S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Стр. 1–12 (2026) УДК 517.9
https://doi.org/ MSC 41A46, 47B06

ТОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ И АСИМПТОТИКА ПОПЕРЕЧНИКОВ ПО КОЛМОГОРОВУ ДЛЯ ВОЗМУЩЁННЫХ ОПЕРАТОРОВ ГРИНА

А.Л. СИНАЙ

ПРЕДСТАВЛЕНО

Abstract: We study the Kolmogorov widths of the image of the unit ball of L^2 under a family of integral operators arising from a rank-one perturbation of the Green operator. The problem reduces to a Sturm–Liouville spectral problem with a Robin boundary condition. Exact values of the widths are expressed in terms of the roots of the characteristic equation, along with their asymptotic expansions and rigorous two-sided estimates. We show that the boundary condition continuously interpolates between the Robin condition (as $\alpha \to -1^+$) and the Dirichlet condition (as $\alpha \to \infty$).

Keywords: Kolmogorov widths, integral operator, rank-one perturbation, Sturm–Liouville problem, asymptotic expansion, s-numbers.

1 Введение

Пусть X — банахово пространство, и пусть $W \subset X$ — центрально-симметричное множество. *Поперечником по Колмогорову* порядка $n \in \mathbb{N}_0$ (где $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$) называется величина

$$d_n(W, X) = \inf_{L_n \subset X} \sup_{x \in W} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|_X, \tag{1}$$

Sinai, A.L., Exact formulas and asymptotics of Kolmogorov widths for perturbed Green operators.

в которой инфимум берётся по всем линейным подпространствам L_n пространства X, размерность которых не превышает n. Подробное изложение теории поперечников и её приложений можно найти в [1, 2, 3, 4, 5]; исторические аспекты, связанные с аппроксимацией тригонометрическими полиномами, освещены в [6].

Если T — компактный самосопряжённый положительный оператор в гильбертовом пространстве H, то хорошо известно, что поперечник образа единичного шара совпадает с $(n+1)$-м собственным значением этого оператора. Именно, пусть $\{\lambda_k(T)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных собственных чисел оператора T, занумерованных в порядке невозрастания с учётом кратности. Тогда

$$d_n\big(T(B_H), H\big) \;=\; \lambda_{n+1}(T). \tag{2}$$

Строгое обоснование этого факта приведено в [3, 7]. Более общая теория s-чисел, в рамках которой для указанного класса операторов устанавливается совпадение колмогоровских, аппроксимационных и гельфандовых чисел, развита в [8]. Систематические оценки сингулярных чисел интегральных операторов в терминах гладкости ядер и свойств мер изложены в обзоре [9].

В настоящей работе изучается семейство интегральных операторов $T_\alpha : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$, зависящих от вещественного параметра $\alpha \in (-1,\infty)$ и задаваемых симметричным ядром

$$K_\alpha(x,t) \;=\; \min(x,t) \;-\; \frac{\alpha}{1+\alpha}\, x\, t, \qquad x,t \in [0,1]. \tag{3}$$

Второе слагаемое в (3) представляет собой возмущение ранга один классического оператора с ядром $\min(x,t)$, который является обратным к дифференциальному оператору $-d^2/dx^2$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$ (см., например, [10, 11]). Ядро K_α непрерывно на замкнутом квадрате $[0,1]\times[0,1]$ и симметрично; поэтому T_α — компактный самосопряжённый оператор в $L^2[0,1]$. Как будет показано в разделе 2, при $\alpha > -1$ он дополнительно является положительно определённым, и, следовательно, его поперечники описываются формулой (2) через собственные значения $\lambda_k(T_\alpha)$.

Связь между спектрами дифференциальных операторов и точными значениями поперечников классов Соболева установлена в [12], где доказано, что поперечники совпадают с собственными числами соответствующей нелинейной краевой задачи. В нашем случае оператор T_α оказывается обратным к дифференциальному оператору $-d^2/dx^2$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) + \alpha y(1) = 0$ (лемма 1 ниже); тем самым исследование поперечников сводится к изучению корней явного характеристического уравнения.

Случай $\alpha = 0$ хорошо известен. Оператор T_0 имеет собственные значения $\lambda_k(0) = \bigl((k-\frac{1}{2})\pi\bigr)^{-2}$, откуда

$$d_n\bigl(T_0(B_{L^2}), L^2\bigr) \;=\; \frac{1}{\pi^2\,(n+\frac{1}{2})^2}\,. \tag{4}$$

Этот результат следует из связи с классической задачей Штурма–Лиувилля и служит иллюстрацией общего метода.

Близкая по духу задача об оценке колмогоровских поперечников для другого семейства интегральных операторов с ядром $(1-xy)^{\alpha-1}$ на пространствах $L^p[0,1]$ недавно рассматривалась в [13]. Там были получены верхние оценки, убывающие как $\exp(-\kappa\sqrt{n})$. В противоположность этому, оператор T_α в $L^2[0,1]$ обладает степенной асимптотикой поперечников, что открывает возможность найти для них не только точные, но и явные замкнутые выражения.

Целью настоящей работы является полное описание колмогоровских поперечников $d_n\bigl(T_\alpha(B_{L^2}), L^2\bigr)$ для всех $\alpha \in (-1,\infty)$. Будет доказано, что

$$d_n(\alpha) \;:=\; d_n\bigl(T_\alpha(B_{L^2}), L^2\bigr) \;=\; \frac{1}{\omega_{n+1}^2(\alpha)}, \tag{5}$$

где $\omega_k(\alpha)$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни трансцендентного уравнения $\omega\cot\omega = -\alpha$. Кроме того, будет получено полное асимптотическое разложение величины $d_n(\alpha)$ при $n\to\infty$ с явными коэффициентами, а также установлены двусторонние оценки, равномерные по параметру α.

2 Спектральный анализ и точная формула

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$L_\alpha y = -y'', \qquad D(L_\alpha) = \{\, y \in H^2(0,1) \mid y(0)=0,\ y'(1)+\alpha y(1) = 0\,\}, \tag{6}$$

где $\alpha \in (-1,\infty)$. Для обоснования последующего использования спектрального разложения установим положительную определённость оператора L_α. С этой целью вычислим соответствующую квадратичную форму. Для произвольной функции $y \in D(L_\alpha)$ имеем:

$$\begin{aligned}(L_\alpha y, y)_{L^2[0,1]} &= \int_0^1 \bigl(-y''(x)\bigr)\,\overline{y(x)}\,dx \\ &= \int_0^1 |y'(x)|^2\,dx - \bigl[y'(x)\,\overline{y(x)}\bigr]_0^1.\end{aligned} \tag{7}$$

С учётом граничных условий $y(0)=0$ и $y'(1) = -\alpha y(1)$ находим

$$\bigl[y'(x)\,\overline{y(x)}\bigr]_0^1 = y'(1)\overline{y(1)} - y'(0)\overline{y(0)} = -\alpha|y(1)|^2.$$

Подставляя это выражение в (7), получаем

$$(L_\alpha y, y)_{L^2} = \int_0^1 |y'(x)|^2\,dx + \alpha|y(1)|^2. \tag{8}$$

Если $\alpha \geq 0$, то оба слагаемых в (8) неотрицательны, откуда $(L_\alpha y, y) \geq 0$. Для $\alpha \in (-1, 0)$ воспользуемся неравенством

$$|y(1)|^2 \leq \int_0^1 |y'(x)|^2\, dx,$$

которое вытекает из представления $y(1) = \int_0^1 y'(x)\, dx$ и неравенства Коши–Буняковского. Тогда из (8) получаем

$$(L_\alpha y, y)_{L^2} \geq (1+\alpha) \int_0^1 |y'(x)|^2\, dx \; > \; 0 \qquad \text{для всех ненулевых } y \in D(L_\alpha).$$

Таким образом, при $\alpha > -1$ оператор L_α положительно определён.

Замечание 1. Значение $\alpha = -1$ является граничным. При $\alpha = -1$ квадратичная форма принимает вид $(L_{-1}y, y) = \int_0^1 |y'|^2\, dx - |y(1)|^2$. Функция $y(x) = x$ удовлетворяет условиям $y(0) = 0$, $y'(1) + (-1)y(1) = 0$, и для неё $(L_{-1}y, y) = 0$, хотя $y \not\equiv 0$. Следовательно, оператор L_{-1} не является строго положительно определённым, и соответствующий обратный компактный оператор T_{-1} не существует. Именно поэтому значение $\alpha = -1$ исключено из области определения семейства.

Перейдём к построению функции Грина. Хорошо известно (см. [10, 14]), что резольвента положительно определённого оператора L_α представляет собой интегральный оператор с ядром $K_\alpha(x,t) = \min(x,t) - \frac{\alpha}{1+\alpha} xt$. Точная формулировка этого факта даётся следующей леммой.

Лемма 1. *Для любого* $\alpha \in (-1, \infty)$ *оператор* T_α*, заданный формулой* (3)*, является обратным к* L_α*:*

$$T_\alpha = L_\alpha^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L^2[0,1]$ и $u = T_\alpha f$. Используя явный вид ядра (3), запишем интегральное представление:

$$u(x) = \int_0^x t f(t)\, dt + x \int_x^1 f(t)\, dt - \frac{\alpha}{1+\alpha}\, x \int_0^1 t f(t)\, dt. \tag{9}$$

Дифференцируя (9) дважды, получаем $-u'' = f$ почти всюду. Поскольку $f \in L^2(0,1)$, из явного вида u вытекает, что $u \in H^2(0,1)$ (см. [11, 14]), и все проведённые выкладки законны. Непосредственно проверяются граничные условия. Имеем

$$u'(1) = -\frac{\alpha}{1+\alpha} \int_0^1 t f(t)\, dt,$$

$$u(1) = \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 t f(t)\, dt.$$

Исключая из этих равенств интеграл, приходим к соотношению $u'(1) + \alpha u(1) = 0$. Кроме того, $u(0) = 0$. Следовательно, $u \in D(L_\alpha)$ и $L_\alpha u = f$.

Обратно, пусть $y \in D(L_\alpha)$ и $L_\alpha y = f$. Решая краевую задачу $-y'' = f$, $y(0) = 0$, $y'(1) + \alpha y(1) = 0$ стандартным методом (см. [10]), находим $y = T_\alpha f$. Таким образом, T_α действительно является обратным оператором к L_α. □

Из леммы 1 непосредственно вытекает, что спектральные задачи для T_α и L_α эквивалентны: собственные функции у них общие, а собственные значения связаны соотношением

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \tag{10}$$

где μ — собственное значение L_α.

Перейдём к решению спектральной задачи для L_α. Уравнение $L_\alpha y = \mu y$ вместе с граничными условиями (6) приводит к дифференциальному уравнению

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega^2 = \mu.$$

Общее решение имеет вид $y(x) = C_1 \cos\omega x + C_2 \sin\omega x$. Из условия $y(0) = 0$ находим $C_1 = 0$, поэтому

$$y(x) = C \sin(\omega x). \tag{11}$$

Подстановка (11) во второе граничное условие $y'(1) + \alpha y(1) = 0$ даёт

$$\omega \cos\omega + \alpha \sin\omega = 0.$$

Если $\sin\omega \neq 0$, это уравнение можно переписать в виде

$$\omega \cot\omega = -\alpha. \tag{12}$$

Исследуем уравнение (12). Функция $f(\omega) = \omega \cot\omega$ на интервале $(0, \pi)$ строго убывает от 1 до $-\infty$, а на каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$, $k \geq 2$, — от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому при любом $\alpha > -1$ уравнение (12) имеет на каждом из этих интервалов ровно один положительный корень. Обозначим эти корни через $\omega_k(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots$, занумеровав их в порядке возрастания:

$$0 < \omega_1(\alpha) < \pi < \omega_2(\alpha) < 2\pi < \ldots$$

Соответствующие собственные значения оператора T_α имеют вид

$$\lambda_k(\alpha) = \frac{1}{\omega_k^2(\alpha)}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

При $\alpha = 0$ получаем классический случай $\omega_k(0) = (k - \frac{1}{2})\pi$.

Отметим, что из монотонности функции $\omega \cot\omega$ на каждом интервале вытекает, что $\omega_k(\alpha)$ строго возрастает по α; следовательно, $\lambda_k(\alpha)$ строго убывает.

Теперь воспользуемся фундаментальными свойствами оператора T_α. Его ядро $K_\alpha(x, t)$ симметрично и непрерывно на замкнутом квадрате, поэтому $T_\alpha : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ является компактным самосопряжённым оператором. Положительная определённость L_α влечёт положительность T_α. По теореме Гильберта–Шмидта, существует ортонормированный базис из собственных функций, а собственные значения $\lambda_k(\alpha)$, занумерованные в порядке убывания, исчерпывают сингулярные числа оператора. Согласно формуле (2), колмогоровский поперечник образа единичного шара равен $(n+1)$-му собственному значению:

$$d_n(\alpha) = \lambda_{n+1}(\alpha).$$

Объединяя сказанное, приходим к основному результату этого раздела.

Теорема 1 (Спектральное представление)**.** *Для любого $\alpha \in (-1,\infty)$ и любого $n \in \mathbb{N}_0$ выполнено равенство*

$$d_n(\alpha) := d_n\bigl(T_\alpha(B_{L^2}), L^2\bigr) = \frac{1}{\omega_{n+1}^2(\alpha)}, \tag{14}$$

где $\{\omega_k(\alpha)\}_{k=1}^\infty$ — занумерованные в порядке возрастания положительные корни трансцендентного уравнения

$$\omega \cot \omega = -\alpha, \qquad \omega \in (0,\infty) \setminus \pi\mathbb{N}. \tag{15}$$

Доказательство. Из компактности и самосопряжённости T_α (ядро симметрично и непрерывно) и положительности L_α вытекает, что поперечник $d_n(\alpha)$ совпадает с $(n+1)$-м собственным значением оператора T_α (см. [4, 7]). В силу леммы 1 собственные значения суть $\lambda_k(\alpha) = \omega_k^{-2}(\alpha)$. Следовательно,

$$d_n(\alpha) = \frac{1}{\omega_{n+1}^2(\alpha)},$$

что и требовалось доказать. □

Замечание 2. Для компактного самосопряжённого положительного оператора колмогоровские, аппроксимационные и гельфандовы числа совпадают (подробнее см. [3, 7, 8]). Таким образом, все основные s-числа оператора T_α равны $1/\omega_{n+1}^2(\alpha)$, и полученные результаты дают полное описание аппроксимативных свойств семейства $\{T_\alpha\}$.

Таким образом, задача вычисления поперечников полностью сведена к анализу корней трансцендентного уравнения (15).

3 Асимптотическое разложение поперечников

Точное представление $d_n(\alpha) = \omega_{n+1}^{-2}(\alpha)$, полученное в теореме 1, даёт замкнутое выражение для колмогоровских поперечников. Однако для практических приложений и более тонкого понимания их поведения при больших n полезно иметь явное асимптотическое разложение. В этом разделе будет доказана следующая теорема.

Теорема 2 (Асимптотическое разложение)**.** *При $n \to \infty$ для поперечника $d_n(\alpha)$ справедливо разложение*

$$d_n(\alpha) = \frac{1}{\pi^2\,(n+\frac{1}{2})^2} - \frac{2\alpha}{\pi^4\,(n+\frac{1}{2})^4} + \frac{\alpha^2(2\alpha+15)}{3\pi^6\,(n+\frac{1}{2})^6} + O\left(\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^8}\right), \quad (16)$$

где постоянная в символе O равномерна относительно α на любом компакте $K \subset (-1,\infty)$.

Доказательство. Напомним, что $\omega_{n+1}(\alpha)$ — $(n+1)$-й положительный корень уравнения $\omega\cot\omega = -\alpha$, причём $\omega_{n+1} \in (n\pi,(n+1)\pi)$. Введём обозначения

$$N \;=\; n+\frac{1}{2}, \qquad \eta_n \;=\; \omega_{n+1} - \pi N.$$

По построению $\eta_n \in (-\pi/2,\pi/2)$. При $\alpha = 0$ выполнено точное равенство $\omega_{n+1}(0) = \pi N$, т.е. $\eta_n = 0$. Поскольку корни $\omega_k(\alpha)$ уравнения $\omega\cot\omega = -\alpha$ простые (производная функции $\omega\cot\omega$ на каждом интервале $((k-1)\pi,k\pi)$ не обращается в нуль), по теореме о неявной функции они непрерывно зависят от параметра α, в частности, $\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Подставим представление $\omega_{n+1} = \pi N + \eta_n$ в характеристическое уравнение (15):

$$(\pi N+\eta_n)\cot(\pi N+\eta_n) = -\alpha.$$

Воспользуемся тождеством $\cot(\pi N+\eta_n) = \cot\big((n+\frac{1}{2})\pi+\eta_n\big) = -\tan\eta_n$. Тогда предыдущее уравнение переписывается в виде

$$(\pi N+\eta_n)\tan\eta_n = \alpha. \quad (17)$$

Заметим, что из полученного уравнения следует оценка $\eta_n = O(1/N)$ при $N \to \infty$. Действительно, в силу монотонности функции $\eta \mapsto \tan\eta/\eta$ на $(0,\pi/2)$ (и нечётности) имеем $|\tan\eta| \ge |\eta|$ для $|\eta| < \pi/2$, следовательно,

$$|\alpha| = (\pi N+\eta_n)|\tan\eta_n| \ge (\pi N - |\eta_n|)|\eta_n|,$$

откуда $|\eta_n| \le C/N$ с постоянной $C > 0$, не зависящей от n. Следовательно, при $N \to \infty$ величина η_n имеет порядок $O(1/N)$, и мы вправе использовать разложение Маклорена для $\tan\eta_n$.

Для малых η используем разложение Маклорена

$$\tan\eta = \eta + \frac{1}{3}\eta^3 + \frac{2}{15}\eta^5 + O(\eta^7), \qquad \eta \to 0. \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), получаем

$$(\pi N+\eta_n)\Big(\eta_n + \frac{1}{3}\eta_n^3 + \frac{2}{15}\eta_n^5 + O(\eta_n^7)\Big) = \alpha.$$

Раскроем скобки, группируя слагаемые по степеням η_n:

$$\pi N\eta_n + \eta_n^2 + \frac{\pi N}{3}\eta_n^3 + \frac{1}{3}\eta_n^4 + \frac{2\pi N}{15}\eta_n^5 + O(\eta_n^6 + N\eta_n^7) = \alpha. \quad (19)$$

Будем искать η_n в виде асимптотического ряда по степеням $1/N$. Положим

$$\eta_n = \frac{c_1}{N} + \frac{c_3}{N^3} + O(N^{-5}).$$

(Чётные степени по $1/N$ отсутствуют, что подтверждается последующей подстановкой.) Тогда

$$\eta_n^2 = \frac{c_1^2}{N^2} + O(N^{-4}), \qquad \eta_n^3 = \frac{c_1^3}{N^3} + O(N^{-5}),$$
$$\eta_n^4 = O(N^{-4}), \qquad \eta_n^5 = O(N^{-5}).$$

Подставим эти выражения в (19) и удержим слагаемые вплоть до порядка N^{-3} (вклад от η_n^2 имеет порядок N^{-2}, и он должен быть скомпенсирован):

$$\pi N \eta_n + \frac{c_1^2}{N^2} + \frac{\pi N}{3} \cdot \frac{c_1^3}{N^3} + O(N^{-4}) = \alpha.$$

Умножая обе части на $1/(\pi N)$, находим

$$\eta_n + \frac{c_1^2}{\pi N^3} + \frac{c_1^3}{3N^3} + O(N^{-5}) = \frac{\alpha}{\pi N}.$$

Следовательно,

$$\eta_n = \frac{\alpha}{\pi N} - \frac{c_1^2}{\pi N^3} - \frac{c_1^3}{3N^3} + O(N^{-5}).$$

Сравнивая с исходной подстановкой $\eta_n = c_1/N + c_3/N^3 + O(N^{-5})$, получаем

$$c_1 = \frac{\alpha}{\pi}, \qquad c_3 = -\frac{1}{\pi}c_1^2 - \frac{1}{3}c_1^3 = -\frac{\alpha^2}{\pi^3} - \frac{\alpha^3}{3\pi^3}.$$

Таким образом,

$$\eta_n = \frac{\alpha}{\pi N} - \frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^3 N^3} + O(N^{-5}). \tag{20}$$

Теперь вычислим поперечник:

$$d_n(\alpha) = \frac{1}{\omega_{n+1}^2} = \frac{1}{(\pi N + \eta_n)^2} = \frac{1}{\pi^2 N^2}\Big(1 + \frac{\eta_n}{\pi N}\Big)^{-2}.$$

Положим

$$z \;=\; \frac{\eta_n}{\pi N} \;=\; \frac{\alpha}{\pi^2 N^2} - \frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^4 N^4} + O(N^{-6}).$$

Для малых z используем разложение $(1+z)^{-2} = 1 - 2z + 3z^2 + O(z^3)$. Поскольку $z = O(N^{-2})$, имеем $z^3 = O(N^{-6})$, и мы вправе ограничиться квадратичным по z приближением. Тогда

$$\begin{aligned} d_n(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2 N^2}\Big(1 - 2z + 3z^2 + O(N^{-6})\Big) \\ &= \frac{1}{\pi^2 N^2}\Big[1 - 2\Big(\frac{\alpha}{\pi^2 N^2} - \frac{\alpha^2 + \alpha^3/3}{\pi^4 N^4}\Big) + 3\Big(\frac{\alpha^2}{\pi^4 N^4}\Big) + O(N^{-6})\Big] \\ &= \frac{1}{\pi^2 N^2}\Big[1 - \frac{2\alpha}{\pi^2 N^2} + \frac{2(\alpha^2 + \alpha^3/3)}{\pi^4 N^4} + \frac{3\alpha^2}{\pi^4 N^4} + O(N^{-6})\Big] \\ &= \frac{1}{\pi^2 N^2} - \frac{2\alpha}{\pi^4 N^4} + \frac{5\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^3}{\pi^6 N^6} + O(N^{-8}). \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходному индексу $n = N - \frac{1}{2}$, получаем в точности утверждение теоремы:

$$d_n(\alpha) = \frac{1}{\pi^2(n+\frac{1}{2})^2} - \frac{2\alpha}{\pi^4(n+\frac{1}{2})^4} + \frac{\alpha^2(2\alpha+15)}{3\pi^6(n+\frac{1}{2})^6} + O\left(\frac{1}{(n+\frac{1}{2})^8}\right).$$

Равномерность остатка по параметру α. Рассмотрим функцию

$$F(N,\eta,\alpha) = (\pi N + \eta)\tan\eta - \alpha,$$

определённую при $N \geq 1$, $\eta \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\alpha \in (-1, \infty)$. Уравнение (17) записывается как $F(N, \eta_n, \alpha) = 0$. Вычислим частную производную по η:

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(N,\eta,\alpha) = \tan\eta + (\pi N + \eta)(1 + \tan^2\eta).$$

Из уже установленного представления $\eta_n = \alpha/(\pi N) + O(N^{-3})$, справедливого равномерно по α на любом компакте $K \subset (-1, \infty)$, вытекает, что $\eta_n = O(1/N)$ равномерно по $\alpha \in K$. Следовательно, при $N \to \infty$ и $\alpha \in K$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta}(N,\eta_n,\alpha) = \pi N\big(1 + o(1)\big),$$

где $o(1)$ равномерно по $\alpha \in K$. В частности, найдётся N_0, зависящее только от компакта K, такое, что для всех $N \geq N_0$ и всех $\alpha \in K$ выполнено

$$\Big|\frac{\partial F}{\partial \eta}\Big| \geq \frac{\pi N}{2} > 0.$$

По теореме о неявной функции $\eta_n = \eta(N, \alpha)$ является гладкой функцией своих аргументов при $N \geq N_0$, $\alpha \in K$, причём все производные ограничены равномерно по $\alpha \in K$. Следовательно, коэффициенты разложений, использованных при выводе (16), допускают равномерные по $\alpha \in K$ оценки. Отсюда остаточный член $O\big((n+\frac{1}{2})^{-8}\big)$ равномерен по α на любом компакте. □

4 Двусторонние оценки и предельные случаи

Точное представление $d_n(\alpha) = \omega_{n+1}^{-2}(\alpha)$, полученное в теореме 1, и простая геометрическая локализация корней позволяют установить двусторонние оценки поперечников, не содержащие неизвестных констант, а также полностью исследовать поведение семейства $\{d_n(\alpha)\}$ в предельных случаях $\alpha \to \infty$ и $\alpha \to -1^+$.

Теорема 3 (Двусторонние оценки)**.** *Для любого $\alpha \in (-1, \infty)$ и любого целого $n \geq 1$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{\pi^2\,(n+1)^2} \;\leq\; d_n(\alpha) \;\leq\; \frac{1}{\pi^2\,n^2}. \tag{21}$$

При $n = 0$ имеет место равенство $d_0(\alpha) = 1/\omega_1^2(\alpha)$, причём $\omega_1(\alpha) \in (0, \pi)$ — первый положительный корень уравнения $\omega \cot \omega = -\alpha$; в частности, $d_0(\alpha) > 1/\pi^2$.

Доказательство. Напомним, что $d_n(\alpha) = \omega_{n+1}^{-2}(\alpha)$. При $n \geq 1$ номер корня $k = n+1 \geq 2$. Функция $f(\omega) = \omega \cot \omega$ строго убывает на каждом интервале $((k-1)\pi,\, k\pi)$ от $+\infty$ до $-\infty$, поэтому уравнение $\omega \cot \omega = -\alpha$ имеет на нём ровно одно решение. (Случай $n = 0$ рассматривается отдельно, поскольку при $k = 1$ интервал $(0, \pi)$ имеет другую структуру: функция $\omega \cot \omega$ убывает на нём от 1 до $-\infty$, а не от $+\infty$ до $-\infty$, что не позволяет получить для $d_0(\alpha)$ те же неравенства.) Следовательно,

$$\omega_{n+1}(\alpha) \in \bigl(n\pi,\, (n+1)\pi\bigr).$$

Переходя к обратным величинам и возводя в квадрат, получаем

$$\frac{1}{(n+1)^2\pi^2} < \frac{1}{\omega_{n+1}^2(\alpha)} < \frac{1}{n^2\pi^2},$$

что в точности совпадает с (21). При $n = 0$ утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1 и того факта, что $\omega_1(\alpha) \in (0, \pi)$, откуда $d_0(\alpha) > 1/\pi^2$. □

Замечание 3. Неравенства (21) являются точными в следующем смысле. При $\alpha \to \infty$ поперечники стремятся к нижней границе:

$$\lim_{\alpha\to\infty} d_n(\alpha) = \frac{1}{\pi^2(n+1)^2}.$$

В то же время при $\alpha \to -1^+$ предельные значения $d_n(-1^+)$ для всех $n \geq 1$ строго больше этой нижней границы, а верхняя граница $1/(\pi^2 n^2)$ не достигается ни при каком $\alpha \in (-1, \infty)$.

Предельные случаи. 1. Предел $\alpha \to \infty$ (случай Дирихле). При $\alpha \to \infty$ правая часть характеристического уравнения $\omega \cot \omega = -\alpha$ стремится к $-\infty$. На каждом интервале $((k-1)\pi, k\pi)$ функция $f(\omega) = \omega \cot \omega$ строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$, поэтому её значения становятся большими по модулю и отрицательными лишь вблизи правого конца. Следовательно, корни приближаются к правым концам интервалов:

$$\omega_k(\alpha) \;\longrightarrow\; k\pi - 0, \qquad \alpha \to \infty.$$

В частности, $\omega_1(\alpha) \to \pi$, а для $k \geq 2$ $\omega_k(\alpha) \to k\pi$. Таким образом,

$$\lim_{\alpha\to\infty} d_0(\alpha) = \frac{1}{\omega_1^2(\alpha)} \to \frac{1}{\pi^2},$$

а для любого $n \geq 1$

$$\lim_{\alpha\to\infty} d_n(\alpha) = \frac{1}{\pi^2\,(n+1)^2}. \tag{22}$$

Этот предельный случай отвечает задаче Дирихле с условиями $y(0) = y(1) = 0$. Физически такая ситуация соответствует, например, закреплённой в обоих концах струне либо задаче теплопроводности с нулевой температурой на границе.

2. Предел $\alpha \to -1^+$ (предельный случай Робена). При $\alpha \to -1^+$ имеем $-\alpha \to 1^-$, и характеристическое уравнение переходит в

$$\omega \cot \omega = 1.$$

Обозначим через ω_k^* его положительные корни, занумерованные в порядке возрастания. Функция $f(\omega) = \omega \cot \omega$ на интервалах $((k-1)\pi, k\pi)$ по-прежнему строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (при $k \geq 2$) и от 1 до $-\infty$ (при $k = 1$), поэтому каждый корень ω_k^* конечен и отделён от нуля. Первый корень ω_1^* лежит в $(0, \pi)$. В силу непрерывной зависимости корней от параметра

$$\lim_{\alpha\to-1^+} \omega_k(\alpha) = \omega_k^*, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Соответственно, для любого $n \geq 0$

$$\lim_{\alpha\to-1^+} d_n(\alpha) = \frac{1}{(\omega_{n+1}^*)^2}. \tag{23}$$

Все предельные поперечники конечны. Предельному переходу соответствует классическое условие Робена $y'(1) = y(1)$. При $\alpha = -1$ оператор L_{-1} теряет строгую положительную определённость: у него появляется нулевое собственное значение, и он перестаёт быть обратимым. Поэтому значение $\alpha = -1$ исключено из области определения нашего семейства.

Таким образом, семейство операторов $\{T_\alpha\}$ осуществляет непрерывный переход от задачи Робена (при $\alpha \searrow -1$) через классический случай $\alpha = 0$ к задаче Дирихле (при $\alpha \to \infty$). Поперечники $d_n(\alpha)$ непрерывно зависят от α. При всех допустимых значениях параметра их главный член асимптотики имеет порядок n^{-2}, а влияние α сказывается лишь на следующих членах разложения, коэффициенты которых явно выписаны в теореме 2.

References

[1] G. G. Lorentz, M. von Golitschek, Yu. Makovoz. *Constructive Approximation: Advanced Problems*. Springer, Berlin, 1996.

[2] V. M. Tikhomirov. *Some problems in approximation theory*. Math. Notes, **9**:5 (1971), 343–350.

[3] A. Pinkus. *n-Widths in Approximation Theory*. Springer, Berlin, 1985.

[4] B. S. Kashin, Yu. V. Malykhin, K. S. Ryutin. *Kolmogorov width and approximate rank*. Proc. Steklov Inst. Math., **303** (2018), 140–153.

[5] Yu. V. Malykhin. *Kolmogorov widths of Besov classes $B^1_{1,\theta}$ and products of octahedra*. Proc. Steklov Inst. Math., **312** (2021), 215–225.

[6] R. S. Ismagilov. *Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials*. Russian Math. Surveys, **29**:3 (1974), 169–186.

[7] H. König. *Eigenvalue Distribution of Compact Operators*. Birkhäuser, Basel, 1986.

[8] A. Pietsch. *s-Numbers of operators in Banach spaces*. Studia Math., **51** (1974), 201–223.

[9] M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak. *Estimates of singular numbers of integral operators*. Russian Math. Surveys, **32**:1 (1977), 15–89.

[10] F. G. Tricomi. *Integral Equations*. Interscience Publishers, New York, 1957.

[11] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer, Berlin, 1995.

[12] A. P. Buslaev, V. M. Tikhomirov. *Spectra of nonlinear differential equations and widths of Sobolev classes*. Math. USSR-Sb., **71**:2 (1992), 427–446.

[13] D. Lewis, B. Sing. *An upper bound on the Kolmogorov widths of a certain family of integral operators*. J. Approx. Theory, **240** (2019), 71–95.

[14] A. Zettl. *Sturm–Liouville Theory*. American Mathematical Society, 2005.

Arthur Lvovich Sinai
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University,
ul. Bolshaya Sankt-Peterburgskaya, 41,
173003, Veliky Novgorod, Russia
Email address: arthur.sinai@mail.ru