Позже (2007, [1]) этот подход и результаты были расширены на случай систем алгебраических уравнений. В случае одного алгебраического уравнения полученный интеграл имеет непустую область сходимости, когда в уравнении в приведенном виде заморожен коэффициент при младшей степени со значением (-1).

В статье Т.В. Зыковой (2016, [4]) были исследованы множества сходимости интеграла Меллина–Барнса, представляющего решение системы полиномиальных уравнений специального вида. Автором было получено интегральное представление типа Меллина–Барнса для мономиальной функции вектор-решения. В этой работе доказано, что интеграл сходится внутри секториальной области, определяемой системой неравенств для аргументов переменных.

Интегралы Меллина–Барнса находят применение в задачах теоретической физики, в частности, квантовой электродинамике. В работе В.И. Лашкевича и О.П. Соловцовой [6] используется техника интегралов Меллина–Барнса для получения точных аналитических выражений для вкладов от сложных диаграмм Фейнмана, таких как диаграммы поляризации вакуума с несколькими лептонными петлями. В статье представлены точные аналитические формулы (уравнения 2 и 3) для функции, зависящей от квадрата отношения масс лептона в петле к массе внешнего лептона, которая как раз и является этим вкладом. Этот метод позволяет представить соответсвующий вклад в виде контурного интеграла в комплексной плоскости, подынтегральное выражение которого содержит произведение гамма-функций.

2 Приведенная система

Рассмртрим систему алгебраических уравнений, следуя [10]

$$\sum_{\lambda \in A^{(i)}} a_\lambda^{(i)} y^\lambda = 0, \qquad i = 1, ..., n, \tag{1}$$

с неизвестными $y = (y_1, \cdots, y_n)$ и переменными коэффициентами $a_\lambda^{(i)}$, где $A^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$ — фиксированные конечные подмножества целочисленной решетки, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $y^\lambda = y_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{\lambda_n}$.

Назовем систему *невырожденной*, если ее якобиан не обращается тождественно в нуль на ее нулевом множестве. Это условие равносильно тому, что найдется такой набор пар $\lambda^{(i)}, \mu^{(i)} \in A^{(i)}, i = 1, \cdots, n$, что определитель $det(\lambda_j^{(i)} - \mu_j^{(i)}) \neq 0$. (см. [10, с. 218])

Для невырожденной системы существует процесс ее приведения к виду

$$y^{\omega^{(i)}} + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(i)}} x_\lambda^{(i)} y^\lambda - 1 = 0, \qquad i = 1, ..., n, \tag{2}$$

где матрица $\omega = (\omega^{(1)}, ..., \omega^{(n)})$, составленная из столбцов выделенных показателей, невырожденная, а $\Lambda^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n$. [10]

Полученную систему уравнений (2) назовем *приведенной*.

Основным инструментом приведения системы (1) к виду (2) является свойство полиоднородности функции решения $y(..., t^{(i)} l^\lambda a_\lambda{}^{(i)}, ...) = (l_1{}^{-1} y_1(..., a_\lambda^{(i)}, ...), ..., l_n{}^{-1} y_n(..., a_\lambda^{(i)}, ...))$, где $t = (t^{(1)}, ..., t^{(n)})$, $l = (l_1, ..., l_n) \in \Big(\mathbb{C}\setminus\{0\}\Big)^n$.

Введем следующие обозначения:

- N_i — мощность множества индексов $\Lambda^{(i)}$
- Λ — дизъюнктное объединение $\Lambda^{(i)}$: $\Lambda = \bigsqcup_{i=1}^{n} \Lambda^{(i)}$. Зафиксируем порядок элементов множества Λ (и множеств $\Lambda^{(j)}$) и будем далее использовать элементы этого множества для индексации;
- $N = N_1 + \cdots + N_n$ — мощность Λ.

Множество $\Lambda^{(i)}$ можно записывать в виде $n \times N_i$ матрицы, столбцы которой — векторы $\lambda \in \Lambda^{(i)}$.

Рассмотрим $n\times N$ матрицу $\chi = (\chi_\lambda^{(i)})$, i-я строка которой представляет собой характеристическую функцию множества $\Lambda^{(i)}$, т.е.

$$\chi_\lambda^{(i)} = \begin{cases} 1, \text{если } \lambda \in \Lambda^{(i)}, \\ 0, \text{если } \lambda \notin \Lambda^{(i)}, \end{cases}$$

где $i = 1, \cdots, n$ и $\lambda \in \Lambda$.

Обозначим $u = (u_\lambda)^T$ — вектор столбец переменных, соответствующих переменным коэффициентам уравнения $x = (x_\lambda^{(i)})$.

Пусть $z = (z_1, \cdots, z_m)$ — вектор произвольной длины. Обозначим $\Gamma(z) = \Gamma(z_1) \cdot \ldots \cdot \Gamma(z_m)$ — произведение гамма-функций его компонент.

Тогда, опираясь на работы [5, 1, 2, 3] и используя принятые обозначения, интеграл Меллина–Барнса, соответствующий мономиальной функции решения системы (2), может быть записан в виде

$$y^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^n} \frac{\Gamma(u)\Gamma(\omega^{-1}(\mu - \Lambda u))}{\Gamma(\omega^{-1}(\mu - \Lambda u) + \chi u + I)} Q(u) x^{-u} du, \tag{3}$$

где $Q(u)$ — полином, который удобно записать в виде определителя

$$Q(u) = \Big\|\omega^{-1}(\delta_i^j\,(\mu_j - \langle\varphi_j, u\rangle) + \langle\varphi_j^{(i)}, u^{(i)}\rangle)\Big\|_{i,j=1}^n,$$

где φ_j — j-я строка матрицы Λ, а $\varphi_j^{(i)}$ — j-я строка матрицы $\Lambda^{(i)}$.

3 Критерий сходимости интеграла

В работе [5] был сформулирован критерий сходимости интеграла Меллина–Барнса для системы вида (2) при условии, что матрица ω — диагональная с положительными диагональными элементами.

Теорема 1. [5] *Интеграл* (3)*, соответствующий решению системы алгебраических уравнений* (2)*, имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда в каждой матрице вида*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

где каждый столбец $\lambda^{(j)}$ пробегает соответствующее множество $\Lambda^{(j)}$, все главные миноры положительны.

В случае недиагональной матрицы ω условие сходимости интеграла может быть переформулировано. Рассмотрим *расширенные* матрицы $\left(\Lambda^{(j)}\middle|\omega^{(j)}\right)$, которые получаются добавлением к матрице $\Lambda^{(j)}$ столбца $\omega^{(j)}$.

Теорема 2. *Интеграл* (3)*, соответствующий системе алгебраических уравнений* (2)*, имеет непустую область сходимости тогда и только тогда, когда в множестве матриц*

$$\{(\theta^{(1)}, \cdots, \theta^{(n)}), \theta^{(j)} \in \Lambda^{(j)} \cup \{\omega^{(j)}\}, j \in \{1, \cdots, n\}\} \tag{4}$$

определители всех матриц имеют один и тот же знак.

Доказательство. Заметим, что из критерия в Теореме 1 следует, что для сходимости интеграла (3) должно выполнятся условие положительности главных миноров во всех матрицах $\eta = \left(\eta^1, \ldots, \eta^n\right)$, где η^j — произвольный столбец матрицы $\omega^{-1}\Lambda^{(j)}$. Покажем, что это условие равносильно тому, что определители всех матриц вида (4) будут иметь один и тот же знак. Зафиксируем произвольный набор $\eta = \left(\eta^1, \ldots, \eta^n\right)$, пусть здесь $\eta^j = \omega^{-1}\lambda^j$, где λ^j — некоторый столбец $\Lambda^{(j)}$, обозначим $\lambda = \left(\lambda^1, \ldots, \lambda^n\right)$.

Рассмотрим произвольный главный минор порядка p матрицы η и применим к нему следствие формулы Бине-Коши [9, с. 46]:

$$\eta\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_p \\ i_1 \ldots i_p \end{pmatrix} = \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_p \le n} \left(\omega^{-1}\right)\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_p \\ k_1 \ldots k_p \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} k_1 \ldots k_p \\ i_1 \ldots i_p \end{pmatrix}.$$

Для ω^{-1} применим формулу для вычисления обратной матрицы через присоединенную матрицу:

$$\eta\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_p \\ i_1 \ldots i_p \end{pmatrix} = \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_p \le n} \frac{1}{|\omega|^p} \Omega \begin{pmatrix} k_1 \ldots k_p \\ i_1 \ldots i_p \end{pmatrix} \lambda \begin{pmatrix} k_1 \ldots k_p \\ i_1 \ldots i_p \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Для миноров приведенной матрицы $\Omega\binom{k_1 \dots k_p}{i_1 \dots i_p}$ применим формулу Якоби [9, с. 50]:

$$\Omega\binom{k_1 \dots k_p}{i_1 \dots i_p} = (-1)^\sigma |\omega|^{p-1}\, \omega\binom{\{1,\dots,n\}\setminus\{k_1 \dots k_p\}}{\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1 \dots i_p\}},$$

где σ — соответствующая перестановка индексов.

Подставим полученное выражение в формулу (5) и, применяя формулу разложения определителя по блок-строке, получим

$$\eta\binom{i_1 \dots i_p}{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{|\omega|} \det\left(\theta^1 \dots \theta^n\right),$$

где

$$\theta^j = \begin{cases} \lambda^j & j \in \{i_1, \dots, i_p\}, \\ \omega^j & j \notin \{i_1, \dots, i_p\}. \end{cases}$$

Таким образом миноры $\eta\binom{i_1 \dots i_p}{i_1 \dots i_p}$ будут положительны тогда и только тогда, когда все определители $\det\left(\theta^1 \dots \theta^n\right)$ будут одного знака с $|\omega|$. В силу произвольного выбора матрицы η и ее минора, определители всех матриц вида (4) будут одного знака. $\square$

Замечание 1. *В случае диагональной матрицы ω с положительными диагональными элементами Теорема 1 является частным случаем Теоремы 2.*

4 Система триномиальных уравнений

Критерий сходимости интеграла Меллина–Барнса, сформулированный в Теореме 2, зависит только от выбора одного из двух коэффициентов для "замораживания", поэтому для нашей задачи, касающейся системы из двух триномиальных уравнений

$$\begin{cases} a_1 y_1^{\omega_1^{(1)}} y_2^{\omega_2^{(1)}} + a_2 y_1^{\lambda_1^{(1)}} y_2^{\lambda_2^{(1)}} + a_3 y_1^{\eta_1^{(1)}} y_2^{\eta_2^{(1)}} = 0, \\ a_4 y_1^{\omega_1^{(2)}} y_2^{\omega_2^{(2)}} + a_5 y_1^{\lambda_1^{(2)}} y_2^{\lambda_2^{(2)}} + a_6 y_1^{\eta_1^{(2)}} y_2^{\eta_2^{(2)}} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

нужно рассмотреть только 9 приведений.

В контексте работы рассматриваются системы общего положения, у которых у многогранников Ньютона ни одна из сторон одного многогранника не параллельна ни одной стороне другого.

Теорема 3. *Для системы двух триномиальных алгебраических уравнений, многогранники которых находятся в общем положении, существует приведенный вид, для которого интеграл Меллина–Барнса* (3) *будет иметь непустую область сходимости.*

Доказательство. Рассмотрим общий случай системы двух триномиальных уравнений

$$\begin{cases} a_{11} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} + a_{12} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} - 1 = 0, \\ a_{21} y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2} + a_{22} y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2} - 1 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Без ограничения общности, один из мономов в каждом уравнении можно брать в степени 0 и с коэффициентом (-1).

Для каждого уравнения можно изменить способ приведения системы двумя различными способами ("заморозить" один из двух других мономов). Для этого мы можем разделить уравнение на один из мономов с ненулевым показателем, а затем выполнить мономиальную замену (с рациональными показателями) для коэффициентов. Матрицы ненулевых показателей для различных вариантов приведения первого уравнения будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \beta_1 - \alpha_1; & -\alpha_1 \\ \beta_2 - \alpha_2; & -\alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 - \beta_1; & -\beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2; & -\beta_2 \end{pmatrix},$$

а для второго:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \delta_1 - \gamma_1; & -\gamma_1 \\ \delta_2 - \gamma_2; & -\gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \gamma_1 - \delta_1; & -\delta_1 \\ \gamma_2 - \delta_2; & -\delta_2 \end{pmatrix}.$$

Все их возможные комбинации дадут 9 различных способов приведения системы.

Кратко эти приведения будем записывать в виде:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{array} \right) = \left(\alpha; \beta \middle| \gamma; \delta\right),$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \beta_1 - \alpha_1; & -\alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_2 - \alpha_2; & -\alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{array} \right) = \left(\beta - \alpha; -\alpha \middle| \gamma; \delta\right)$$

и т.д.

Введем обозначения для их определителей, участвующих в условиях Теоремы 2:

$$det(\alpha, \gamma) := \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix};$$

$$det(\alpha - \beta, \gamma - \delta) := \begin{vmatrix} \alpha_1 - \beta_1; & \gamma_1 - \delta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2; & \gamma_2 - \delta_2 \end{vmatrix}$$

и т.д.

В силу полиоднородности определителя:

$$det(\alpha - \beta, \gamma - \delta) = det(\alpha, \gamma) - det(\alpha, \delta) - det(\beta, \gamma) + det(\beta, \delta).$$

Заметим, что условие общего положения многогранников Ньютона ситемы (7) гаранитирует, что ни один из таких определителей не будет равен нулю.

Если все определители одного знака, то в этом случае критерий сходимости выполняется.

Рассмотрим случай, когда один из четырех определителей, участвующих в критерии, одного знака, а оставшиеся три другого. Без ограничения общности:

$$\begin{gathered} det(\alpha,\gamma) > 0, \\ det(\beta,\gamma) > 0, \\ det(\alpha,\delta) > 0, \\ det(\beta,\delta) < 0. \end{gathered}$$

Рассмотрим первый случай приведения, который получается делением первого уравнения на $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}$. В этом случае показатели приведенной системы примут вид:

$$\Big(\beta-\alpha; -\alpha \Big| \gamma; \delta\Big).$$

Три определителя будут отрицательными:

$$\begin{gathered} det(\beta-\alpha,\delta) = det(\beta,\delta) - det(\alpha,\delta) < 0, \\ -det(\alpha,\gamma) < 0, \\ -det(\alpha,\delta) < 0, \end{gathered}$$

а четвертый, интересующий нас, определитель может быть произвольного знака. В данном случае, если

$$det(\beta-\alpha,\gamma) = det(\beta,\gamma) - det(\alpha,\gamma) < 0,$$

то критерий сходимости интеграла выполняется.

Когда он положительный, то проверяем следующий вариант приведения, поделив второе уравнение системы (7) на $y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2}$:

$$\Big(\alpha; \beta \Big| \delta-\gamma; -\gamma\Big).$$

Получаем следующие знаки определителей:

$$\begin{gathered} det(\beta,\delta-\gamma) = det(\beta,\delta) - det(\beta,\gamma) < 0, \\ -det(\alpha,\gamma) < 0, \\ -det(\beta,\gamma) < 0. \end{gathered}$$

Аналогично прошлому варианту приведения, если

$$det(\alpha,\delta-\gamma) = det(\alpha,\delta) - det(\alpha,\gamma) < 0,$$

то система приведена к нужному виду, при котором критерий сходимости будет выполняться.

Когда он положительный, рассматриваем последний вид приведения, поделив первое уравнение системы (7) на $y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2}$, а второе уравнение на $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2}$:

$$\Big(\beta-\alpha; -\alpha \Big| \gamma-\delta; -\delta\Big).$$

Определители, получившиеся при таком приведении будут одного знака:

$$\begin{gathered} det(\beta-\alpha,\gamma-\delta) = det(\beta,\gamma) - det(\alpha,\gamma) - det(\beta,\delta) + det(\alpha,\delta) > 0, \\ -det(\beta,\delta) + det(\alpha,\delta) > 0, \\ -det(\alpha,\gamma) + det(\alpha,\delta) > 0, \\ det(\alpha,\delta) > 0. \end{gathered}$$

Существуют два принципиально различных случая, когда два определителя одного знака, а два других другого:

(1) Первый случай

$$det(\alpha,\gamma) > 0 \quad det(\beta,\gamma) > 0$$

$$det(\alpha,\delta) < 0 \quad det(\beta,\delta) < 0.$$

Определители, образованные одним показателем одного уравнения имеют один и тот же знак, а образованные другим показателем этого уравнения - другой.

(2) Второй случай:

$$det(\alpha,\gamma) < 0 \quad det(\beta,\gamma) > 0$$

$$det(\alpha,\delta) > 0 \quad det(\beta,\delta) < 0.$$

Каждый показатель первого уравнения образует с двумя показателями второго уравнения определители разных знаков.

Остальные случаи можно свести к указаным перестановкой слагаемых в уравнении или перестановкой самих уравнений.

Рассмотрим первый случай:

$$\begin{gathered} det(\alpha,\gamma) > 0, \\ det(\beta,\gamma) > 0, \\ det(\alpha,\delta) < 0, \\ det(\beta,\delta) < 0. \end{gathered}$$

Приведение для такого случая, которое будет удовлетворять нашим условиям, получается делением второго уравнения на $y_1^{\delta_1} y_2^{\delta_2}$, тогда получим

$$\Big(\alpha;\beta\Big|\gamma-\delta;-\delta\Big).$$

Определители для такого приведения системы будут одного и того же знака:

$$\begin{gathered} det(\alpha,\gamma-\delta) = det(\alpha,\gamma) - det(\alpha,\delta) > 0, \\ det(\beta,\gamma-\delta) = det(\beta,\gamma) - det(\beta,\delta) > 0, \\ -det(\alpha,\delta) > 0, \\ -det(\beta,\delta) > 0. \end{gathered}$$

Критерий сходимости выполняется.

Теперь рассмитрим второй случай:

$$\begin{gathered} det(\alpha,\gamma) < 0, \\ det(\beta,\gamma) > 0, \\ det(\alpha,\delta) > 0, \\ det(\beta,\delta) < 0. \end{gathered}$$

Достаточно поделить первое уравнение на $y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2}$, а второе уравнение на $y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2}$, получим

$$\Big(\alpha-\beta;-\beta\Big|\delta-\gamma;-\gamma\Big),$$

тогда

$$\begin{gathered} det(\alpha-\beta,\delta-\gamma)=det(\alpha,\delta)-det(\beta,\delta)-det(\alpha,\gamma)+det(\beta,\gamma)>0,\\ det(\alpha-\beta,-\gamma)=-det(\alpha,\gamma)+det(\beta,\gamma)>0,\\ det(-\beta,\delta-\gamma)=-det(\beta,\delta)+det(\beta,\gamma)>0,\\ det(\beta,\gamma)>0. \end{gathered}$$

Теорема 3 доказана. □

5 Заключение

Применение теоремы В. Р. Куликова позволило выявить критерии сходимости интеграла Меллина–Барнса и доказать сущестование условий, при которых область сходимости этого интеграла непуста. Для системы двух триномиальных уравнений доказано существование приведенного вида, при котором интеграл Меллина–Барнса сходится. Это подтверждает выдвинутую гипотезу о непустой области сходимости для систем общего положения.

Работа была сосредоточена на системах двух триномиальных уравнений, а не только для систем, для которых критерий сходимости интеграла Меллина–Барнса выполняется непосредственно.

Открытой остается задача о существовании приведения системы с большим количеством мономов в уравнениях и/или большим числом уравнений.

Результат, полученный в работе дает надежду на возможность применения интегралов Меллина–Барнса к исследованию широкого класса систем алгебраических уравнений.

References

[1] Antipova I. A. Inversion of many-dimensional Mellin transforms and solutions of algebraic equations. *Sbornik: Mathematics*, - 2007, - vol. 47, - P. 3-20.

[2] Antipova I. A., Kleshkova E. A., Kulikov V. R. Analytic continuation for solutions to the system of trinomial algebraic equations *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, - 2020, - vol. 13, - №. 1. - P. 114-130.

[3] Antipova I. A., Tsikh A. K. The discriminant locus of a system of n Laurent polynomials in n variables. *Izvestiya RAN: Ser. Mat*, - 2012, - T. 76, - №. 5. - P. 29-56.

[4] Zykova T. V. About integrated representation like Mellina–Barnsa of the solution of system of the polynomial equations of the special kind *Vestnik SibGAU. Serija Matematika, mehanika, informatika*, - 2015, - T. 16, - №. 2 - P. 310-316.

[5] Kulikov V. R. A criterion for the convergence of the Mellin–Barnes integral for solutions to simultaneous algebraic equations. *Siberian Mathematical Journal*, - 2017, - T. 58, - №. 3. - P. 632 - 640.

[6] Lashkevich V. I., Solovtsova O. P. Application of the Mellin–Barnes Integrals Technique in Calculations of Contributions to Anomalous Magnetic Moments of Leptons. *Sovremennye problemy mashinovedenija : sbornik nauchnyh trudov: v 2 ch. Ch. 2. Ministerstvo obrazovanija Respubliki Belarus', Gomel'skij gosudarstvennyj tehnicheskij universitet imeni P. O. Suhogo, PAO «OAK» OKB Suhogo, Taizskij universitet (Jemenskaja Respublika) ; pod obshh. red. A. A. Bojko. – Gomel' : GGTU im. P. O. Suhogo*, - 2023, - P. 239 - 242.
[7] Lawton W.M. An explanation of Mellin's 1921 paper. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, - 2023, - vol. 46, - pp. 98-109.
[8] Mellin H. J. Resolution de l'equation algebrique generale a l'aide de la function gamma. *C.R.Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, 1921, vol. 172, P. 658-661.
[9] Prasolov V. V. Zadachi i teoremy linejnoj algebry. *Moskva : MTsNMO.*, 2015, - P. 576.
[10] Sadykov T.M., Tsikh A.K. Hypergeometric and Algebraic Functions in Several Variables. (*Moskva : Nauka.), 2014, - P. 395.*

Victoria Petrovna Gorshunova
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: v.p.gorshunova@mail.ru

Vladimir Ruslanovich Kulikov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: v.r.kulikov@mail.ru