S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023)
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.???

УДК 510.67:512.57
MSC 03C60

СЕМАНТИЧЕСКИЕ И СИНТАКСИЧЕСКИЕ СТЕПЕНИ ЖЕСТКОСТИ УНАРОВ 2

И.А. Сахаров, А.А. Степанова

Представлено И.П. Петровым

Abstract:

A structure with trivial group of automorphisms is called rigid. The closeness of a structure to rigid one is described using the concept of semantic rigidity. The similar concept of syntactic rigidity of a structure measures the closeness of a given structure to a structure that is the definable closure of an empty set.

In this paper we study all possible values of quadruples of unar rigidity. This paper is a continuation of the paper, which described all possible pairs of $\exists$-syntactic and $\exists$-semantic rigidity of unars, as well as $\forall$-syntactic and $\forall$-semantic rigidity of unars.

Keywords: semantic rigidity, syntactic rigidity, degree of rigidity, unar.

Введение

Структура с тривиальной группой автоморфизмов называется жесткой. Близость структуры к жесткой описывается с помощью понятия семантической жесткости, которое было рассмотрено в работах [1, 2, 3].

Sakharov, I.A., Stepanova, A.A. Semantic and syntactic degrees of rigidity of unars 2.

© 2025 Сахаров И.А., Степанова А.А..

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-02-2026-1312 от 20.02.2026).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

В этих же работах изучается понятие синтаксической жесткости структуры, которое показывает близость данной структуры к структуре, являющейся определимым замыканием пустого множества.

В данной работе рассмотрены все возможные четверки степеней жесткостей унаров. Эта работа является продолжением работы [4], в которой описаны все возможные пары ∃-синтаксической и ∃-семантической жесткости унаров, а также ∀-синтаксической и ∀-семантической жесткости унаров.

1 Предварительные сведения

Используемые в работе понятия из теории унаров и теории моделей можно найти в работах [4]. Для структуры $\mathcal{M}$ введём обозначение (см. [1]):

$$deg_4(\mathcal{M}) = \left(deg_{rig}^{\exists-sem}\left(\mathcal{M}\right), deg_{rig}^{\exists-sem}\left(\mathcal{M}\right), deg_{rig}^{\forall-sem}\left(\mathcal{M}\right), deg_{rig}^{\forall-synt}\left(\mathcal{M}\right)\right).$$

Предложение 1. [1] *Для любой структуры $\mathcal{M}$ и любого $Q \in \{\forall, \exists\}$*

$$deg_{rig}^{Q-sem}\left(\mathcal{M}\right) \leq deg_{rig}^{Q-synt}\left(\mathcal{M}\right).$$

Предложение 2. [1] *Для любой структуры $\mathcal{M}$ и любого $s \in \{sem, synt\}$*

$$deg_{rig}^{\exists-s}\left(\mathcal{M}\right) \leq deg_{rig}^{\forall-s}\left(\mathcal{M}\right).$$

Предложение 3. [4, 5] *Если $\mathcal{M}$ — конечная структура конечного языка, то $deg_{rig}^{Q-sem}(\mathcal{M}) = deg_{rig}^{Q-synt}(\mathcal{M})$, где $Q \in \{\forall, \exists\}$.*

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 4. *Для структуры $\mathcal{M}$*
1) $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M}) = 0 \iff deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M}) = 0$;
2) $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{M}) = 1 \implies deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{M}) = 1$;
3) $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M}) = 0 \iff deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M}) = 0$;
4) $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{M}) = 1 \implies deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{M}) = 1$.

Предложение 5. [4] *Пусть $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар, $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \neq 0$, $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$. Тогда $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A})$.*

Предложение 6. [4] *Если унар $\mathcal{A}$ связный и содержит полуцепь, то*

$$deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}), deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \in \{0, 1, \infty\}.$$

Предложение 7. [4] *Если унар $\mathcal{A}$ является копроизведением двух бесконечных унаров, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}), deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \in \{0, 1, \infty\}$. Причем если $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$ ($deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = 1$), то $\mathcal{A}$ — копроизведение двух изоморфных связных унаров $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ таких, что $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{B}_2) = 0$ ($deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_1) = deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{B}_2) = 0$).*

Теорема 1. [4]

1) Для любого $u \in \omega \cup \{\infty\}$ *существуют унары* $\mathcal{A}_u, \mathcal{B}_u, \mathcal{C}_u$ *такие, что* $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_u) = (u, u)$, $deg_2^{\forall}(\mathcal{B}_u) = (u, \infty)$ *и* $deg_2^{\forall}(\mathcal{C}_u) = (0, u)$.

2) Для любого унара $\mathcal{A}$ *выполняется свойство (*):*

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(u, \infty) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

2 Основной результат

Лемма 1. *Если* $\mathcal{A}$ *— бесконечный связный унар и* $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \geq 1$, *то* $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 1$, *причём если* $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A})$, *то* $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 1$; *если* $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = \infty$, *то* $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = \infty$ *или* $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) \in 2\omega$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар и $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \geq 1$. Следующие рассуждения частично повторяют рассуждения, приведённые в доказательстве леммы 1 из [4]. Для элементов унара $\mathcal{A}$ введем отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом:

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists \varphi \in Aut(\mathcal{A})\colon \varphi(a) = b.$$

Рассмотрим три случая.

1. Существуют $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b, a \sim b, fa = fb$. Введём обозначения: $E_{a,b} = \mathcal{A} \setminus (\langle a \rangle_- \cup \langle b \rangle_-)$ и $E = \{E_{a,b} \mid a, b \in \mathcal{A}, a \sim b, a \neq b, fa = fb\}$. Зафиксируем $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что $|E_{a,b}| = max\{\ |e| \mid e\ \in E\}$. Нетрудно понять, что $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = |E_{a,b}| + 1$. Множество $E_{a,b}$ конечно, поскольку $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) \neq \infty$. Следовательно, множество $\langle a \rangle_- \cup \langle b \rangle_-$ бесконечно. Из выбора элементов a, b следует, что в $E_{a,b}$ нет различных элементов c, d таких, что $fc = fd$ и $c \sim d$. Ясно, что существует единственный нетривиальный автоморфизм унара $\mathcal{A}$, а именно, автоморфизм, переводящий a в b, т.е. $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 1$. Заметим, что все элементы из $E_{a,b}$ формульные. Если $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$, то $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 1$. Предположим, что $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = \infty$. Рассмотрим частичный подунар $\langle a \rangle_-$. Доопределим действие операции f на нём следующим образом: $fa = a$. Полученный унар обозначим $\bar{\mathcal{A}}$. Если $deg_{rig}^{\exists-synt}(\bar{\mathcal{A}}) = \infty$, то $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = \infty$; если $deg_{rig}^{\exists-synt}(\bar{\mathcal{A}}) = v \in \omega$, то $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 2v$.

2. Существуют $a, b \in \mathcal{A}, a \neq b, a \sim b, fa \neq fb, fa, fb \in \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ — цикл в $\mathcal{A}$. Этот случай аналогичен случаю 1.

3. Предположим, что случаи 1, 2 не выполняются и существуют $a, b \in \mathcal{A}$ такие, что $a \neq b, a \sim b, f^n a = f^m b$ для некоторых различных $n, m \in \omega$. Тогда в $\mathcal{A}$ есть цепь $\mathcal{C}$. По предложению 6 $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$. Тогда по предложению 4 $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 1$. Ясно, что $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) \neq \infty$. Следовательно, по предложениям 6 и 2 $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}) = 1$ и по предложению 4 $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 1$. □

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A}$ унар. Если $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (v, v)$, $v \in \omega$, то существует $u \leq v$ такое, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u, u)$.*

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ конечный, то по предложению 3 $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A})$.

Пусть $\mathcal{A}$ бесконечный связный. Можно считать, что $v > 0$. Тогда по лемме 1 $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}) = 1$.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$. Предположим, что $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — бесконечные унары. По лемме 7 $v \in \{0, 1, \infty\}$. По условию $v \neq \infty$. Тогда $v \in \{0, 1\}$ и по предложению 4 $u = v$. Предположим, что $\mathcal{A}_1$ конечный, $\mathcal{A}_2$ бесконечный. Можно считать, что $\mathcal{A}_2$ — бесконечный связный унар. Тогда по доказанному выше $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}_2) = deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_2)$. Следовательно, по предложению 3 $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A})$. □

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{A}$ унар. Если $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (0, v)$, $v \geq 1$, то $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (0, 1)$.*

Доказательство. Из предложения 1 следует, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (0, u)$, $u \leq v$.

Предпложим, что $\mathcal{A}$ — бесконечный связный унар. Если в $\mathcal{A}$ есть полуцепь, то по предложениям 6, 4 $v = 1$ и $u = 1$. Покажем, что в унаре $\mathcal{A}$ нет цикла. Пусть $\mathcal{C}$ — цикл в $\mathcal{A}$. Поскольку $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 0$, все элементы $\mathcal{C}$ формульные. Индукцией по $k \in \omega$ покажем, что любой элемент $\mathcal{A}$ глубины k является формульным. Пусть $t(b) = k$ и b — формульный элемент. Если у b число прообразов конечно, то, поскольку $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}) = 0$, все эти прообразы формульные. Предположим, что число прообразов b бесконечно и $c_1, c_2, \ldots$ — различные прообразы b. Тогда существует формула $\Phi(x, y_1, \ldots, y_v)$, такая, что $\Phi(A, c_1, \ldots, c_v) = \{c_{v+1}\}$. Пусть формула $\Psi(x, z)$ получается из формулы $\Phi(x, y_1, \ldots, y_v)$ заменой термов fy_i на z и подформул $f^n u = f^m y_i$ на $f^{n+1} u = f^m z$. Ясно, что $\{c_{v+1}\} = \Psi(A, b)$. Следовательно, $v = 0$. Получаем противоречие.

Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$. Если $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ бесконечные, то по предложению 7 $v = 1$. Тогда по предложению 4 $u = 1$. Пусть $\mathcal{A}_1$ бесконечный связный, а $\mathcal{A}_2$ конечный. По доказанному выше $deg_4(\mathcal{A}_1) = (0, 1, 0, 1)$. По предложению 3 $deg_4(\mathcal{A}_2) = (0, 0, 0, 0)$. Тогда $deg_4(\mathcal{A}) = (0, 1, 0, 1 + |\mathcal{A}_2|)$, то есть $u = 1$. □

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{A}$ унар. Если $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (v, \infty)$, $v \geq 1$, то $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (1, k)$, где $k \in 2\omega \backslash \{0\} \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. Пусть $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (v, \infty)$, $v \geq 1$ и $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (u_1, u_2)$. По предложению 3 $\mathcal{A}$ — бесконечный унар.

Предположим, что $\mathcal{A}$ связный. Тогда по лемме 1 и предложению 4 $u_2 = \infty$ или $u_2 \in 2\omega \backslash \{0\}$, а $u_1 = 1$.

Предположим, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ бесконечные. Тогда по предложению 7 $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}) = 1$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ изоморфные и $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}_1) = deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}_2) = 0$. По предложению 4 $u_1 = 1$. Заметим, что так как

$deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A})=\infty$, то $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}_1)=deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}_2)\neq 0$. По предложению 4 $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_1)=deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_2)>0$. Тогда $u_2=2deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_1)$, если $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_1)\neq\infty$, и $u_2=\infty$, если $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_1)=\infty$.

Предположим, что $\mathcal{A}=\mathcal{A}_1\sqcup\mathcal{A}_2$, где $\mathcal{A}_1$ бесконечный, $\mathcal{A}_2$ конечный. Можно считать, что $\mathcal{A}_1$ связный. Так как $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A})=v\in\omega$, то $deg_{rig}^{\forall-sem}(\mathcal{A}_2)=0$ и по предложению 3 $deg_{rig}^{\forall-synt}(\mathcal{A}_2)=0$. Следовательно, $deg_{rig}^{\exists-sem}(\mathcal{A}_2)=0$ и $deg_{rig}^{\exists-synt}(\mathcal{A}_2)=0$. Тогда $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}_1)=(v,\infty)$ и по доказанному выше $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}_1)=(1,k)$, где $k\in 2\omega\backslash\{0\}\cup\{\infty\}$. Ясно, что $deg_2^{\exists}(\mathcal{A})=deg_2^{\exists}(\mathcal{A}_1)$. $\square$

Построим несколько унаров и семейств унаров, которые понадобятся для доказательства основного результата.

Определим семейство унаров $\mathcal{P}_i$ $(i\in\omega\cup\{\infty\})$. В унаре $\mathcal{P}_0$ существуют различные элементы $c,a\in\mathcal{P}_0$, удовлетворяющие условиям: $fc=c, fa=c$, для любого $i\in\omega$ элемент a имеет ровно один хвост длины i, и, кроме того, a имеет один бесконечный хвост; других элементов в $\mathcal{P}_0$ нет. Унар $\mathcal{P}'_i$, $i\in\omega\backslash\{0\}\cup\{\infty\}$ получается из унара $\mathcal{P}_0$ добавлением хвоста длины i к элементу c, если $i\in\omega$, или бесконечого хвоста, если $i=\infty$. Полагаем $\mathcal{P}_i=\coprod\limits_{j\leq i}\mathcal{P}'_i$.

Определим семейство унаров $\mathcal{Q}_i$ $(i\in\omega\cup\{\infty\})$ следующим образом: в унаре $\mathcal{Q}_i$ есть петля, которая имеет $i+1$ хвост длины 1, если $i\in\omega$, или ω хвостов длины 1, если $i=\infty$; других элементов в $\mathcal{Q}_i$ нет.

Определим семейство унаров $\mathcal{R}_i$ $(i\in\omega\cup\{\infty\})$ следующим образом: $\mathcal{R}_0$ — петля, при $i\in\omega$ унар $\mathcal{R}_i$ — петля с единственным хвостом длины i, унар $\mathcal{R}_\infty$ — петля с единственным бесконечным хвостом.

Определим семейство унаров $\mathcal{S}_{i,j}$ $(i,j\in\omega\cup\{\infty\}, i\leq j)$ следующим образом: $\mathcal{S}_{i,j}=\mathcal{Q}_i\sqcup\mathcal{P}_{j-i}$.

Определим семейство унаров $\mathcal{T}_i$ $(i\in\omega\cup\{\infty\})$. Поалагем $\mathcal{T}_0=\mathcal{P}_0$ и $\mathcal{T}_1=\mathcal{T}_0\sqcup\mathcal{T}_0$. Для $u\in\omega, u\geq 2$, унар $\mathcal{T}'_u$ определим следующим образом: $\mathcal{T}'_u=\{c_i\mid 0\leq i\leq u-2\}\cup\{a_1,a_2\}, fc_0=c_0, fc_i=fc_{i-1}$ при $i>0$, $fa_1=fa_2=c_{u-2}, |\mathcal{T}'_u|=u+1$. Унар $\mathcal{T}_u$ получается из унара $\mathcal{T}'_u$ добавлением к элементам a_1,a_2 ровно по одному хвосту длины l для любого $l\in\omega$ и одному бесконечному хвосту.

Определим семейство унаров $\mathcal{U}_i$ $(i\in\omega\{0\}\cup\{\infty\})$. Сначала определим частичные унары $\mathcal{V}_n$ и элементы $v_n\in\mathcal{V}_n$, $n\in\omega$, так, что f определена на множестве $\mathcal{V}_n\backslash\{v_n\}$. Пусть

$$\mathcal{V}_0=\{v_0,s_1^0\},$$

где $fs_1^0=v_0$. Предположим, что частичный унар $\mathcal{V}_{n-1}$ и элемент v_{n-1} определены, $\mathcal{V}_{n-1}^1$ — копия $\mathcal{V}_{n-1}$, элемент $v_{n-1}^1\in\mathcal{V}_{n-1}^1$ — копия $v_{n-1}\in\mathcal{V}_{n-1}$. Частичный унар $\mathcal{V}_n$ определяем следующим образом:

$$\mathcal{V}_n=\{v_n,s_1^n,s_2^n,\ldots,s_n^n\}\cup\mathcal{V}_{n-1}\cup\mathcal{V}_{n-1}^1,$$

$fs_1^n = v_n, fs_i^n = s_{i-1}^n$ $(2 \le i \le n), fv_{n-1} = v_n, fv_{n-1}^1 = s_n^n$. Полагаем

$$\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{V}_n.$$

Ясно, что $\mathcal{V}$ — унар. Полагаем $\mathcal{U}_1 = \mathcal{V}$, $\mathcal{U}_2$ — копроизведение $\mathcal{V}$ и петли, $\mathcal{U}_i = \mathcal{V} \coprod \mathcal{R}_{i-2}$ для $i \ge 3$.

Определим семейство унаров $\mathcal{W}_{i,j}$ $(i \in \omega \cup \{\infty\}, j \in \omega \backslash \{0\})$. Пусть $\mathcal{W}_{0,j} = \mathcal{T}_j$. Для $i > 0$ положим w_k^1, w_k^2 — различные листья унара $\mathcal{T}_j, 1 \le k \le i$, такие, что $f^k w_k^1 = a_1, f^k w_k^2 = a_2$. Тогда $\mathcal{W}_{i,j}$ получается из $\mathcal{T}_j$ добавлением ко всем w_k^1, w_k^2 по одному хвосту длины l для всех $l \in \omega$ и по одному бесконечному хвосту.

Теорема 2. *Определим множество $D_4 \subset (\omega \cup \{\infty\})^4$ следующим образом:*

$$D_4 = \{(u_1, u_1, v_1, v_1) \mid u_1, v_1 \in \omega, u_1 \le v_1\} \cup$$
$$\cup \{(u_1, u_2, \infty, \infty) \mid u_1, u_2 \in \omega \cup \{\infty\}, u_1 \le u_2\} \cup$$
$$\cup \{(1, u_2, v_1, \infty) \mid u_2 \in 2\omega \backslash \{0\}, v_1 \in \omega \backslash \{0\}\} \cup$$
$$\cup \{(0, u_2, 0, \infty) \mid u_2 \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup$$
$$\cup \{(0, 1, 0, v_2) \mid v_2 \in \omega \backslash \{0\}\}.$$

Тогда

1) для любого $d_4 \in D_4$ существует унар $\mathcal{A}$ такой, что $deg_4(\mathcal{A}) = d_4$;

2) для любого унара $\mathcal{A}$ $deg_4(\mathcal{A}) \in D_4$.

Доказательство.

1) Пусть $d_4 \in \{(u_1, u_1, v_1, v_1) \mid u_1, v_1 \in \omega, u_1 \le v_1\}$. Если $u_1 = v_1$, то в качестве $\mathcal{A}$ возьмём копроизведение $u_1 + 1$ петли. Рассмотрим случаи, когда $u_1 < v_1$. Если $u_1 = 0, v_1 = 1$, то $\mathcal{A} = \mathcal{V}$; если $u_1 = 0, v_1 > 1$, то в качестве $\mathcal{A}$ возьмём копроизведение $\mathcal{V}$ и петли с единственным хвостом длины $v_1 - 1$. Если $u_1 \ge 1, v_1 = u_1 + 1$, то в качестве $\mathcal{A}$ возьмём петлю с $u_1 + 1$ хвостом длины 1; если $v_1 = u_1 + k$, где $k > 1$, то в качестве $\mathcal{A}$ возьмём копроизведение $u_1 + 1$ петли и петли с хвостом длины $k - 1$.

Пусть $d_4 \in \{(u_1, u_2, \infty, \infty) \mid u_1, u_2 \in \omega \cup \{\infty\}, u_1 \le u_2\}$. Тогда в качестве $\mathcal{A}$ возьмём унар $\mathcal{S}_{u_1, u_2}$.

Пусть $d_4 \in \{(1, u_2, v_1, \infty) \mid u_2 \in 2\omega \backslash \{0\}, v_1 \in \omega \backslash \{0\}\}$. Тогда в качестве $\mathcal{A}$ возьмём унар $\mathcal{W}_{(u_2-2)/2, v_1}$.

Пусть $d_4 \in \{(0, u_2, 0, \infty) \mid u_2 \in \omega \cup \{\infty\}\}$. Тогда в качестве $\mathcal{A}$ возьмём унар $\mathcal{P}_{u_2}$.

Пусть $d_4 \in \{(0, 1, 0, v_2) \mid v_2 \in \omega \backslash \{0\}\}$. Тогда в качестве $\mathcal{A}$ возьмём унар $\mathcal{U}_{v_2}$.

2) По теореме 1

$$deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) \in \{(u, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(u, \infty) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\} \cup \{(0, u) \mid u \in \omega \cup \{\infty\}\}.$$

Если $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (u, u), u \in \omega$, то по лемме 2 $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (v, v), v \le u$.

Пусть $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (u, \infty), u \in \omega$. Если $u \neq 0$, то по лемме 4 $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (1, v), v \in 2\omega \backslash \{0\} \cup \{\infty\}$; если $u = 0$, то по предложениям 1, 2 $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (0, v), v \in \omega \cup \{\infty\}$.

Пусть $deg_2^{\forall}(\mathcal{A}) = (0, u), u \in \omega \cup \{\infty\}$. Если $u \in \omega \backslash \{0\}$, то по лемме 3 $deg_2^{\exists}(\mathcal{A}) = (0, 1)$. Случаи, когда $u \in \{0, \infty\}$, рассмотрены выше. $\square$

References

[1] S.V. Sudoplatov, *Variations of Rigidity*, The Bulletin of Irkutsk State University, Series Mathematics, **47** (2024), 119–136.

[2] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of Rigidity for Ordered Theories*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **48** (2024), 129–144.

[3] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Variations of rigidity for models of weakly o-minimal theories*, Lobachevskii Journal of Mathematics, **45**:11 (2024), 5837–5844.

[4] Сахаров И.А., Степанова А.А. Семантические и синтаксические степени жесткости унаров. Сибирский электронный математический журнал (принято в печать).

[5] B.Sh. Kulpeshov, S.V. Sudoplatov, *Almost quasi-Urbanik structures and theories*, Bulletin of the Karaganda University, Mathematics Series, **117**:1 (2025), 104–117.

Igor Aleksandrovich Sakharov
Far Eastern Federal University,
10 Ajax Bay, Russky Island,
690922, Vladivostok, Russia
Email address: sakharov.ial@dvfu.ru

Alena Andreevna Stepanova
Far Eastern Federal University,
10 Ajax Bay, Russky Island,
690922, Vladivostok, Russia
Email address: stepltd@mail.ru