S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том ?, стр. ?? (2026) УДК 517.956.25

DOI 10.33048/semi.2026.16.xxx MSC 35J25, 35J62

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ЛОКАЛЬНОГО РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ АНИЗОТРОПНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ РОСТОМ

Л.М. КОЖЕВНИКОВА

Abstract. В работе рассмотрен некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с переменными показателями нелинейностей и локально суммируемой правой частью. В анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями установлены свойства и единственность локальных ренормализованных решений задачи Дирихле в произвольных областях. Ранее, для более широкого класса уравнений, автором было доказано существование таких решений.

Keywords: анизотропное эллиптическое уравнение, переменный показатель, локальное ренормализованное решение, неограниченная область, единственность решения.

1. Введение

Ренормализованные решения представляют собой ключевой подход к анализу широких классов вырождающихся эллиптических уравнений, правые части которых задаются мерами. Для уравнения с $p-$лапласианом, мерой Радона и поглощением

$$-\Delta_p u\mathrm{p} + |u|^{p_0-1}u = \mu, \quad p \in (1,n), \quad 0 < p-1 < p_0.$$

М.Ф. Бидо-Верон [1] предложила понятие локального ренормализованного решения.

L.M. Kozhevnikova Uniqueness of a local renormalized solution to an anisotropic elliptic equation with variable growth.

Поступила 20 апреля 2026 г., опубликована ? 2026 г.

В работе [1] доказан результат об устойчивости и как следствие в $\mathbb{R}^n$ установлено существование локального ренормализованного решения рассматриваемого уравнения с $\mu \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Вопросы единственности энтропийных и ренормализованных решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными нелинейностям с данными из L_1 или в виде меры в неограниченных областях рассматривались в работах [2], [3]. Л.М. Кожевниковой в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями установлены некоторые свойства и единственность как энтропийных, так и ренормализованных решений задачи Дирихле в произвольных областях. Кроме того, в работе доказана эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений рассматриваемой задачи (см. [2]).

Методом С.Н. Кружкова (удвоения временной переменной) в работе [4] Ф.Х. Мукминов доказал единственность ренормализованного решения первой смешанной задачи для некоторого класса анизотропных эллиптико-параболических уравнений с двойными переменными нелинейностями в неограниченных (по пространственным переменным) цилиндрических областях.

В настоящей работе в произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$, для анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с переменным ростом и локально суммируемой функцией f рассмотривается задача Дирихле

$$-\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, u_{x_i}))_{x_i} + b(\mathrm{x}, u) = f, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0, \quad \mathrm{x} \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Достаточные условия существования локального ренормализованного решения как для изотропного случая (см. [5], [6]), так и для анизотропного (см. [7]) в неограниченных областях найдены Л.М. Кожевниковой. В настоящей работе найдены достаточные условия единственности локального ренормализованного решения задачи (1), (2). Заметим, что ранее вопросы единственности таких решений в неограниченных областях в литературе ранее не рассматривались.

2. Пространства

В этом параграфе будут приведены необходимые сведения из теории пространств с переменными показателями [8]. Пусть $Q \subseteq \Omega$, обозначим Положим $C^+(\overline{Q}) = \{p \in C(\overline{Q}) \mid 1 < \overline{p} \leq \widehat{p} < +\infty\}$, где $\overline{p} = \inf\limits_{\mathrm{x}\in\overline{Q}} p(\mathrm{x})$, $\widehat{p} = \sup\limits_{\mathrm{x}\in\overline{Q}} p(\mathrm{x})$. Пусть $p(\cdot) \in C^+(\overline{Q})$, определим лебегово пространство $L_{p(\cdot)}(Q)$ с переменным показателем как множество измеримых на Q вещественнозначных функций v таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int\limits_Q |v(\mathrm{x})|^{p(\mathrm{x})} d\mathrm{x} < \infty,$$

с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \|v\|_{p(\cdot),Q} = \inf\left\{k > 0 \;\Big|\; \rho_{p(\cdot)}(v/k) \leq 1\right\}.$$

При $\overline{p} > 1$ справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leq |y|^{p(\mathrm{x})} + |z|^{p'(\mathrm{x})}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad p'(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p(\cdot) - 1}, \quad \mathrm{x} \in Q. \tag{3}$$

Известно, что если модуль непрерывности показателя $p(\mathrm{x})$ удовлетворяет условию:

$$|p(\mathrm{x}) - p(\mathrm{y})| \leq -\frac{K}{\ln|\mathrm{x}-\mathrm{y}|}, \quad x, y \in Q, \quad |\mathrm{x}-\mathrm{y}| \leq \frac{1}{2}, \tag{4}$$

где $K > 0$ — константа, то гладкие функции плотны в $\mathring{W}^1_{p(\cdot)}(Q) = \{v \in \mathring{W}^1_1(Q) : \rho_{p(\cdot),Q}(|\nabla v|) < \infty\}$ (см. [9]).

Для двух ограниченных функций $q(\cdot),\ r(\cdot) \in C(\overline{Q})$ будем писать $q(\cdot) < r(\cdot)$, если $\inf\limits_{\mathrm{x}\in\overline{Q}}(r(\mathrm{x}) - q(\mathrm{x})) > 0$.

Обозначим $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), \dots, p_n(\cdot)) \in (C^+(\overline{Q}))^n$ и определим

$$p_+(\mathrm{x}) = \max_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x}), \quad p_-(\mathrm{x}) = \min_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in Q.$$

Также будем использовать обозначения: $\frac{\partial v}{\partial x_i} = v_{x_i},\ i = 1, \dots, n$. Определим анизотропные пространства с переменными показателями Лебега $\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) = \{\mathrm{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n),\ v_i \in L_{p_i(\cdot)}(Q),\ i = 1, \dots, n\}$ с нормой

$$\|\mathrm{v}\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),Q} = \sum_{i=1}^{n} \|v_i\|_{p_i(\cdot),Q}$$

и Соболева $W^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) = \{v \in L_{p_+(\cdot)}(Q),\ \nabla v \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)\}$ с нормой

$$\|v\|^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),Q} = \|v\|_{p_+(\cdot),Q} + \|\nabla v\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),Q}.$$

Пространства $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) = \mathring{W}^1_1(Q) \cap W^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q),\ W^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ являются рефлексивными банаховыми [10].

Определим среднее геометрическое $\underline{p}(\cdot)$ и показатель Соболева $\underline{p}^*(\cdot)$:

$$\underline{p}(\mathrm{x}) = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/p_i(\mathrm{x})\right)^{-1}, \quad \underline{p}^*(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{n\underline{p}(\mathrm{x})}{n-\underline{p}(\mathrm{x})}, & \underline{p}(\mathrm{x}) < n, \\ +\infty, & \underline{p}(\mathrm{x}) \geq n. \end{cases}$$

Далее предполагаем, что функции $p_i, p_0 + 1 \in C^+(\overline{\Omega}),\ i = \overline{1,n},\ \underline{p}(\cdot) < n$ и $p_i,\ i = \overline{1,n}$, удовлетворяют условию (4). Определим $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ как пространства, состоящие из функций v, определенных в Ω, для которых при любой ограниченной $Q \subsetneq \Omega$ имеет место принадлежность $v \in L_\infty(Q),\ L_1(Q),\ \mathring{V}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) = \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) \cap W^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$, соответственно.

Меру Лебега измеримого множества Q будем обозначать $\mathrm{meas}\,(Q)$. Норма Лоренца $\|u\|_{q,\infty,Q}$ (также называемая слабой L_q-нормой) для $0 < q < \infty$ определяется следующим образом:

$$\|v\|_{q,\infty,Q} = \sup_{t>0} t\left(\mathrm{meas}(\{\mathrm{x} \in Q : |v(\mathrm{x})| > t\})\right)^{1/q}.$$

Очевидно, для любого $t > 0$ и $v \in L_{q,\infty}(Q)$ справедливо неравенство

$$t^q\ \mathrm{meas}(\{\mathrm{x} \in Q : |v(\mathrm{x})| > t\}) \leq \|v\|^q_{q,\infty,Q}.$$

3. Предположения и формулировка результата

Условие P. Предполагается, что функции

$$\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{s})=(a_1(\mathrm{x},s_1),\dots,a_n(\mathrm{x},s_n)),\ a_i(\mathrm{x},s_i):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad b(\mathrm{x},s_0):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), каратеодориевы. Пусть существуют положительные числа $\widehat{a},\overline{a},\overline{b}$ такие, что для почти всех $\mathrm{x}\in\Omega,\ s_0,t_0\in\mathbb{R},\ \mathrm{s}=(s_1,s_2,\dots,s_n),\mathrm{t}=(t_1,t_2,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$, справедливы неравенства:

$$0<(a_i(\mathrm{x},s_i)-a_i(\mathrm{x},t_i))(s_i-t_i)\le\widehat{a}|s_i-t_i|^{p_i(\mathrm{x})},\quad s_i\ne t_i,\quad i=1,\dots,n; \tag{5}$$

$$|a_i(\mathrm{x},s_i)|\le\widehat{a}|s_i|^{p_i(\mathrm{x})-1},\quad i=1,\dots,n; \tag{6}$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{s})\cdot\mathrm{s}\ge\overline{a}\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{s}); \tag{7}$$

$$(b(\mathrm{x},s_0)-b(\mathrm{x},t_0))(s_0-t_0)\ge\overline{b}|s_0-t_0|^{p_0(\mathrm{x})+1},\quad p_+(\cdot)-1<p_0(\cdot); \tag{8}$$

$$b(\mathrm{x},s_0)s_0\ge\overline{b}|s_0|^{p_0(\mathrm{x})+1}\ge0. \tag{9}$$

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0\in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, непрерывная неубывающая функция $\widehat{b}:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, такие, что при п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$, для всех $s_0\in\mathbb{R}$, справедливо неравенство:

$$|b(\mathrm{x},s_0)|\le\widehat{b}(|s_0|)\Phi_0(\mathrm{x}). \tag{10}$$

Здесь и ниже используются обозначения $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{s})=\sum\limits_{i=1}^{n}|s_i|^{p_i(\mathrm{x})}$, $\mathrm{s}=(s_1,\dots,s_n)$, $\mathrm{t}=(t_1,\dots,t_n)$.

В качестве модельного уравнения, удовлетворяющего условиям (5)–(10), рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i=1}^{n}(|u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-2}u_{x_i})_{x_i}+\Phi_0|u|^{p_0(\mathrm{x})-1}u=f,\quad p_i(\cdot)\le2,\ i=1,\dots,n,\ p_0>1. \tag{11}$$

Введем обозначения: $q_0(\cdot)=\frac{\underline{p}^*(\cdot)}{\overline{p}'_-}$, $\overline{p}'_-=\frac{\overline{p}_-}{\overline{p}_--1}$, $q_3(\cdot)=\frac{q_0(\cdot)}{p_+(\cdot)-1}$, $q_{2i}(\cdot)=\frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot)+1}p'_i(\cdot)$, $q_{5i}(\cdot)=\frac{p_i(\cdot)(1+p_0(\cdot))}{1+p_0(\cdot)-p_i(\cdot)}$ $i=1,\dots,n$. Пусть выполнено дополнительное условие

$$p_+(\cdot)-1<q_0(\cdot), \tag{12}$$

которое возможно при

$$p_+(\cdot)<\underline{p}^*(\cdot). \tag{13}$$

Тогда можно определить $q'_{2+}(\cdot)=\frac{q_0(\cdot)p_+(\cdot)}{q_0(\cdot)+1-p_+(\cdot)}$.

Определим срезку $T_k(r)=\max(-k,\min(k,r))$. Через $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ обозначим пространство всех липшицевых непрерывных функции на $\mathbb{R}$, производная которых имеет компактный носитель.

Определение 1. *Измеримая конечная почти всюду функция* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *называется локальным ренормализованным решением задачи* (1), (2) *с* $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, *если выполняются следующие условия:*

$a-\mathrm{loc})$ $\quad T_k(u) \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ *при любом* $k > 0$;

$b-\mathrm{loc})$ $\quad b(\mathrm{x}, u) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$;

$c-\mathrm{loc})$ $\quad |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} \in L_{q(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ 1 \le q(\cdot) < q_{2i}(\cdot),\ i = 1, \dots, n$;

$d-\mathrm{loc})$ $\quad |u|^{p_+(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\ 1 \le q(\cdot) < q_3(\cdot)$;

для любой функции $h \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ *и любой* $\varphi \in W^1_{r(\cdot)}(\Omega),\ r(\cdot) > q'_{2+}(\cdot)$, *с компактным носителем в* $\overline{\Omega}$, *таких, что* $\varphi h(u) \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, *справедливо тождество*

$$\langle (b(\mathrm{x}, u) - f)h(u)\varphi \rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot (\nabla u h'(u)\varphi + \nabla\varphi h(u)) \rangle = 0. \tag{14}$$

Здесь и ниже используется обозначение: $\langle v \rangle = \int\limits_{\Omega} v(\mathrm{x})d\mathrm{x}$.

Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (1), (2). Для любого $k > 0$ имеем

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega : |u| \le k\}} \nabla u \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}). \tag{15}$$

Из (15), (6) следует, что для любого $k > 0$

$$\chi_{\{\Omega : |u| \le k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = \chi_{\{\Omega : |u| \le k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u)) \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}'(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}).$$

Определение 2. *Измеримая конечная почти всюду функция* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *называется локальным ренормализованным решением задачи* (1), (2) *с* $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, *если выполняются условия:* a-loc)–d-loc) *и для любой функции* $w \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ *с компактным носителем в* $\overline{\Omega}$ *такой, что выполнены условия*

$$\text{существуют } k > 0, \quad w^{+\infty},\ w^{-\infty} \in W^1_{r(\cdot)}(\Omega),\ r(\cdot) > q'_{2+}(\cdot),$$
$$\begin{cases} w = w^{+\infty} \text{ почти всюду при } u > k, \\ w = w^{-\infty} \text{ почти всюду при } u < -k, \end{cases}$$

справедливо равенство

$$\langle (b(\mathrm{x}, u) - f)w + \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla w \rangle = 0. \tag{16}$$

Эквивалентность определений 1, 2 в случае данных в виде общей меры в изотропном случае доказана в [11], эквивалентность определений 1, 2 устанавливается аналогично.

Пусть $O \in \Omega$, для $r > 0$ положим $\Omega(r) = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |\mathrm{x}| < r\}$.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, *выполнены условия* P *и*

$$\overline{q}_{5-} = \inf_{x \in \Omega} q_{5-}(\cdot) = \inf_{x \in \Omega} \frac{(p_0(\cdot) + 1)p_-(\cdot)}{p_0(\cdot) + 1 - p_-(\cdot)} > n. \tag{17}$$

Пусть u^1, u^2 — *локальные ренормализованные решения задачи* (1), (2), *удовлетворяющие при некотором* $q' > \widehat{q}'_{2+} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} q'_{2+}(\cdot) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \frac{q_0(\cdot)p_+(\cdot)}{q_0(\cdot)+1-p_+(\cdot)}$ *условию*

$$\|u^1 - u^2\|_{q',\infty,\Omega(r)} = o(r), \quad i = 1, 2, \tag{18}$$

тогда $u^1 = u^2$ *для п.в.* $\mathrm{x} \in \Omega$.

В отличие от работы [12], где для анизотропных уравнений второго порядка с переменными показателями и правыми частями $f_i \in L_{p'_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\Omega)$ доказана единственность без условий на бесконечности, а также от её недавнего обобщения [13] на эллиптическо-параболические уравнения высокого порядка, в нашем случае (при $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$) единственность локальных ренормализованных решений требует дополнительного контроля роста разности решений: $\|u^1 - u^2\|_{q',\infty,\Omega(r)} = o(r)$.

4. Вспомогательные утверждения

Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны. Положим $\eta_R(\varrho) = \min(1, \max(0, R + 1 - \varrho))$, $\varrho \in \mathbb{R}^+$.

Очевидно, из условия $d - \mathrm{loc}$) для измеримой функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и любого компакта K следует неравенство

$$\operatorname{meas}(\{K : |u| \geq h\}) \to 0, \quad h \to \infty. \tag{19}$$

Утверждение 1. *Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (1), (2), тогда при всех $k > 0, h \geq 0$ и $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\phi \geq 0$, с компактным носителем в $\overline{\Omega}$ справедливо соотношение*

$$\lim_{h\to\infty} \int\limits_{\{\Omega: h \leq |u| < h+k\}} \phi \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathrm{x} = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$T_{k,h}(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\varrho| < h, \\ \varrho - h \operatorname{sign} \varrho & \text{при } h \leq |\varrho| < k + h, \\ k \operatorname{sign} \varrho & \text{при } |\varrho| \geq k + h. \end{cases}$$

Положив в (14) $h(u) = T_{k,h}(u), \varphi(\mathrm{x}) = \phi(\mathrm{x})$, будем иметь

$$\int\limits_{\{\Omega: h \leq |u| < k+h\}} \phi \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathrm{x} + \int\limits_{\{\Omega: h \leq |u|\}} \phi b(\mathrm{x}, u) T_{k,h}(u) \phi d\mathrm{x} +$$
$$+ \int\limits_{\{\Omega: h \leq |u|\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_{k,h}(u) d\mathrm{x} = \int\limits_{\{\Omega: h \leq |u|\}} T_{k,h}(u) \phi f d\mathrm{x}.$$

Далее, используя (6), (9), выводим

$$\int\limits_{\{\Omega: h \leq |u| < k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u \phi d\mathrm{x} \leq$$
$$\leq k \int\limits_{\{\Omega: |u| \geq h\}} |f| \phi d\mathrm{x} + k\widehat{a} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega: |u| \geq h\}} |\phi_{x_i}| |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} d\mathrm{x}.$$

Учитывая принадлежность $f, |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ и (19), выполняя в последнем неравенстве предельный переход при $h \to \infty$, выводим (20).

□

Утверждение 2. *Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (1), (2), тогда каждого $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\phi \geq 0$, с компактным носителем в $\overline{\Omega}$ справедливо соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \phi \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u) d\mathrm{x} = 0. \tag{21}$$

Доказательство. Зафиксируем $k > 0$, пусть $\sigma > k$. Положим в (14) $h(u) = \eta_\sigma(|u|)T_k(u)$, $\varphi(\mathrm{x}) = \phi(\mathrm{x})$, получим

$$\begin{gathered} J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\eta_\sigma(|u|) \cdot \nabla T_k(u)\phi(\mathrm{x})\rangle + \\ + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\eta'_\sigma(|u|)\mathrm{sign}(u) \cdot \nabla u T_k(u)\phi(\mathrm{x})\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\eta_\sigma(|u|)T_k(u) \cdot \nabla\phi(\mathrm{x})\rangle + \\ + \langle b(\mathrm{x}, u)\eta_\sigma(|u|)T_k(u)\phi(\mathrm{x})\rangle = \langle f\eta_\sigma(|u|)T_k(u)\phi(\mathrm{x})\rangle . \end{gathered} \tag{22}$$

Оценим каждый интеграл. Применяя (7), выводим неравенство

$$J_1 = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\eta_\sigma(|u|) \cdot \nabla T_k(u)\phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \geq \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u)\phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x}, \tag{23}$$

(24)

$$|J_2| \leq \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leq|u|\leq\sigma+1\}} |T_k(u)|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leq k \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leq|u|\leq\sigma+1\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x}.$$

Используя (6), получаем неравенство

$$|J_3| \leq \widehat{a} \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} |T_k(u)||\nabla\phi(\mathrm{x})| d\mathrm{x}. \tag{25}$$

Применяя (9), выводим неравенство

$$J_4 = \int\limits_\Omega b(\mathrm{x}, u)\eta_\sigma(|u|)T_k(u)\phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \geq k\bar{b} \int\limits_{\{\Omega:|u|\geq k\}} |u|^{p_0(\mathrm{x})}\eta_\sigma(|u|)\phi(\mathrm{x}) d\mathrm{x}. \tag{26}$$

Соединяя (22)–(26), устанавливаем неравенство

$$\begin{gathered} k\bar{b} \int\limits_{\{\Omega:|u|\geq k\}} |u|^{p_0(\mathrm{x})}\eta_\sigma(|u|)\phi d\mathrm{x} + \overline{a} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u)\phi d\mathrm{x} \leq \\ \leq \int\limits_\Omega \phi|f||T_k(u)| d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leq|u|<\sigma+1\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u\phi d\mathrm{x} + \\ + \widehat{a} \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} |\nabla\phi||T_k(u)| d\mathrm{x}. \end{gathered}$$

Применяя лемму Фату, перейдем к пределу при $\sigma \to \infty$, учитывая (19), (20), получим неравенство

$$\overline{b} \int\limits_{\{\Omega : |u| \geq k\}} |u|^{p_0(\mathrm{x})} \phi d\mathrm{x} + \frac{\overline{a}}{k} \int\limits_{\{\Omega : |u| < k\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u) \phi d\mathrm{x} \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} \left(|f|\phi + \widehat{a}|\nabla\phi| \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} \right) \frac{|T_k(u)|}{k} d\mathrm{x}.$$

Поскольку $\frac{|T_k(u)|}{k} \leq 1$, $\frac{T_k(u)}{k} \to 0$ п.в. в Ω при $k \to \infty$ и $|f| + \widehat{a} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$, то выполняя предельный переход в последнем неравенстве выводим (21). $\square$

5. Доказательство теоремы единственности

Доказательство теоремы 1. Положим

$$h_\sigma(\varrho) = \eta_1(|\varrho|/\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\varrho| \geq 2\sigma, \\ 1 & \text{при } |\varrho| \leq \sigma, \\ \frac{2\sigma - |\varrho|}{\sigma} & \text{при } \sigma < |\varrho| < 2\sigma. \end{cases}$$

Пусть $\phi \in C^1(\overline{\Omega})$, $\phi \geq 0$, с компактным носителем в $\overline{\Omega}(r)$. Запишем равенство (16) для u^1 и u^2 с $w = h_\sigma(u^1) h_\sigma(u^2) T_k(u^1 - u^2) \phi^\theta \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $\theta > 0$, затем вычтем из первого второе, получим равенство

$$\begin{gathered}
J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 = \left\langle \left(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^1) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^2) \right) \cdot \nabla T_k(u^1 - u^2) h_\sigma(u^1) h_\sigma(u^2) \varphi^\theta \right\rangle + \\
+ \left\langle \left(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^1) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^2) \right) \cdot \nabla u^1 T_k(u^1 - u^2) h'_\sigma(u^1) h_\sigma(u^2) \phi^\theta \right\rangle + \\
+ \left\langle \left(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^1) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^2) \right) \cdot \nabla u^2 T_k(u^1 - u^2) h_\sigma(u^1) h'_\sigma(u^2) \phi^\theta \right\rangle + \\
+ \left\langle \left(b(\mathrm{x}, u^1) - b(\mathrm{x}, u^2) \right) T_k(u^1 - u^2) h_\sigma(u^1) h_\sigma(u^2) \phi^\theta \right\rangle + \\
+\theta \left\langle \left(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^1) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^2) \right) \cdot \nabla\phi \phi^{\theta-1} T_k(u^1 - u^2) h_\sigma(u^1) h_\sigma(u^2) \right\rangle = 0.
\end{gathered} \tag{27}$$

Оценим каждый интеграл, для первого имеем:

$$J_1 = \int\limits_{\{\Omega : |u^1 - u^2| < k\}} \left(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^1) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^2) \right) \cdot \nabla(u^1 - u^2) h_\sigma(u^1) h_\sigma(u^2) \phi^\theta d\mathrm{x}. \tag{28}$$

Учитывая (6), выводим неравенство

$$|J_2| \leq \frac{k}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega : \sigma \leq |u^1| < 2\sigma, |u^2| < 2\sigma\}} \left(|a_i(\mathrm{x}, u^1_{x_i})| + |a_i(\mathrm{x}, u^2_{x_i})| \right) |u^1_{x_i}| \phi^\theta d\mathrm{x} \leq$$

$$\leq \frac{k\widehat{a}}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega : \sigma \leq |u^1| < 2\sigma, |u^2| < 2\sigma\}} (|u^1_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1} + |u^2_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})-1}) |u^1_{x_i}| \phi^\theta d\mathrm{x}.$$

Применяя (3), установим неравенство

$$|J_2| \leq \frac{3k\widehat{a}}{\sigma} \int\limits_{\{\Omega : |u^1| < 2\sigma\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u^1) \phi^\theta d\mathrm{x} + \frac{k\widehat{a}}{\sigma} \int\limits_{\{\Omega : |u^2| < 2\sigma\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u^2) \phi^\theta d\mathrm{x}.$$

Благодаря (21), имеем

$$\lim_{\sigma\to\infty}|J_2|=0. \tag{29}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{\sigma\to\infty}|J_3|=0. \tag{30}$$

Пользуясь условием (8), выводим

$$J_4\geq\overline{b}\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}|u^1-u^2|^{p_0(\mathrm{x})+1}h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\phi^\theta d\mathrm{x}. \tag{31}$$

Оценим интеграл J_5:

$$|J_5|\leq\theta\sum_{i=1}^n\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}\left|a_i(\mathrm{x},u^1_{x_i})-a(\mathrm{x},u^2_{x_i})\right||\phi_{x_i}|\phi^{\theta-1}|u^1-u^2|h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)d\mathrm{x}+$$

$$+\theta k\sum_{i=1}^n\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|\geq k\}}\left|a_i(\mathrm{x},u^1_{x_i})-a_i(\mathrm{x},u^2_{x_i})\right||\phi_{x_i}|\phi^{\theta-1}h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)d\mathrm{x}=J_{51}+J_{52}. \tag{32}$$

Применяя последовательно неравенства (3), (5), выводим

$$\begin{gathered}J_{51}\leq\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}\phi^\theta h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\left|a_i(\mathrm{x},u^1_{x_i})-a(\mathrm{x},u^2_{x_i})\right|^{p_i'(\mathrm{x})}d\mathrm{x}+\\ +C_1(\varepsilon)\sum_{i=1}^n\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}\phi^\theta h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)|u^1-u^2|^{p_i(\mathrm{x})}\left(\frac{|\phi_{x_i}|}{\phi}\right)^{p_i(\mathrm{x})}d\mathrm{x}\leq\\ \leq\varepsilon\sum_{i=1}^n\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}\phi^\theta h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\left|a_i(\mathrm{x},u^1_{x_i})-a_i(\mathrm{x},u^2_{x_i})\right|\left|u^1_{x_i}-u^2_{x_i}\right|d\mathrm{x}+\\ +\varepsilon\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}\phi^\theta h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)|u^1-u^2|^{p_0(\mathrm{x})+1}d\mathrm{x}+\\ +C_2(\varepsilon)\sum_{i=1}^n\int\limits_\Omega\phi^\theta\left(\frac{|\nabla\phi|}{\phi}\right)^{\frac{p_i(\mathrm{x})(p_0(\mathrm{x})+1)}{p_0(\mathrm{x})+1-p_i(\mathrm{x})}}d\mathrm{x}.\end{gathered} \tag{33}$$

Применяя последовательно неравенства (9), (3), (6), для $q>1$ получаем

$$J_{52}\le\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|\ge k\}}\theta\left|u^1_{x_i}-u^2_{x_i}\right|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q}\phi^{\theta}d\mathrm{x}+$$

$$+\theta\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|\ge k\}}\phi^{\theta}k^{q'}\left(\frac{|\phi_{x_i}|}{\phi}\right)^{q'}d\mathrm{x}\le$$

$$\le C_3\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|\ge k\}}\left(|u^1_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q}+|u^2_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q}\right)\phi^{\theta}d\mathrm{x}+ \tag{34}$$

$$+n\theta\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|\ge k\}}\phi^{\theta}k^{q'}\left(\frac{|\nabla\phi|}{\phi}\right)^{q'}d\mathrm{x}.$$

Ввиду справедливости вложения

$$\{\Omega(r):|u^1-u^2|>k\}\subset\{\Omega(r):|u^1|>k\}\cup\{\Omega(r):|u^2|>k\},$$

применяя (19), при фиксированном $r>0$ устанавливаем соотношение

$$\mathrm{meas}(\{\Omega(r):|u^1-u^2|>k\})\to 0,\quad k\to\infty. \tag{35}$$

Возьмем $q'>\widehat{q}'_{2+}$, тогда $q<q_{2i}(\cdot)$. Тогда, применяя (35) и условие $c-\mathrm{loc}$), имеем

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\{\Omega(r):|u^1-u^2|\ge k\}}\sum_{j=1}^{2}|u^j_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q}d\mathrm{x}=0. \tag{36}$$

Соединяя (27), (28), (31)-(34), выбирая $\varepsilon\le\min(1,\overline{b})/2$, переходя к пределу при $\sigma\to\infty$, пользуясь (29), (30), устанавливаем неравенство

$$\frac{\overline{b}}{2}\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}|u^1-u^2|^{p_0(\mathrm{x})+1}\phi^{\theta}d\mathrm{x}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}}\left(\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^1)-\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^2)\right)\cdot\nabla(u^1-u^2)\phi^{\theta}d\mathrm{x}\le$$

$$\le C_3\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|\ge k\}}\left(|u^1_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q}+|u^2_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q}\right)\phi^{\theta}d\mathrm{x}+$$

$$+n\theta\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|\ge k\}}\phi^{\theta}k^{q'}\left(\frac{|\nabla\phi|}{\phi}\right)^{q'}d\mathrm{x}+C_2\int\limits_{\Omega}\phi^{\theta}\left(\frac{|\nabla\phi|}{\phi}\right)^{q_{5i}(\mathrm{x})}d\mathrm{x}. \tag{37}$$

Пусть $r_0>1$ — произвольное положительное число. Зафиксируем $r>r_0$, рассмотрим срезающую функцию $\zeta_r(\mathrm{x})=\frac{1}{r}(r^2-|\mathrm{x}|^2)$ для $|\mathrm{x}|<r$, $\zeta_r(\mathrm{x})=0$ для $|\mathrm{x}|\ge r$. Очевидно, $\zeta_r(\mathrm{x})\ge r-r_0$ при $|\mathrm{x}|\le r_0$, $|\nabla\zeta_r|\le 2$. Впервые такая функция была введена Х. Брезисом в [14].

Полагая в неравенстве (37) $\phi=\zeta_r|_{\Omega}$ и $\theta>\max\{q',\widehat{q}_{5+}\}$, применяя (5), получаем неравенство

$$\left(\frac{r-r_0}{r}\right)^{\theta} \int\limits_{\{\Omega(r_0):|u^1-u^2|<k\}} |u^1-u^2|^{p_0(\mathrm{x})+1} d\mathrm{x} \le$$

$$\le C_4 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega(r):|u^1-u^2|\ge k\}} \left(|u^1_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q} + |u^2_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q}\right) d\mathrm{x}+$$

$$+C_5 \int\limits_{\{\Omega(r):|u^1-u^2|\ge k\}} \left(\frac{k}{r}\right)^{q'} d\mathrm{x} + C_6 r^{n-\overline{q}_{5-}} \le$$

$$\le C_4 \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega(r):|u^1-u^2|\ge k\}} \left(|u^1_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q} + |u^2_{x_i}|^{(p_i(\mathrm{x})-1)q}\right) d\mathrm{x}+$$

$$+C_5 \|u^1-u^2\|^{q'}_{q',\infty,\Omega(r)} r^{-q'} + C_6 r^{n-\overline{q}_{5-}}.$$

Переходя к пределу сначала при $k \to \infty$, затем при $r \to \infty$, пользуясь соотношением (36) и условиями (17), (10), устанавливаем равенство

$$\int\limits_{\Omega(r_0)} |u^1-u^2|^{p_0(\mathrm{x})+1} d\mathrm{x} = 0$$

из которого, ввиду произвольности r_0 следует, что $u^1 = u^2$ п.в. в Ω.

$\square$

6. Анализ результатов

Проанализируем условия теоремы 1 на совместность. Рассмотрим изотропный случай с постоянными показателями: $p_i(\mathrm{x}) = p,\ i = \overline{1,n},\ p \in (1,n)$, $p_0(\mathrm{x}) = p_0,\ p_0+1 > p$. Условия (12), (13) выполняются автоматически. Для модельного уравнения (11) условия (5), (8) справедливы при $p \in (1,2)$ и $p_0 \ge 1$. А условие (17) принимает вид: $p_0 + 1 < \frac{np}{n-p}$.

На рисунках 1,2 изображено множество показателей (p, p_0+1), удовлетворяющих перечисленным условиям при $n = 2$ и $n > 2$, соответственно.

Таким образом, множество рассматриваемых показателей не пусто и при $n = 2$ является наиболее широким.

Условие (18) возникает именно для локальных ренормализованных решений в неограниченных областях и связано с необходимостью контролировать поведение разности на бесконечности. В отличие от глобальных ренормализованных решений или локальных слабых решений, здесь оно неизбежно. В статье не утверждается, что все построенные ранее локальные ренормализованные решения ему удовлетворяют; теорема выделяет подкласс решений, в котором единственность имеет место. Вопрос о том, выполнено ли (18) для решений, построенных в [5]-[7], остаётся открытым и требует дальнейшего исследования.

В отличие от работы [2], где для анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями и правой частью $\mu = f + f_0$ с $f \in L_1(\Omega)$, $f_0 \in L_{p_0'(\cdot)}(\Omega)$ доказана единственность энтропийных и ренормализованных решений без условий на бесконечности, в настоящей статье правая часть предполагается лишь локально суммируемой ($f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$). В этой более общей

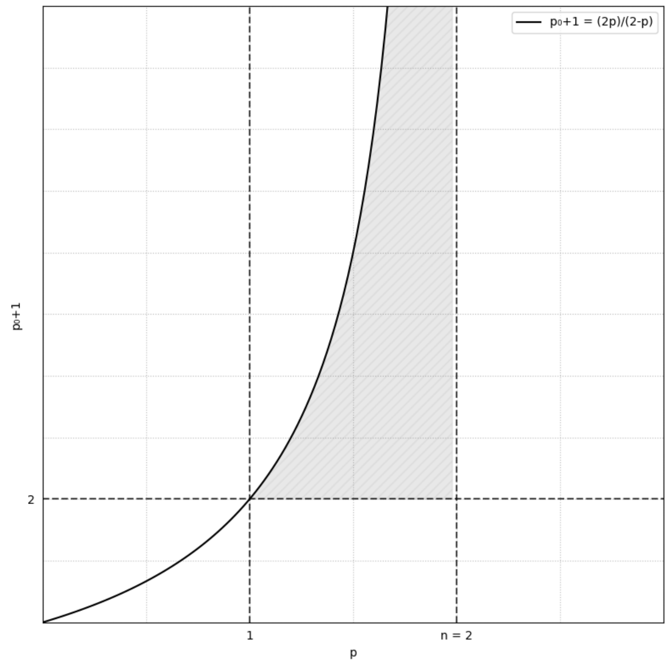

Рис. 1

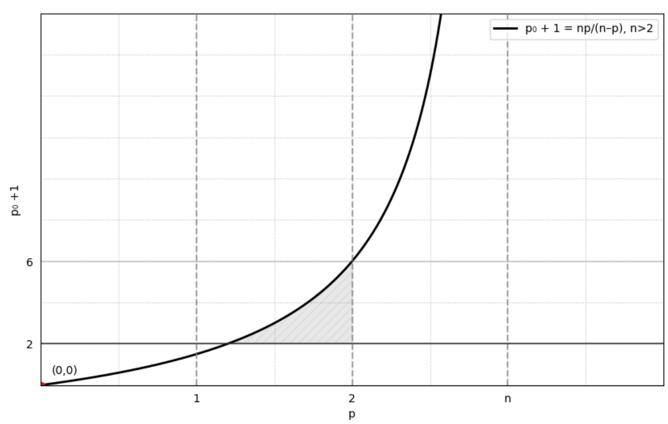

Рис. 2

ситуации единственность локальных ренормализованных решений требует дополнительного контроля роста разности решений: $\|u^1 - u^2\|_{q',\infty,\Omega(r)} = o(r)$ при $r \to \infty$. Таким образом, полученный результат дополняет [2], распространяя его на более слабый класс правых частей ценой появления естественного условия на рост.

Заметим, что теорема 1 справедлива и для $\Omega = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при этом граничное условие (2) опускается. Из условия (18) теоремы 1 имеем:

$$\|u^1 - u^2\|_{q',\infty,B(r)} = o(r), \qquad B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\},$$

где $q' > q'_{2+}$, а $q'_{2+} > n$ в силу свойств показателей. Предположим, что разность решений допускает поточечную оценку

$$|u^1(x) - u^2(x)| \leq C\,|x|^\alpha, \quad \alpha \geq 0, \quad |x| \to \infty.$$

Тогда для шара $B(r)$ справедливо неравенство

$$\|u^1 - u^2\|_{q',\infty,B(r)} \leq C_1 r^{\alpha + n/q'}.$$

Для выполнения условия (18) достаточно, чтобы

$$\alpha + \frac{n}{q'} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1 - \frac{n}{q'}.$$

Поскольку число q' может быть выбрано произвольно, но фиксировано, и $q' > q'_{2+}$, наиболее сильное ограничение возникает при $q' \to q'_{2+}$:

$$\alpha < 1 - \frac{n}{q'_{2+}}.$$

В частности, для решений с поточечной оценкой $|u^i(x)| \leq C|x|^{\alpha_i}$ условие (18) выполняется, если

$$\alpha := \max(\alpha_1, \alpha_2) < 1 - \frac{n}{q'_{2+}}.$$

При $\alpha \geq 1 - n/q'_{2+}$ условие (18) может не выполняться, и тогда теорема 1 не даёт заключения о единственности.

Пример 1. *Рассмотрим $\Omega = \mathbb{R}^3$ $(n = 3)$ и уравнение*

$$-\sum_{i=1}^{3} \bigl(|u_{x_i}|^{p_i - 2} u_{x_i}\bigr)_{x_i} + |u|^{p_0 - 1} u = f(x),$$

с постоянными показателями

$$p_1 = \frac{4}{3}, \qquad p_2 = \frac{3}{2}, \qquad p_3 = \frac{5}{3}, \qquad p_0 = \frac{6}{5},$$

и правой частью $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Проверка условий теоремы 1:

1°. Условия P (5)-(10). Для $a_i(s) = |s|^{p_i - 2} s$ и $b(u) = |u|^{p_0 - 1} u$ все неравенства выполняются с подходящими константами.

2°. Геометрическое среднее и соболевский показатель.

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{p_i} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{121}{60},$$

$$\underline{p} = n\Bigl(\sum \frac{1}{p_i}\Bigr)^{-1} = \frac{180}{121},$$

$$\underline{p}^* = \frac{n\underline{p}}{n - \underline{p}} = \frac{3 \cdot \frac{180}{121}}{3 - \frac{180}{121}} = \frac{180}{61}.$$

3°. Условия (12), (13).

$$p_- = \min(p_1, p_2, p_3) = \frac{4}{3}, \qquad p'_- = \frac{p_-}{p_- - 1} = \frac{4/3}{1/3} = 4,$$

$$q_0 = \frac{\underline{p}^*}{p'_-} = \frac{180/61}{4} = \frac{45}{61}.$$

$$p_+ = \max(p_i) = \frac{5}{3}, \quad p_+ - 1 = \frac{2}{3}, \qquad \frac{2}{3} = \frac{122}{183}, \quad q_0 = \frac{45}{61} = \frac{135}{183},$$

$$p_+ - 1 < q_0 \quad \text{– (12) выполнено.}$$

$$p_+ = \frac{5}{3} < \underline{p}^* = \frac{180}{61} \quad \text{– (13) выполнено.}$$

4°. Условие (17).

$$\bar{q}_{5-} = \frac{(p_0+1)p_-}{p_0+1-p_-} = \frac{\left(\frac{6}{5}+1\right)\cdot\frac{4}{3}}{\frac{6}{5}+1-\frac{4}{3}} = \frac{44}{13} > 3.$$

5°. Условие (18) (оценка роста разности). Вычислим q'_{2+}:

$$q'_{2+} = \frac{q_0\, p_+}{q_0+1-p_+} = \frac{\frac{45}{61}\cdot\frac{5}{3}}{\frac{45}{61}+1-\frac{5}{3}} = \frac{225}{13}.$$

Положим, например, $q' = 18$. Так как $18 > \dfrac{225}{13}$, условие $q' > q'_{2+}$ выполнено. Пусть u^1, u^2 — два локальных ренормализованных решения, для которых разность $v = u^1 - u^2$ при $|x| \to \infty$ удовлетворяет поточечной оценке $|v(x)| \le C|x|^\alpha$ с $\alpha < \dfrac{5}{6}$. Тогда для любого $r > 0$

$$\|v\|_{q',\infty,\Omega(r)} \le C_1 r^{\alpha+3/q'} = C_1 r^{\alpha+1/6}.$$

Поскольку $\alpha + 1/6 < 1$, получаем $\|v\|_{q',\infty,\Omega(r)} = o(r)$. Следовательно, условие (18) выполнено для этого q'.

Все условия теоремы 1 выполнены. Таким образом, для любой пары решений с указанным ограничением на рост разности теорема 1 гарантирует $u^1 = u^2$. Следовательно, для данного уравнения локальное ренормализованное решение единственно в классе функций, удовлетворяющих (18). Приведённый пример демонстрирует, что при $n = 3$ существует непустое множество точных рациональных показателей, для которых теорема применима.

References

[1] M.F. Bidaut-Véron, *Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data*, Adv. Nonlinear Stud., **3** (2003), 25–63. doi/10.1515/ans-2003-0102/html

[2] L.M. Kozhevnikova, *Equivalence of Entropy and Renormalized Solutions of Anisotropic Elliptic Problem in Unbounded Domains with Measure Data*, Russian Mathematics, **64**:1 (2020), 25-39. DOI: https://doi.org/10.3103/S1066369X20010041

[3] L.M. Kozhevnikova, *On Entropy Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Nonlinearity Indices in Unbounded Domains*, Journal of Mathematical Sciences (United States), **253**:5 (2021), 692–709. DOI 10.1007/s10958-021-05262-0

[4] F.Kh. Mukminov, *Uniqueness of the renormalized solution of an elliptic-parabolic problem in anisotropic Sobolev-Orlicz spaces*, Sbornik: Mathematics, **208**:8 (2017), 1187-1206. DOI: https://doi.org/10.1070/SM8691

[5] L.M. Kozhevnikova, *Local renormalized solutions to elliptic equations with variable exponents in an unbounded domain*, J. Math. Sci., **293**:4 (2025), 555–576. https://doi.org/10.1007/s10958-025-08025-3

[6] L.M. Kozhevnikova, *Existence of a local renormalized solution of an elliptic equation with variable exponents in Rn*, Vladikavkaz Mathematical Journal, **27**:2 (2025), 52–71. https://doi.org/10.46698/j2148-7740-8991-e

[7] L.M. Kozhevnikova, *Local Renormalized Solution of Anisotropic Elliptic Equation with Variable Exponents in Nonlinearities in* R^n, Lobachevskii J. Math, **46**:7 (2025), 3162–3181. https://doi.org/10.1134/S199508022560863X

[8] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Heidelberg Springer, Berlin, 2011. MR2790542

[9] V.V. Zhikov, *On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions*, J. Math. Sci., **173** (2011), 463–570. https://doi.org/10.1007/s10958-011-0260-7

[10] X. Fan, *Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and* $p(x)$*-Laplacian equations*, Complex Variables and Elliptic Equations, **56:** 7-9 (2011), 623–642. DOI: 10.1080/1747693100728412.

[11] L.M. Kozhevnikova, *Renormalized solutions of elliptic equations with variable exponents and general measure data*, Sb. Math., **211:**12 (2020), 1737–1776. DOI: https://doi.org/10.1070/SM9371

[12] M. Bokalo, O. Domanska, *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces*, Mathematychni Studii, **28:**1 (2007), 77–91. DOI:10.30970/ms.28.1.77-91

[13] M.M. Bokalo, O.V. Domanska, *Initial-boundary value problem for higher-orders nonlinear elliptic-parabolic equations with variable exponents of the nonlinearity in unbounded domains without conditions at infinity*, Matematychni Studii, **59:**1 (2023), 86–105. https://doi.org/10.30970/ms.59.1.86-105

[14] H. Brezis, *Semilinear equations in* R^N *without condition at infinity*, Appl. Math. Optim., **12** (1984), 271–282. https://doi.org/10.1007/BF01449045

Larisa Mikhailovna Kozhevnikova
Sterlitamak branch of the Ufa University of Science and Technology,
Pr. Lenin, 37,
453103, Sterlitamak, Russia