S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2015) УДК 519.17
DOI 10.17377/semi.2015.12.xxx MSC 05C25

О ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

И.Н. Белоусов, М.П. Голубятников, А.А. Махнев

Abstract. There is infinite sequence of formally self-dual classical distance-regular graphs Γ with $b=2$, $\alpha=1$, $\beta=n-1$, $v=n^3$ $(n>5)$ (A. Brouwer). Graph Γ has intersection array $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ and realized when n is a power of 2 by a biliniar forms graph. We suggested that Γ does not exist if n is not a power of 2. It is true if $n \geq 71$. Finally distance-regular graph with intersection array $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$ does not exist, if some local subgraph is 7×8-grid.

Keywords: distance-regular graph, formally self-dual graph, geometric graph, biliniar forms graph.

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a]=\Gamma_1(a)$, $a^\perp=\{a\}\cup[a]$.

Граф Σ называется r-накрытием графа Γ, если имеется гомоморфизм φ, отображающий Σ на Γ, при котором $|\varphi^{-1}(u)|=r$ для оюбой вершины $u\in\Gamma$ и для $w\in\varphi^{-1}(u)$ граф $\varphi(\Sigma(w))$ изоморфен $\Gamma(u)$.

Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i в Γ для любого $i=0,...,d$. Положим

Belousov, I.N., Golubyatnikov M.P., Makhnev, A.A., On distance-regular graphs with intersection arrays $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10067).

Поступила 25 мая 2020 г., опубликована ?? июня 2020 г.

$a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Далее, через $p^l_{ij}(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются числами пересечений графа Γ [1].

Порядок клики в дистанционно регулярном графе степени k, имеющем наименьшее собственное значение $-m$ не больше $1+k/m$. Клика K с $1+k/m$ вершинами называется кликой Дельсарта. Дистанционно регулярный граф называется *геометрическим*, если он содержит такое семейство S клик Дельсарта, что каждое ребро графа содержится в единственной клике из S.

Дистанционно регулярный граф называется формально самодуальным, если первая и вторая матрицы его собственных значений совпадают.

Пусть $V = F^d$, $W = F^e$, $d \le e$ и B — линейное пространство размерности de над полем $F = F_q$ билинейных форм f из $V \times W$ в F. Нулевое пространство f в V — это $\{v \in V \mid f(v, W) = 0\}$. Рангом формы f называется произведение коразмерностей нулевых пространств в V и W. Формы f и g смежны в графе билинейных форм $H_q(d, e)$, если ранг $f - g$ равен 1.

Имеется бесконечное семейство формально самодуальных дистанционно регулярных графов Γ с классическими параметрами $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = n-1$, $v = n^3$ $(n > 5)$ ([1, стр. 425]). Граф Γ имеет массив пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ и реализуется как граф билинейных форм $H_2(3, e)$, когда $n = 2^e$. Графы $H_q(d, e)$ охарактеризованы массивом пересечений (Метш, 1999) в случаях $q = 2, e \ge d+4$ и $q \ge 3, e \ge d+3$ [2]. Гаврилюк и Кулен рассмотрели случай $q = 2, e = d$ [3]. Таким образом, графы $H_q(3, e)$ распознаются по массиву пересечений, за исключением случаев $e \in \{4, 5, 6\}$ (случаев $n \in \{16, 32, 64\}$).

При $n = 6$ получим массив пересечений $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$, а при $n = 7$ получим массив пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$. С помощью тройных чисел пересечений было доказано, что оба графа не существуют ([4] и [5] соответственно). Гаврилюк и Кулен с помощью изучения собственных значений локальных подграфов получили новое доказательство несуществования графа с массивом пересечений $\{35, 24, 8; 1, 6, 28\}$ [3, теорема 5.1]. В (см. [3, раздел 5]) доказано, что в дистанционно регулярном графе с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ окрестность никакой вершины не может быть $7 \times (n-1)$-решеткой в случаях $n = 6$ и $n = 7$.

Предложение 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ имеет спектр $(7n-7)^1, (3n-7)^{7n-7}, (n-7)^{7(n-1)(n-2)}, -7^{(n-1)(n-2)(n-4)}$, вторую матрицу собственных значений*

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 7n-7 & 7(n-1)(n-2) & (n-1)(n-2)(n-4) \\ 1 & 3n-7 & (n-2)(n-7) & -(n-2)(n-4) \\ 1 & n-7 & -3n+14 & 2n-8 \\ 1 & -7 & 14 & -8 \end{pmatrix},$$

и числа пересечений

(1) $p^1_{11} = n+4$, $p^1_{21} = 6n-12$, $p^1_{22} = 3(n+1)(n-2)$, $p^1_{32} = 4(n-2)(n-4)$, $p^1_{33} = (n-2)(n-4)(n-5)$;

(2) $p^2_{11} = 6$, $p^2_{21} = 3n+3$, $p^2_{22} = n^2+24n-86$, $p^2_{31} = 4n-16$, $p^2_{32} = 6(n-4)^2$, $p^2_{33} = (n^2-9n+22)(n-4)$;

(3) $p^3_{21} = 28$, $p^3_{22} = 42n - 168$, $p^3_{31} = 7n - 35$, $p^3_{32} = 7n^2 - 63n + 154$, $p^3_{33} = n^3 - 14n^2 + 70n - 128$.

По предложению 1 любой граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ имеет наименьшее собственное значение -7 и порядок клики Дельсарта в нем равен n. Если C — клика Дельсарта, то любая вершина вне C смежна с 0 или $n - b_1/(\theta_3+1) = 2$ вершинами из C ([1, предложение 4.4.6]).

Гипотеза 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *не существует, если* n *не является степенью* 2.

В [3] отмечается, что гипотеза справедлива, если $n \geq 134$. Следующий результат показывает, что гипотеза справедлива, если $n \geq 94$.

Теорема 1. *Если дистанционно регулярный граф* Γ *с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ *существует и* $n \geq 94$, *то* $n = 2^e$ *и* Γ *— граф билинейных форм* $H_2(3, e)$.

Следствие 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 70$ *или* $n > 60$ *и порядок коклики в окрестностях вершин графа* Γ *не больше 7, то* Γ *является геометрическим.*

Модифицируя рассуждения Метша из доказательства предложения 2.2 [2], получим следующий результат

Теорема 2. *Пусть* Γ *— геометрический граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 42$, *то* $n = 2^e$ *и* Γ *— граф билинейных форм* $H_2(3, e)$.

Заметим, что по следствию 1 граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$ является геометрическим, если $n > 70$ или $n > 60$ и окрестности вершин в Γ не содержат 8-коклик. Таким образом, выполняется

Следствие 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. *Если* $n > 70$, *то* $n = 2^e$ *и* Γ *— граф билинейных форм* $H_2(3, e)$.

Далее, рассматривается дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$.

Теорема 3. *Дистанционно регулярный граф* Γ *с массивом пересечений* $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$ *не содержит вершин, окрестности которых являются* 7×8-*решетками.*

Отметим, что в [3, теорема 1.2] доказано, что для связного локально $m \times n$-решетчатого графа Γ, $m \leq n$ с $b_2 = 4(m-2)(n-2)$ и $c_2 = 6$ верны равенства $m = 2^d - 1$, $n = 2^e - 1$, и граф билинейных форм $H_2(d, e)$ является накрывающим графом для Γ.

В доказательстве теоремы 2 используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d. Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ, r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d, то $\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i) = r_i$, $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right] = |\left\{ {u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right\}|$. Числа $\left[{u_1u_2u_3 \atop r_1r_2r_3} \right]$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $\left[\begin{smallmatrix} u_1 u_2 u_3 \\ r_1 r_2 r_3 \end{smallmatrix}\right]$ будем писать $[r_1 r_2 r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1 r_2 r_3]$ нет общих формул. Однако, в [4] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1 r_2 r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $W = d(u,v), U = d(v,w), V = d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x = u$ такая, что $d(x,u) = 0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh] = \delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h] = \delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0] = \delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$, и сосчитав число вершин всех расстояний от третьей, получим:

$\sum_{l=1}^{d}[ljh] = p_{jh}^{U} - [0jh]$, $\sum_{l=1}^{d}[ilh] = p_{ih}^{V} - [i0h]$, $\sum_{l=1}^{d}[ijl] = p_{ij}^{W} - [ij0]$.

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j| > W$ или $i+j < W$ имеем $p_{ij}^{W} = 0$, поэтому $[ijh] = 0$ для всех $h \in \{0, ..., d\}$.

Положим $S_{ijh}(u,v,w) = \sum_{r,s,t=0}^{d} Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$. Если параметр Крейна $q_{ij}^{h} = 0$, то $S_{ijh}(u,v,w) = 0$.

1. Характеризация графов билинейных форм $H_2(3, e)$

Следующий результат получен Метшем (см. предложение 2.2 из [2]).

Предложение 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с классическими параметрами (d, q, α, β), $d \geq 3$, $r = q^d - 1$ и $\alpha = q - 1 \geq 1$. Предположим, что существует целое число $s \geq r$ такое, что*

(1) *если $q = 2$ и $d = 3$, то $s = r = 7$,*

(2) *$(s+1)(\lambda+1) - s(s+1)(q^2+q-1)/2 > r\beta$,*

(3) *$\lambda + 1 > s(q^3+q^2+2q-1) - q^2(q^2+q+1)$.*

Тогда q — степень простого числа, $\beta = q^e - 1$ и Γ — граф билинейных форм $H_q(d, e)$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$. Тогда $a_1 = n+4$ и Γ имеет классические параметры $(3, 2, 1, n-1)$. Далее, $s = r = 7$. Если $n \geq 94$, то выполнены неравенства $8(n+5) - 140 > 7(n-1)$, $n+5 > 7(8+4+4-1) - 4(4+2+1)$ и по педложению Метша $n = 2^e$ и Γ — граф билинейных форм $H_2(3, e)$.

2. Геометричность некоторых графов с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

Следующий результат является частным случаем следствия 1.3 из [6].

Предложение 3. *Пусть Γ — реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ), e, s — неотрицательные целые числа, и максимальная клика C с $|C| \geq \lambda + 2 - (s-1)e$ называется прямой. Если выполняются условия:*

(1) *$|[u] \cap [y] \cap [z]| \leq e$ для любых двух несмежных верщин y, z и дюбой вершины $u \in [y] \cap [z]$,*

(2) *$\lambda + 1 > (2s-1)e$,*

(3) *либо порядок коклики в окрестности любой вершины не больше s, либо $k < (s+1)(\lambda+1) - s(s+1)e/2$,*

то каждая вершина графа Γ лежит на s прямых, а каждое ребро графа Γ лежит на единственной прямой.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$.

Лемма 1. *Пусть $d(u,w)=2$. Тогда выполнятся следующие утверждения:*

(1) *если $u^{\perp}$ содержит семь клик Дельсарта, то степень любой вершины в графе $[u]\cap[w]$ не больше 3;*

(2) *если $[u]$ является $7\times(n-1)$-решеткой, то $[u]\cap[w]$ является шестиугольником;*

(3) *если $[u]$ является $7\times(n-1)$-решеткой, $z\in[w]\cap\Gamma_2(u)$, то $[u]\cap[w]\cap[z]$ является пустым графом или объединением не более двух изолированных ребер.*

Доказательство. Заметим, что $[w]$ содержит по две вершины в трех кликах Дельсарта L_1, L_2, L_3 из $u^{\perp}$. Вершина из L_1 смежна с единственной вершиной из $L_1\cap[w]$ и не более чем с одной вершиной из $L_2\cap[w]$ и из $L_3\cap[w]$. Утверждение (1) доказано.

Пусть $[u]$ является $7\times(n-1)$-решеткой. Очевидно, что $[u]\cap[w]$ является шестиугольником. Пусть $z\in[w]\cap\Gamma_2(u)$ и $[u]\cap[w]\cap[z]$ — непустой граф. Тогда z лежит в максимальной клике из $[w]$, содержащей ребро шестиугольника $[u]\cap[w]$. Если z лежит еще в одной максимальной клике из $[w]$, содержащей ребро шестиугольника $[u]\cap[w]$, то $[u]\cap[w]\cap[z]$ является объединением двух изолированных ребер. $\square$

Лемма 2. *Выполнятся следующие утверждения:*

(1) *если степень вершины в любом μ-подграфе графа Γ не больше 2, то в случае $n\geq 22$ граф Γ является геометрическим;*

(2) *если степень вершины в любом μ-подграфе графа Γ не больше 3, то в случае $n\geq 38$ граф Γ является геометрическим;*

(3) *если степень вершины в любом μ-подграфе графа Γ не больше 4, то в случае $n\geq 66$ граф Γ является геометрическим.*

Доказательство. Положим $s=7$. Если $e=2$, то неравенства $n+5>26$ и $7(n-1)<8(n+5)-56$ выполняются при $n\geq 22$. В этом случае по предложению 4 граф Γ является геометрическим.

Если $e=3$, то неравенства $n+5>39$ и $7(n-1)<8(n+5)-84$ выполняются при $n\geq 38$. В этом случае по предложению 4 граф Γ является геометрическим.

Если $e=4$, то неравенства $n+5>52$ и $7(n-1)<8(n+5)-112$ выполняются при $n\geq 66$. В этом случае по предложению 4 граф Γ является геометрическим. $\square$

Лемма 3. *Пусть максимальный порядок коклики в окрестностях вершин графа Γ равен t. Если $n>70$ или $t\leq 7$ и $n>60$, то граф Γ является геометрическим.*

Доказательство. Пусть $s=8$. Тогда неравенство $n>70$ равносильно $n+5>5(2s-1)$, а $n>64$ равносильно $7(n-1)<(s+1)(n+5)-5s(s+1)/2$. По предложению 4 граф Γ является геометрическим, если $n>70$

Пусть $s=7$. Тогда неравенство $n>60$ равносильно $n+5>5(2s-1)$, а $n>93$ равносильно $7(n-1)<(s+1)(n+5)-5s(s+1)/2$. Если $t\leq 7$, то по предложению 4 граф Γ является геометрическим при $n>60$. $\square$

По лемме 3 выполняется следствие 1.

3. О геометрических графах с массивами пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$

В этом разделе мы докажем теорему 2. Доказательство проводится модификацией рассуждений Метша из доказательства предложения 2.2 [2]. Имеем $q = 2$, $d = 3$, $s = r = 7$, $\beta = n-1$, неравенство (3) равносильно $n > 42$, а неравенство (2) не используется. Для смежных вершин u, w через uw обозначим единственную прямую (клику Дельсарта), проходящую через u, w. Если $d(u,w) = 2$, то через $[u,w]$ обозначим множество прямых, проходящих через u и пересекающих $[w]$.

Леммы 2.3–2.9 из [2] проверяются непосредственно, при этом неравенство $n > 42$ не используется.

Лемма 4. *Рассмотрим вершину $p \in \Gamma$ и прямую L с $d(p, L) = 1$. Тогда $[p,u] = [p,w]$ для любых вершин $u, w \in L \cap \Gamma_2(p)$.*

Доказательство. Повторяем доказательство леммы 2.10 из [2]. □

Здесь используется неравенство (3) из предложения 2.2 [2], равносильное $n > 42$.

Лемма 5. *Если вершины $v, v' \in \Gamma$ смежны, то подграф $[v] \cap [v'] - vv'$ является кликой.*

Доказательство. Пусть вершины $v, v' \in \Gamma$ смежны, $X = [v] \cap [v'] - vv'$ и $x \in X$. Положим $L = vx$. Тогда найдется вершина $p \in L$ с $d(p, v') = 2$. Если $x' \in X$, $d(p, x') = 2$, то вершины x, x' смежны (повторение рассуждений из доказательства леммы 2.11 [2]). Так как для любой вершины $x' \in X - \{x\}$ найдется вершина $p \in L$ с $d(p, v') = d(p, x') = 2$, то X является кликой. □

По лемме 5 граф Γ является решетчатым и по теореме 1.2 из [3] имеем $n = 2^e$ и Γ — граф билинейных форм $H_2(3, e)$. Теорема 2 доказана.

4. Собственные значения графа с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7(n-1), 6(n-2), 4(n-4); 1, 6, 28\}$, $n \geq 9$.

По [3, предложение 2.3] многочлен Тервиллигера графа Γ равен

$$T_2(\lambda) = -3(\lambda - n + 3)(\lambda + 1)(\lambda + 3)(\lambda - 5).$$

Лемма 6. *Пусть u — вершина графа Γ, $\Delta = [u]$, η — неглавное собственное значение графа Δ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) $-3 \leq \eta \leq -1$ *или* $5 \leq \eta \leq n-3$*;*

(2) *если* $n = 9$*, то множество целых собственных значений графа* Δ *содержится в* $\{13, 6, 5, -1, -2, -3\}$*;*

(3) *спектр* 7×8*-решетки равен* $\{13^1, 6^6, 5^7, -2^{42}\}$.

Доказательство. По [3, лемма 4.1] имеем $-3 \leq \eta \leq -1$ или $5 \leq \eta \leq n-3$.

Если $n = 9$, то по утверждению (1) множество целых собственных значений графа Δ содержится в $\{13, 6, 5, -1, -2, -3\}$.

Заметим, что $a \times b$-решетка является прямым произведением a-клики и b-клики, поэтому спектр $a \times b$-решетки равен $\{(a+b-2)^1, (a-2)^{b-1}, (b-2)^{a-1}, -2^{ab-a-b+1}\}$. □

5. Тройные числа пересечений

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{56, 42, 20; 1, 6, 28\}$. По предложению Γ имеет спектр $56^1, 20^{56}, 2^{392}, -7^{280}$, вторую матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 56 & 392 & 280 \\ 1 & 20 & 14 & -35 \\ 1 & 2 & -13 & 10 \\ 1 & -7 & 14 & -8 \end{pmatrix},$$

и числа пересечений

(1) $p^1_{11} = 13$, $p^1_{21} = 42$, $p^1_{22} = 210$, $p^1_{32} = 140$, $p^1_{33} = 140$;

(2) $p^2_{11} = 6$, $p^2_{21} = 30$, $p^2_{22} = 211$, $p^2_{31} = 20$, $p^2_{32} = 150$, $p^2_{33} = 110$;

(3) $p^3_{21} = 28$, $p^3_{22} = 210$, $p^3_{31} = 28$, $p^3_{32} = 154$, $p^3_{33} = 97$.

Отсюда граф Γ_2 сильно регулярен с параметрами (729,392,211,210) и собственными значениями 392,14, -13. Максимальный порядок клики в Γ_2 не больше 31.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ, $[rst] = \left[\begin{smallmatrix} uvw \\ rst \end{smallmatrix}\right]$.

Лемма 7. *Пусть* $d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 1$. *Тогда* $[011] = [101] = [110] = 1$, $[111] = r_1$, *и для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

(1) $[112] = [121] = [211] = -r_1 + 12$, $[122] = r_1 + 30$;

(2) $[211] = -r_1 + 12$, $[212] = [221] = r_1 + 30$, $[222] = 9r_1 + 60$, $[223] = [232] = [322] = -10r_1 + 120$, $[233] = -10r_1 + 120$;

(3) $[323] = [332] = 10r_1 + 20$, $[333] = -10r_1 + 120$,

где $r_1 \in \{0, 1, 2, ..., 12\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления с использованием матрицы Q и с учетом равенств $S_{313}(u,v,w) = S_{331}(u,v,w) = S_{133}(u,v,w) = 0$. □

Лемма 8. *Пусть* $d(u,v) = 2, d(u,w) = d(v,w) = 1$. *Тогда* $[021] = [110] = [201] = 1$, $[111] = r_2$, *и для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

(1) $[112] = -r_2 + 5$, $[121] = [211] = -r_2 + 13$, $[122] = r_2 + 17$, $[132] = 20$;

(2) $[211] = -r_2 + 13$, $[212] = r_2 + 17$, $[221] = r_2 + 28$, $[222] = 9r_2 + 93$, $[223] = -10r_2 + 90$, $[232] = -10r_2 + 100$, $[233] = 10r_2 + 50$;

(3) $[312] = 20$, $[322] = -10r_2 + 100$, $[323] = 10r_2 + 50$, $[332] = 10r_2 + 20$, $[333] = -10r_2 + 90$,

где $r_2 \in \{0, 1, ..., 5\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления с использованием матрицы Q и с учетом равенств $S_{313}(u,v,w) = S_{331}(u,v,w) = S_{133}(u,v,w) = 0$. □

Лемма 9. *Пусть* $d(u,v) = 1, d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда* $[012] = [102] = [220] = 1$, $[111] = r_3$, $[232] = r_4$ *и для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

(1) $[112] = r_4 + 9r_3 - 87$, $[113] = -r_4 - 10r_3 + 100$, $[121] = [211] = -r_4 + 6$, $[122] = -r_4 - 9r_3 + 116$, $[123] = r_4 + 10r_3 - 80$;

(2) $[211] = -r_3 + 6$, $[212] = -r_4 - 9r_3 + 116$, $[213] = r_4 + 10r_3 - 80$, $[221] = 2r_4 + 21r_3 - 176$, $[222] = 9r_3 + 95$, $[223] = -2r_4 - 30r_3 + 290$, $[231] = [231] = -2r_4 - 20r_3 + 200$, $[233] = r_4 + 20r_3 - 60$;

(3) $[321] = -2r_4 - 20r_3 + 200$, $[322] = r_4$, $[323] = r_4 + 20r_3 - 60$, $[331] = 2r_4 + 20r_3 - 180$, $[332] = -r_4 + 150$, $[333] = -r_4 - 20r_3 + 170$,

где $r_3 \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$, $33 \le r_4 \le 100$.

Доказательство. Компьютерные вычисления с использованием матрицы Q и с учетом равенств $S_{313}(u,v,w) = S_{331}(u,v,w) = S_{133}(u,v,w) = 0$. □

По лемме 9 имеем $90 \le 10r_3 + r_4 \le 100$ и $87 \le 9r_3 + r_4$. В случае $r_3 = 0$ имеем $90 \le r_4 \le 100$, в случае $r_3 = 1$ имеем $80 \le r_4 \le 90$, в случае $r_3 = 2$ имеем $70 \le r_4 \le 80$, а в случае $r_3 = 3$ имеем $60 \le r_4 \le 70$.

Если $[u]$ является 7×8-решеткой, то $r_1 \in \{5, 6\}$, $r_2 = 2$, $r_3 \in \{0, 2, 4\}$ (причем граф $[u] \cap [v] \cap [w]$ является пустым или объединением не более двух изолированных ребер).

Подсчитаем число d пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 11} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, $p^1_{11} = 13$, $[222] = 9r_1 + 60$, по лемме 7 имеем $d = 13(9r_1 + 60)$ и $780 = 13 \cdot 60 \le d \le 13 \cdot 168 = 2184$. С другой стороны, $p^1_{22} = 210$, $[112] = r_4 + 9r_3 - 87$, и по лемме 9 имеем $0 \le d \le 67 \cdot 210$, поэтому $780 \le \sum_i r^i_4 + 9\sum_i r^i_3 - 87 \cdot 210 \le 2184$. Отсюда $19050 = 18270 + 780 \le \sum_i r^i_4 + 9\sum_i r^i_3 \le 18270 + 2184 = 20454$.

Лемма 10. *Пусть* $d(u,v) = 1, d(u,w) = 2$ *и* $d(v,w) = 3$. *Тогда* $[012] = [103] = [230] = 1$, $[213] = r_5$ *и для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

(1) $[112] = r_5 - 15$, $[113] = r_5 + 28$, $[121] = 6$, $[122] = -r_5 + 45$, $[123] = r_5 - 9$;

(2) $[212] = -r_5 + 42$, $[221] = 2r_5 - 30$, $[222] = 111$, $[223] = -2r_5 + 129$, $[231] = -2r_5 + 60$, $[232] = r_5 + 58$, $[233] = r_5 + 21$;

(3) $[321] = -2r_5 + 52$, $[322] = r_5 + 54$, $[323] = r_5 + 34$, $[331] = 2r_5 - 32$, $[332] = r_5 + 96$, $[333] = -r_5 + 76$,

где $r_5 \in \{16, 17, ..., 26\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления с использованием матрицы Q и с учетом равенств $S_{313}(u,v,w) = S_{331}(u,v,w) = S_{133}(u,v,w) = 0$. □

Подсчитаем число f пар вершин y, z на расстоянии 2 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 23} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, $p^1_{23} = 140$, $[222] = 111$ и по лемме 10 имеем $f = 140 \cdot 111$. С другой стороны, $p^1_{22} = 210$, $[232] = r_4$ и по лемме 9 имеем $33 \cdot 210 \le f \le 100 \cdot 210$, поэтому $\sum_i r^i_4 = 140 \cdot 111 = 15540$. Отсюда $3510 = 19050 - 15540 \le 9\sum_i r^i_3 \le 20454 - 15540 = 4914$ и $390 \le \sum_i r^i_3 \le 546$.

Лемма 11. *Пусть* $d(u,v) = 1, d(u,w) = 3, d(v,w) = 3$. *Тогда* $[013] = [103] = [330] = 1$, $[231] = r_6$ *и для тройных чисел пересечений выполняются равенства:*

(1) $[112] = -r_6/2 + 12$, $[113] = r_6/2 + 1$, $[122] = [212] = r_6/2 + 16$, $[123] = -r_6/2 + 26$;

(2) $[212] = r_6/2 + 16$, $[213] = -r_6/2 + 26$, $[221] = -r_6 + 28$, $[222] = 114$, $[223] = r_6 + 68$, $[232] = [322] = -r_6/2 + 80$, $[233] = -r_6/2 + 60$;

(3) $[321] = r_6$, $[322] = -r_6/2 + 80$, $[323] = -r_6/2 + 60$, $[331] = -r_6 + 28$, $[332] = r_6/2 + 74$, $[333] = r_6/2 + 37$,

где $r_6 \in \{0, 2, 4, ..., 24\}$.

Доказательство. Компьютерные вычисления с использованием матрицы Q и с учетом равенств $S_{313}(u,v,w) = S_{331}(u,v,w) = S_{133}(u,v,w) = 0$. □

Подсчитаем число e пар вершин y, z на расстоянии 3 в графе Γ, где $y \in \left\{ {uv \atop 33} \right\}$ и $z \in \left\{ {uv \atop 22} \right\}$. С одной стороны, $p^1_{33} = 140$, $[223] = r_6 + 68$ и по лемме 11 имеем

$9520 = 68\cdot 140 \le e = \sum_i r_6^i + 68\cdot 140 \le 92\cdot 140 = 12880$. С другой стороны, $p^1_{22} = 210$, $[333] = -r_4 - 20r_3 + 170$ и по лемме 9 имеем $0 \le e = -\sum_i r_4^i - 20\sum_i r_3^i + 170\cdot 210 \le 137\cdot 210 = 28770$. Отсюда $9520 \le e = -\sum_i r_4^i - 20\sum_i r_3^i + 170\cdot 210 \le 12880$ и $364 \le \sum_i r_3^i \le 532$.

Ранее мы доказали, что $390 \le \sum_i r_3^i \le 546$, поэтому $390 \le \sum_i r_3^i \le 532$.

Лемма 12. *Окрестность любой вершины в Γ не является решеткой.*

Доказательство. Пусть $[u]$ является 7×8-решеткой, $d(u,v) = 1$, $d(u,w) = d(v,w) = 2$ и x_i — число вершин из $\left\{ {uv \atop 22} \right\}$, смежных точно с i вершинами из $[u]\cap[v]$. Тогда $x_0 + x_2 + x_4 = 210$, $x_2 + 2x_4 = 6\binom{7}{2} + 7\binom{6}{2} = 273$, противоречие с тем, что $364 \le 2x_2 + 4x_4 = \sum_i r_3^i \le 532$. □

Теорема 3 следует из леммы 12.

References

[1] A.E. Brouwer, A.M. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1989.

[2] K. Metsch, *On a Characterization of Bilinear Forms Graphs*, Europ. J. Comb. **20** (1999), 293-–306.

[3] A. Gavrilyuk, J. Koolen, *A characterization of the graphs of bilinear $d\times d$-forms over F_2*, Combinatorica **39:2** (2019), 289-–321.

[4] A. Jurishich, J. Vidali, *Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3*, Des. Codes Cryptogr., **65** (2012), 29–47.

[5] I.N. Belousov, A.A. Makhnev *Distance-regular graphs with intersection arrays $\{42,30,12;1,6,28\}$ and $\{60,45,8;1,12,50\}$ do not exist*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 1506–1512.

[6] K. Metsch, *Improvement of Bruck's Completion Theorem*, Designs, Codes and Cryptography, **1** (1991), 99–116.

Ivan Nikolaevich Belousov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: i_belousov@mail.ru

Mikhail Petrovich Golubyatnikov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: mike_ru1@mail.ru

Aleksandr Alekseevich Makhnev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
str. S.Kovalevskaya, 16,
620990, Yekaterinburg, Russia
Email address: makhnev@imm.uran.ru