S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 519.853
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 90C26

Методы DC оптимизации для задачи взвешенной 3-раскраски графа

Г.А. ЖУКОВ,
А.В. ОРЛОВ

ПРЕДСТАВЛЕНО П.П. ПЕТРОВЫМ

Abstract: The paper addresses the problem of finding a vertex 3-coloring of an edge-weighted graph that minimizes the sum of weights of edges connecting vertices of the same color. The problem is formulated as a continuous DC optimization problem, which allows applying the relevant mathematical framework. To solve the continuous problem, specialized local and global search algorithms have been implemented. In the computational experiment, a comparative analysis was conducted between the developed approach and two reference methods: a greedy algorithm and the Variable Neighborhood Descent (VND) method. The obtained results confirm the applicability of DC optimization techniques for solving the weighted 3-coloring problem and reveal promising areas for further research.

Keywords: Minimum 3-Partition, 3-coloring, DC optimization, local search, global search, computational experiment.

Zhukov, G.A., Orlov, A.V., DC optimization methods for the weighted graph 3-coloring problem .

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

1 Введение

Задачи раскраски графов являются классическими в комбинаторной оптимизации. Одна из фундаментальных проблем в этой области заключается в определении хроматического числа $\chi(G)$ — минимального количества цветов, необходимого для правильной раскраски вершин графа (раскраски, при которой смежные вершины имеют разные цвета). Данная задача входит в известный список 21 NP-полной задачи Карпа [1].

Теоретический базис оценок хроматического числа опирается на ряд классических результатов. Теорема Брукса [2] устанавливает верхнюю границу $\chi(G) \leq \Delta(G)$ через максимальную степень вершины (для связных графов, отличных от полных графов и нечётных циклов). В [3] показано существование графов с произвольно большим хроматическим числом при отсутствии больших клик. В поисках новых подходов исследователи обратились к методам, далёким от традиционной комбинаторики. Так, в [4] продемонстрирована эффективность использования аппарата алгебраической топологии для получения нижних оценок $\chi(G)$, что заложило основы топологической комбинаторики.

Среди частных случаев задачи о хроматическом числе особое место занимает задача 3-раскрашиваемости (3-Coloring), заключающаяся в проверке существования правильной раскраски вершин графа в 3 цвета. Несмотря на фиксированное число цветов, задача остаётся NP-полной даже для планарных графов с максимальной степенью вершин 4 [5]. Более того, как показано в [6], NP-полнота сохраняется и для планарных 4-регулярных графов.

В данной работе исследуется оптимизационный вариант проблемы 3-раскрашиваемости — задача взвешенной 3-раскраски (в англоязычной литературе известная как Minimum 3-Partition [7]). Она состоит в нахождении раскраски вершин графа в три цвета, при которой суммарный вес рёбер, соединяющих вершины одного цвета, минимален.

Известно, что дискретные задачи допускают непрерывную формулировку [8, разд. 3.3][9]. В настоящем исследовании предлагается осуществить переход от исходной дискретной постановки задачи взвешенной 3-раскраски к непрерывному аналогу с последующим применением аппарата DC оптимизации, точнее Теории глобального поиска (ТГП), разработанной А. С. Стрекаловским [9, 10].

Центральную роль в ней играют конструктивные условия глобальной оптимальности (УГО). Они позволяют сводить исходную невыпуклую проблему к семейству выпуклых задач, для решения которых применимы современные программные комплексы (например, *CPLEX*, *Gurobi* и т.д.). Конструктивность УГО лежит в основе стратегии глобального поиска, которая объединяет процедуры локального поиска с методами выхода из локальных экстремумов. В последние годы удалось распространить теорию на общие задачи DC оптимизации с невыпуклыми ограничениями типа равенства и неравенства [11, 12]. Ключевыми особенностями новых результатов являются применение теории точного штрафа и динамическое изменение параметра штрафа в процессе счёта.

Практическая эффективность ТГП подтверждена на широком спектре задач. В работах [13, 14, 15] теория успешно применена к различным двухуровневым задачам. В исследовании [10] рассматриваются линейная задача о дополнительности, поиск равновесий Нэша в биматричных играх и квадратично-линейные двухуровневые задачи. Применению подхода к полиматричным играм посвящена, например, работа [16].

Особый интерес в контексте настоящего исследования представляют результаты, полученные с помощью ТГП для дискретной задачи о максимальной (взвешенной) клике [17, 18]. В указанных работах эта изначально комбинаторная NP-трудная задача на графе сформулирована и исследована как задача DC оптимизации. Применение специализированного локального поиска, учитывающего структуру задачи, в рамках общей схемы глобального поиска, позволило достичь здесь высокой вычислительной эффективности. Успешный опыт решения задачи о клике служит непосредственным обоснованием целесообразности применения ТГП к задаче взвешенной 3-раскраски.

2 Постановка задачи и её редукция

Пусть $G = (V, E)$ — простой неориентированный граф, где V — множество вершин, $|V| = n$, а E — множество рёбер. Для каждого ребра $e \in E$ задан положительный вес $w(e)$. Требуется раскрасить вершины графа в 3 цвета так, чтобы суммарный вес рёбер, соединяющих вершины одного цвета, был минимален. Данная задача является NP-трудной, поскольку к ней сводится NP-полная задача 3-раскрашиваемости графа [6].

Сформулируем эту задачу как задачу дискретной оптимизации. Введем бинарные переменные x_i^q, принимающие значение 1, если вершина i цвета q, и 0 в противном случае. Для каждого цвета q сформируем вектор переменных $x^q := (x_1^q, x_2^q, \ldots, x_n^q)$, $q \in \{1,2,3\}$. Обозначим $x := (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^{3n}$. Определим симметричную матрицу весов $W := (w_{ij})_{n\times n}$, где элемент w_{ij} равен весу ребра (i,j), если оно существует, и 0 в противном случае. Тогда задачу можно сформулировать следующим образом [19]:

$$\left.\begin{aligned} F(x) := \sum_{q=1}^{3} \langle x^q,\ W x^q\rangle \downarrow \min_x,& \\ \sum_{q=1}^{3} x_i^q = 1, \quad \forall i \in V,& \\ x_i^q \in \{0,1\}, \quad \forall i \in V,\ q \in \{1,2,3\}.& \end{aligned}\right\}$$

Осуществим переход от дискретной постановки к её непрерывному аналогу [8, разд. 3.3]. Заменим условие дискретности $x_i^q \in \{0,1\}$ на требования принадлежности переменных единичному отрезку $x_i^q \in [0,1]$ (данное ограничение формально избыточно, однако необходимо для дальнейших преобразований) и одновременное выполнение равенства $(x_i^q)^2 - x_i^q = 0$. Для каждого вектора x^q последнее условие может быть записано в эквивалентном виде через евклидову норму:

$$\left\| x^q - \frac{1}{2} e \right\|^2 - \frac{n}{4} = 0, \quad q \in \{1,2,3\},$$

где $e = (1,1,\ldots,1) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через S выпуклое множество, определяемое линейными ограничениями:

$$S := \left\{ x \in \mathbb{R}^{3n} \;\middle|\; \begin{aligned} &\sum_{q=1}^{3} x_i^q = 1, \quad \forall i \in V; \\ &0 \le x_i^q \le 1, \quad \forall i \in V, \quad q \in \{1,2,3\} \end{aligned} \right\}$$

Тогда непрерывная постановка задачи принимает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &F(x) \downarrow \min_x, \\ &\left\| x^q - \frac{1}{2} e \right\|^2 = \frac{n}{4}, \quad q \in \{1,2,3\}, \\ &x \in S. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{P})$$

Задача $(\mathcal{P})$ характеризуется невыпуклостью как в целевой функции, так и в системе ограничений (поскольку квадратичное равенство задаёт невыпуклое множество), что затрудняет её исследование и решение. При этом целевая функция $F(x)$ является DC функцией. Действительно, симметричность матрицы W позволяет построить разложение $W = A - B$, где A и B — положительно определённые матрицы [9, с. 269–270]. Это даёт возможность представить $F(x)$ в виде разности двух выпуклых квадратичных форм:

$$F(x) = \sum_{q=1}^{3} \big(\langle x^q,\ Ax^q \rangle - \langle x^q,\ Bx^q \rangle \big).$$

Далее оштрафуем невыпуклое ограничение для того, чтобы перейти от задачи $(\mathcal{P})$ к задаче с невыпуклостью только в целевой функции. Получим следующую задачу:

$$\Phi_\mu(x) := \sum_{q=1}^{3} \big(\langle x^q,\ Ax^q \rangle - \langle x^q,\ Bx^q \rangle \big) + \mu P(x) \downarrow \min_x, \quad x \in S, \quad (\mathcal{P}_\mu)$$

где $\mu > 0$ — параметр штрафа, а функция $P(x)$ представляет собой классический штраф для ограничений равенств [20, гл. 15] и имеет следующий вид:

$$P(x) := \sum_{q=1}^{3} \left| \left\| x^q - \frac{1}{2} e \right\|^2 - \frac{n}{4} \right|.$$

Исследуем свойства функции $P(x)$. Принимая во внимание ограничения $0 \le x_i^q \le 1$, заметим, что значение функции $(x_i^q - 1/2)^2$ на отрезке $[0, 1]$ достигает максимума в граничных точках и не превосходит $1/4$. Следовательно, справедлива оценка:

$$\left\| x^q - \frac{1}{2} e \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^q - \frac{1}{2} \right)^2 \le \frac{n}{4}, \quad q \in \{1, 2, 3\}, \quad x \in S.$$

Данный факт позволяет однозначно раскрыть модули в штрафной функции с обратными знаками:

$$P(x) = \sum_{q=1}^{3} \left| \left\| x^q - \frac{1}{2} e \right\|^2 - \frac{n}{4} \right| = \sum_{q=1}^{3} \Big(\frac{n}{4} - \left\| x^q - \frac{1}{2} e \right\|^2 \Big) \quad \forall x \in S.$$

Заметим, что при фиксированном μ задача $(\mathcal{P}_\mu)$ представляет собой задачу DC минимизации на выпуклом допустимом множестве S. Действительно, подставив выражение для $P(x)$ в целевую функцию оштрафованной задачи, можно представить её следующим образом:

$$\Phi_\mu(x) = G(x) - H(x), \tag{1}$$

где $G(x) = \sum_{q=1}^{3} G_q(x)$, $H(x) = \sum_{q=1}^{3} H_q(x)$ и выпуклые компоненты определены как:

$$G_q(x) = \langle x^q, Ax^q \rangle + \frac{\mu n}{4},\ H_q(x) = \langle x^q, Bx^q \rangle + \mu \left\| x^q - \tfrac{1}{2}e \right\|^2,\ q \in \{1,2,3\}.$$

Из классической теории штрафа известно, что если для некоторого значения параметра $\mu > 0$ оптимальное решение $z(\mu)$ задачи $(\mathcal{P}_\mu)$ является допустимым решением задачи $(\mathcal{P})$ (т.е. выполняется условие $P(z(\mu)) = 0$, то $z(\mu)$ будет глобальным решением задачи $(\mathcal{P})$ [20, гл. 17]. Более того, если для некоторого значения $\hat{\mu}$ выполняется условие $P(z(\hat{\mu})) = 0$, то при всех $\mu \geq \hat{\mu}$ решение оштрафованной задачи совпадает с решением исходной задачи $(\mathcal{P})$ [20, гл. 17].

Ключевым моментом теории точного штрафа [11, 12, 20] является существование такого порогового значения $\mu_* > 0$, что для всех $\mu \geq \mu_*$ выполняется равенство $P(z(\mu)) = 0$. Сформулируем и докажем теорему о точности штрафа для рассматриваемой задачи.

Теорема 1. *Существует пороговое значение $\mu_* > 0$, такое что для любого $\mu \geq \mu_*$ оптимальное решение $z(\mu)$ оштрафованной задачи $(\mathcal{P}_\mu)$ удовлетворяет условию $P(z(\mu)) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим допустимое множество S. В силу блочной структуры ограничений, S представимо в виде декартова произведения n стандартных симплексов в пространстве $\mathbb{R}^3$. Известно, что вершинами такого симплекса являются единичные орты координатных осей [21, разд. 2.2]. Следовательно, все вершины политопа S являются бинарными векторами. Заметим, что для любого бинарного вектора штрафная функция $P(x)$ обращается в ноль, поскольку $P(x)$ — штраф за нарушение целочисленности переменных.

Исследуем свойства функции $\Phi_\mu(x)$. Гессиан функции $\Phi_\mu(x)$ является блочно-диагональной матрицей, где каждый диагональный блок имеет вид $2(W - \mu I)$, где I — единичная матрица. Выберем $\mu_* > \max\{\lambda_{\max}(W), 0\}$, где $\lambda_{\max}(W)$ — максимальное собственное значение матрицы W. Тогда при $\mu \geq \mu_*$ матрица $2(W - \mu I)$ оказывается отрицательно определённой (поскольку все её собственные значения отрицательны [21, разд. A.5]). Следовательно, целевая функция оштрафованной задачи $\Phi_\mu(x)$ становится строго вогнутой на

$\mathbb{R}^{3n}$. Поскольку S — выпуклое множество, то $\Phi_\mu(x)$ будет строго вогнутой и на S.

Далее заметим, что множество S ограничено (поскольку $S \subset [0,1]^{3n}$) и замкнуто (как декартово произведение замкнутых множеств). Значит, по теореме Гейне–Бореля [22, гл. 2, теор. 2.41], S является компактом. Согласно фундаментальному свойству задач вогнутой минимизации [8, гл. 2, теор. I.1], глобальный минимум строго вогнутой функции на компактном выпуклом множестве достигается в одной из его крайних точек. Таким образом, оптимальное решение $z(\mu)$ задачи $(\mathcal{P}_\mu)$ при $\mu \geq \mu_*$ является вершиной S. Следовательно, ограничение $P(z(\mu)) = 0$ выполнено, что завершает доказательство. □

Опираясь на упомянутые выше результаты теории штрафа и теорему 1, заключаем, что решение исходной задачи $(\mathcal{P})$ может быть сведено к решению всего одной задачи $(\mathcal{P}_\mu)$ при любом фиксированном значении параметра $\mu \geq \mu_*$.

Далее в работе представлен процесс построения методов локального и глобального поисков в задаче $(\mathcal{P}_\mu)$ при фиксированном μ (при этом считаем, что $\mu > \mu_*$). Также принимаем во внимание, что $(\mathcal{P}_\mu)$ с фиксированным μ является задачей DC минимизации на выпуклом множестве. Вопрос практического отыскания $\mu > \mu_*$ будет отдельно решён ниже во время вычислительных экспериментов.

3 Специальный метод локального поиска и его тестирование

Важнейшей составляющей метода глобального поиска является локальный поиск. В данном случае будем использовать специальный метод локального поиска (СМЛП) [9, 13] для задачи DC минимизации $(\mathcal{P}_\mu)$, который заключается в последовательном решении линеаризованных по базовой невыпуклости задач. Формулировка линеаризованной в точке y^s задачи $(\mathcal{P}_\mu)$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \Psi_s(x) &= G(x) - \langle \nabla H(y^s),\, x\rangle = \\ &= \sum_{q=1}^{3}\big(G_q(x) - \langle \nabla H_q(y^s),\, x^q\rangle\big) \downarrow \min_x,\ x \in S. \end{aligned}\right\} \qquad (\mathcal{PL}(y^s))$$

Приведём явное выражение для функции $\Psi_s(x)$. Для этого вычислим градиент функций $H_q(x)$, $q \in \{1,2,3\}$:

$$\nabla H_q(x) = \nabla \left(\langle x^q, Bx^q \rangle + \mu \left\| x^q - \frac{1}{2}e \right\|^2 \right) =$$
$$= 2Bx^q + 2\mu \left(x^q - \frac{1}{2}e \right), \quad q \in \{1,2,3\}.$$

Тогда функция $\Psi_s(x)$ записывается следующим образом (считаем, что $y^s := (y^{s1}, y^{s2}, y^{s3}) \in \mathbb{R}^{3n}$):

$$\Psi_s(x) = \sum_{q=1}^{3} \left[\langle x^q,\ Ax^q \rangle - 2 \left\langle By^{sq} + \mu \left(y^{sq} - \frac{1}{2}e \right),\ x^q \right\rangle \right] + \frac{3\mu n}{4}.$$

Задача $(\mathcal{PL}(y^s))$ является выпуклой, что позволяет использовать для её решения классические методы выпуклой оптимизации и соответствующие программные комплексы. Общая схема СМЛП имеет следующий вид (y_0 — некоторая стартовая точка):

Шаг 0: Положить $s := 0$, $y^s := y_0$.
Шаг 1: Найти приближенное решение y^{s+1} задачи $(\mathcal{PL}(y^s))$ с точностью ρ_s.
Шаг 2: Положить $s := s + 1$ и перейти к шагу 1.

Согласно результатам из [9, 13] эта простая схема сходится к так называемой *критической точке* $\hat{x}$ в задаче $(\mathcal{P}_\mu)$. Точка $\hat{x}$ оказывается решением линеаризованной задачи $(\mathcal{PL}(\hat{x}))$ (линеаризованной в ней же самой).

При практической реализации СМЛП мы также используем понятие *приближённой критической точки* и в вычислительную схему вводится дополнительный шаг 1a (проверка критерия остановки) [9, 13]:

$$\Psi_s(y^s) - \Psi_s(y^{s+1}) \leq \tau/2. \tag{2}$$

При выполнении критерия остановки (2) можно показать, что точка y^s, полученная с помощью СМЛП, оказывается $(\tau/2 + \rho_s)$-решением задачи $(\mathcal{PL}(y^s))$ (см. [9, 13]). Иными словами, y^s является $(\tau/2 + \rho_s)$-приближённой критической точкой в задаче $(\mathcal{P}_\mu)$ (если требуется отыскать, скажем, τ-критическую точку, то достаточно выбрать $\rho_s \leq \tau/2$).

В завершение раздела представим результаты численного тестирования СМЛП, выполненного с целью определения порогового значения параметра штрафа μ. Данное тестирование было проведено для всех тестовых примеров (подробности о тестовых данных см. в разделе 5). Для иллюстрации в таблице 1 приведено по одному примеру из каждой группы тестовых графов при значениях параметров $\tau/2 = 10^{-3}$ и $\rho_s = 10^{-6}$. В таблице использованы следующие обозначения:

- n — число вершин графа;
- m — число рёбер;
- μ — значение параметра штрафа;
- $\widehat{\Phi}_\mu$ — значение целевой функции оштрафованной задачи в приближённой критической точке;
- $\widehat{P}$ — значение штрафной функции в приближённой критической точке;
- N_{lin} — количество решённых линеаризованных задач (итераций СМЛП).

Стартовая точка y_0 задавалась как случайный вектор, равномерно распределённый на $[0,1]^{3n}$. Из таблицы 1 можно видеть, что во всех тестовых примерах при $\mu = 9$ значение штрафной функции в критической точке $\widehat{P}$ не превышает 0.01, а при $\mu = 10$ обращается в ноль. Это же свойство сохраняется для всех тестовых примеров. Поэтому для выполнения равенства $\widehat{P} = 0$ в дальнейших вычислительных экспериментах будем использовать $\mu = 10$.

Таблица 1. Результаты тестирования СМЛП

n	m	μ	$\widehat{\Phi}_\mu$	$\widehat{P}$	N_{lin}
53	293	5	1121.62	4.24	18
		7	1123.05	5.54	18
		9	1069.18	**0**	42
		10	1069.18	**0**	38
100	1000	5	14893.8	2.4	157
		7	14898.6	1.54	163
		9	14949.2	0.01	171
		10	14949.1	**0**	177
100	400	5	2744.35	2	103
		7	2742.42	0.08	106
		9	2742.34	**0**	107
		10	2742.34	**0**	104

4 Метод глобального поиска

Спецификой невыпуклых задач является наличие множества локальных экстремумов, вследствие чего применение исключительно методов локального поиска не гарантирует нахождения глобального решения [8, гл. 1], [20, гл. 1]. Для достижения глобального оптимума необходимо применять подходы, позволяющие выходить из локальных решений и стационарных точек. В данном случае будем использовать подход, базирующийся на так называемых конструктивных условиях глобальной оптимальности, доказанных А.С. Стрекаловским (далее — УГО) [9, 13]. В терминах исследуемой задачи с учётом DC разложения (1) необходимые УГО записываются следующим образом.

Теорема 2 ([9, 13])**.** *Если $z \in S$ является глобальным решением задачи $(\mathcal{P}_\mu)$ и $\zeta := \Phi_\mu(z)$, то*

$$\forall (y,\gamma)\ :\ y \in S, \quad \gamma - H(y) = \zeta, \tag{3}$$

$$G(y) \leq \gamma \leq \sup_{x\in S} G(x), \tag{4}$$

$$G(x) - \gamma \geq \langle \nabla H(y),\, x - y\rangle, \quad \forall x \in S. \tag{5}$$

где

$$\nabla H(y) = (2By^1 + 2\mu(y^1 - \frac{1}{2}e), 2By^2 + 2\mu(y^2 - \frac{1}{2}e), 2By^3 + 2\mu(y^3 - \frac{1}{2}e)).$$

Неравенство (5) называют основным неравенством УГО. Нетрудно видеть, что УГО сводят решение невыпуклой задачи $(\mathcal{P}_\mu)$ к решению семейства линеаризованных выпуклых задач, зависящих от параметра y:

$$G(x) - \langle \nabla H(y),\, x\rangle \downarrow \min_x, \quad x \in S, \tag{$\mathcal{PL}(y)$}$$

а также последующей проверке нарушения неравенства (5). Пусть $z^k \in S$ — текущая допустимая точка. Если для некоторой пары (y,γ) из (3) на уровне $\zeta = \zeta_k = \Phi_\mu(z^k)$ и для допустимой точки $u \in S$ неравенство (5) нарушается:

$$G(u) < \gamma + \langle \nabla H(y), u - y\rangle,$$

то из выпуклости $H(\cdot)$ следует:

$$\Phi_\mu(u) = G(u) - H(u) < \gamma + \langle \nabla H(y), u - y\rangle - H(u) \leq$$
$$\leq \gamma + H(u) - H(y) - H(u) = \gamma - H(y) = \Phi_\mu(z^k)$$

или $\Phi_\mu(u) < \Phi_\mu(z^k)$. Значит, $u \in S$ «лучше», чем z^k. При этом z^k может быть критической точкой в задаче и даже её локальным решением. Описанное конструктивное свойство лежит в основе схемы (стратегии) глобального поиска (СГП) [9, 13]. Запишем её в терминах задачи $(\mathcal{P}_\mu)$. Пусть заданы:

- стартовая точка $x^0 \in S$;

- числовые последовательности $\{\tau_k\}$ и $\{\delta_k\}$ такие, что $\tau_k,\, \delta_k > 0$, $\tau_k \downarrow 0$, $\delta_k \downarrow 0$ при $k \to \infty$;
- множество направлений $Dir = \{v^l := (v^{l1}, v^{l2}, v^{l3}) \in \mathbb{R}^{3n} \mid v^l \neq 0, \quad l = 1, \ldots, N\}$;
- оценки глобального минимума и максимума функции $G(x)$ на S:

$$\gamma_- \triangleq \inf_{x \in S} G(x), \quad \gamma_+ \triangleq \sup_{x \in S} G(x);$$

- параметр $M > 0$.

Шаг 0: Положить $k := 0$, $\gamma := \gamma_-$, $\Delta\gamma := (\gamma_+ - \gamma_-)/M$, $l := 1$, $\bar{x}^k := x^0$.

Шаг 1: Начиная из точки $\bar{x}^k$, с помощью метода локального поиска из раздела 3 построить τ_k-приближённо критическую точку $x^k \in S$ в задаче $(\mathcal{P}_\mu)$. Положить $\zeta_k := \Phi_\mu(x^k)$.

Шаг 2: По направлению $v^l \in Dir$ построить точку u^l аппроксимации $\mathcal{A}_k$ поверхности уровня функции $H(\cdot)$:

$$\mathcal{A}_k := \{u^l \mid H(u^l) = \gamma - \zeta_k, \quad l = 1, \ldots, N\}.$$

Шаг 3: Если $G(u^l) > \gamma$, $l < N$ и $\gamma < \gamma_+$, то положить $l := l+1$ и перейти на шаг 2.

Шаг 4: Если $G(u^l) > \gamma$, $l = N$ и $\gamma < \gamma_+$, то положить $l := 1$, $\gamma := \gamma + \Delta\gamma$ и перейти на шаг 2.

Шаг 5: Если $G(u^l) > \gamma$, $l = N$ и $\gamma = \gamma_+$, то остановиться; x^k — найденное решение задачи $(\mathcal{P}_\mu)$.

Шаг 6: Найти δ_k-решение $\bar{u}^l$ линеаризованной задачи в точке u^l $(\mathcal{PL}(u^l))$.

Шаг 7: Начиная из точки $\bar{u}^l$, построить с помощью СМЛП τ_k-приближённо критическую точку $\hat{x}^l \in S$ в задаче $(\mathcal{P}_\mu)$.

Шаг 8: Если $\Phi_\mu(\hat{x}^l) < \Phi_\mu(x^k)$, то положить $\bar{x}^{k+1} := \hat{x}^l$, $k := k+1$, $\gamma := \gamma_-$, $l := 1$. Перейти на шаг 2.

Шаг 9: Если $\Phi_\mu(\hat{x}^l) \geq \Phi_\mu(x^k)$ и $l < N$, то положить $l := l+1$ и вернуться на шаг 2.

Шаг 10: Если $\Phi_\mu(\hat{x}^l) \geq \Phi_\mu(x^k)$, $l = N$ и $\gamma < \gamma_+$, то $\gamma := \gamma + \Delta\gamma$, $l := 1$ и вернуться на шаг 2.

Шаг 11: Если $\Phi_\mu(\hat{x}^l) \geq \Phi_\mu(x^k)$, $l = N$ и $\gamma = \gamma_+$, то завершить работу алгоритма. Точка x^k — найденное решение задачи $(\mathcal{P}_\mu)$.

Поясним основные шаги СГП:

- на шаге 2 строится конечная аппроксимация поверхности уровня функции, задающей базовую невыпуклость в исследуемой задаче;

- на шагах 3–5 с помощью неравенства из (4) в УГО проверяется перспективна ли текущая точка аппроксимации;
- на шагах 6–7 находится новая приближённая критическая точка в задаче $(\mathcal{P}_\mu)$;
- на шагах 8–11 анализируется, даёт ли найденная приближённая критическая точка улучшение текущего значения целевой функции.

Представленная СГП носит достаточно общий характер. Для реализации алгоритма на её основе необходимо исследовать следующие моменты: выбор параметра M (определяет число подотрезков в разбиении интервала $[\gamma_-, \gamma_+]$ для одномерного поиска по γ); выбор множества направлений Dir и построение точек аппроксимации поверхности уровня на основе этого множества (см. шаг 2); поиск чисел γ_- и γ_+. Настройка этих элементов имеет эвристический характер, базируется на данных задачи и существенно влияет на качество получаемых решений.

Особое внимание следует уделить выбору множества направлений Dir, поскольку аппроксимация должна быть достаточно репрезентативной для решения вопроса о том, является ли x^k глобальным решением задачи [13–18]. Рассмотрим два варианта построения данного множества:

(1) Множество $Dir_1 = \{(e^{i_1}, e^{i_2}, e^{i_3}) \in \mathbb{R}^{3n} \mid i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}\}$, где $e^i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$ — векторы стандартного базиса пространства $\mathbb{R}^n$.

Выбор данного множества обусловлен тем, что целевая функция $\Phi_\mu(x)$ представляет собой квадратичную форму в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$. С учётом этого факта, а также блочной структуры вектора $x = (x^1, x^2, x^3)$, для построения аппроксимации естественно использовать стандартные орты в каждой из его компонент. Количество точек в этой аппроксимации зависит от числа вершин графа n и составляет n^3.

(2) Множество $Dir_2 = \{(b^1, b^2, b^3) \in \mathbb{R}^{3n} \mid b^1, b^2, b^3 \in \{0, 1\}^n\}$.

Выбор данного множества обусловлен изначально дискретным характером исходной задачи и блочной структурой вектора $x = (x^1, x^2, x^3)$. Поэтому для построения аппроксимации естественно использовать в каждой из компонент x произвольный булев вектор. Количество точек в этой аппроксимации составляет 2^{3n}.

Далее на шаге 2 по точкам из множества направлений необходимо построить аппроксимацию поверхности уровня функции $H(\cdot)$. Для этого используем следующий приём. Для заданного множества направлений:

$$Dir = \{v^l = (v^{l1}, v^{l2}, v^{l3}) \in \mathbb{R}^{3n} \mid v^l \neq 0, \quad l = 1, \ldots, N\},$$

множество $\mathcal{A}_k$ строится из векторов, коллинеарных векторам из Dir и лежащих на поверхности уровня:

$$u^{lq} = \lambda v^{lq}, \quad q = 1, 2, 3; \quad H(u^l) = \gamma - \zeta_k := \alpha_k.$$

Для рассматриваемой задачи это условие принимает вид:

$$\sum_{q=1}^{3} \left(\langle u^{lq},\ Bu^{lq} \rangle + \mu \left\| u^{lq} - \frac{1}{2} e \right\|^2 \right) = \alpha_k.$$

Подставив $u^{lq} = \lambda v^{lq}$ в уравнение, получаем:

$$\sum_{q=1}^{3} \left(\lambda^2 \langle v^{lq},\ Bv^{lq} \rangle + \mu \left\| \lambda v^{lq} - \frac{1}{2} e \right\|^2 \right) = \alpha_k. \tag{6}$$

Раскроем квадрат нормы, учитывая, что $\langle e,\ e \rangle = n$:

$$\left\| \lambda v^{lq} - \frac{1}{2} e \right\|^2 = \lambda^2 \langle v^{lq},\ v^{lq} \rangle - \lambda \langle v^{lq},\ e \rangle + \frac{n}{4}, \quad q \in \{1, 2, 3\}. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6) и группируя слагаемые при степенях λ, приходим к квадратному уравнению относительно λ:

$$\left(\sum_{q=1}^{3} \left[\langle v^{lq}, Bv^{lq} \rangle + \mu \langle v^{lq}, v^{lq} \rangle \right] \right) \lambda^2 - \left(\mu \sum_{q=1}^{3} \langle v^{lq}, e \rangle \right) \lambda + \left(\tfrac{3\mu n}{4} - \alpha_k \right) = 0. \tag{8}$$

Известно, что для существования вещественных корней уравнения (8) достаточно потребовать неположительности свободного члена $c \leq 0$ при условии неотрицательности старшего коэффициента $a \geq 0$. Условие $a \geq 0$ достигается за счет построения разложения $W = A - B$ (см. раздел 2). В частности, всегда есть возможность выбрать матрицу B с неотрицательными элементами. Если в исходном разложении матрица B содержит отрицательные значения, достаточно прибавить ко всем элементам матриц A и B величину s, равную модулю минимального отрицательного элемента. Такое преобразование не меняет разность $A - B$, но делает все элементы B неотрицательными, что, как легко заметить, обеспечивает неотрицательность коэффициента a. Будем считать, что построенное ранее разложение $W = A - B$ удовлетворяет указанному свойству.

Таким образом, требование существования вещественных корней (8) сводится к неравенству $c \leq 0$, что эквивалентно $\alpha_k \geq \dfrac{3\mu n}{4}$. Учитывая определение $\alpha_k = \gamma - \zeta_k$, приходим к неравенству $\gamma \geq \dfrac{3\mu n}{4} + \zeta_k$. Заметим, что последовательность $\{\zeta_k\}$ является невозрастающей. Значит, для гарантирования существования вещественных корней на всех итерациях алгоритма, достаточно выбрать $\gamma_- = \dfrac{3\mu n}{4} + \zeta_0$. Чтобы дополнительно не увеличивать количество точек в аппроксимации (и, соответственно, объём вычислений при глобальном поиске), при численной реализации использовался только один из корней уравнения (8).

Значения остальных параметров алгоритма были подобраны в ходе предварительных экспериментов с целью достижения баланса между качеством решений и временем вычислений (подробнее об этом — в следующем разделе). Эти настройки, наряду с ранее рассмотренными элементами СГП, определяют алгоритм глобального поиска (АГП).

В завершение раздела рассмотрим способ повышения вычислительной эффективности АГП. Напомним, что во всех предложенных вариантах аппроксимаций количество точек достаточно велико (n^3 и 2^{3n}). При росте n это приведет к значительному увеличению числа запусков локального поиска в процессе решения задачи, что существенно повлияет на время работы алгоритма. В связи с этим вместо полного перебора элементов множеств Dir_1 и Dir_2 предлагается выбирать из них несколько случайных элементов. Ранее вероятностные методы применялись для построения аппроксимации поверхности уровня функции $H(\cdot)$ в АГП в контексте генетических алгоритмов. Например, в работах [23, 24] построенные точки аппроксимации формировали начальную популяцию, к которой затем применялись операторы скрещивания и мутации. В данной работе предлагается альтернативный подход, основанный на простом выборе случайных элементов из множеств направлений.

Для выбора направления из множества Dir_1 случайным образом генерируются индексы $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}$, $(e^{i_1}, e^{i_2}, e^{i_3})$ — выбранный элемент множества Dir_1. Процедура выбора направления из множества Dir_2 заключается в следующем:

- b^i инициализируется нулевыми значениями, $i = 1, 2, 3$;
- Генерируется случайное целое число $r \in \{1, \dots, n\}$ (общее количество единиц).

- Выполняется r итераций: на каждом шаге выбираются случайные индексы $q \in \{1, 2, 3\}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$, i-я координата вектора b^q полагается равной 1.
- (b^1, b^2, b^3) — выбранный элемент множества Dir_2.

В дальнейших вычислительных экспериментах из каждого множества (Dir_1 и Dir_2) выбирается от 2 до 20 элементов, что существенно меньше их мощностей (n^3 и 2^{3n}). Предложенные способы сокращения количества точек аппроксимации обеспечивают гибкость АГП, поскольку в зависимости от требуемого времени работы можно варьировать требуемый в алгоритме объём вычислений.

5 Вычислительный эксперимент

Программная реализация алгоритмов выполнена на языке C++. Вычислительные эксперименты проводились на компьютере с процессором Intel Core i9-13900HK и 32 ГБ оперативной памяти. Тестирование проводилось на трех группах графов:

(1) **Группа 1.** Графы, полученные от компании, занимающейся проектированием и конфигурированием крупных беспроводных коммуникационных сетей. Представляют собой компоненты связности реальных графов мобильной связи. Данная группа содержит 11 примеров с числом вершин от 27 до 953 и числом рёбер от 120 до 9350.

(2) **Группа 2.** Синтетические графы, в которых рёбра между парами вершин добавлялись случайным образом до достижения заданного количества рёбер. Вес каждого ребра выбирался как случайная величина, равномерно распределённая на интервале $[0, 100]$. Данная группа содержит 5 примеров с числом вершин от 50 до 1000 и числом рёбер от 500 до 10000.

(3) **Группа 3.** Графы генерировались аналогично Группе 2, однако веса рёбер выбирались из нормального распределения с математическим ожиданием 50 и среднеквадратическим отклонением 20 с последующим усечением значений до диапазона $[0, 100]$. Данная группа содержит 10 примеров с числом вершин от 100 до 1000 и числом рёбер от 400 до 3000.

Все тестовые примеры, использованные в эксперименте, находятся в открытом доступе [25].

Результаты численного эксперимента представлены в Таблицах 2–7 со следующими обозначениями:

- n и m — количество вершин и рёбер графа соответственно;

- VND и Gr — значения целевой функции, полученные методом спуска с чередующимися окрестностями (Variable Neighborhood Descent) и жадным алгоритмом соответственно;
- GSA — значение целевой функции, найденное АГП;
- t — время работы АГП в секундах;
- Q — количество случайных направлений, выбираемых из множеств Dir_1 и Dir_2;
- Δ_{VND} (Δ_{Gr}) — относительное улучшение решения по сравнению с алгоритмом VND (соответственно, жадным алгоритмом), вычисляемое как:

$$\Delta_{Alg} = \frac{Alg - GSA}{Alg} \times 100\%, \quad \text{где } Alg \in \{VND, Gr\};$$

- N_{loc} — количество запусков локального поиска, N_{lin} — количество решённых линеаризованных задач, N_{exit} — количество выходов из критических точек (итераций АГП $-$ 1).

Поскольку задача нахождения γ_+ сводится к решению задачи выпуклой максимизации, которая является вычислительно сложной [26, гл. 3], в работе использовано эмпирически подобранное значение $\gamma_+ = 1{,}5\,\gamma_-$.

Для сравнительного анализа использовались реализации жадного алгоритма и алгоритма VND, разработанные в рамках соревнования Challenge 5 международной конференции MOTOR 2025 [27]. Исходный код данных алгоритмов находится в открытом доступе [28]. Время работы жадного алгоритма и алгоритма VND для всех тестовых задач не превышало 1 секунды.

Анализ результатов для графов первой группы (таблицы 2–3) показывает, что АГП нашел решения с меньшим значением целевой функции по сравнению с жадным алгоритмом во всех рассмотренных задачах, а по сравнению с алгоритмом VND — в большинстве случаев. АГП с Dir_1 и АГП с Dir_2 показали близкие результаты.

Таблица 2. Результаты для группы 1 для Dir_1

n	m	VND	Gr	GSA	t, с	Δ_{VND}, %	Δ_{Gr}, %	M	Q	N_{loc}	N_{lin}	N_{exit}
27	120	93.61	119.9	**89.4**	16	4.5	25.44	5	5	29	1051	3
53	293	471.13	602.87	**465.68**	24	1.16	22.76	5	5	29	1572	3
56	406	397.18	483.84	**346.37**	87	12.79	28.41	5	5	65	4199	7
108	566	**475.86**	923.76	487.82	267	-2.51	47.19	10	10	149	11308	8
114	891	2817.04	3092.86	**2346.75**	303	16.69	24.12	10	10	120	12725	5
283	2293	4664.86	5250.31	**4603.54**	2780	1.31	12.32	5	5	90	24361	6
313	2801	6506.26	8020.95	**6460.69**	1465	0.7	19.45	5	5	40	12144	4
360	3278	7082.93	8367.75	**6919.51**	1654	2.31	17.31	5	5	35	9953	3
688	7392	24801.2	29044.8	**24149.4**	4560	2.63	16.85	5	5	51	14648	3
689	6612	**13001.7**	16502.1	13615	2314	-4.72	17.5	5	2	33	7988	6
953	9350	**24616.3**	29898.5	24930	2052	-1.27	16.62	5	2	18	6323	4

Таблица 3. Результаты для группы 1 для Dir_2

n	m	VND	Gr	GSA	t, с	Δ_{VND}, %	Δ_{Gr}, %	M	Q	N_{loc}	N_{lin}	N_{exit}
27	120	93.61	119.9	**89.45**	59	4.44	25.4	10	10	114	3934	7
53	293	471.13	602.87	**459.71**	104	2.42	23.75	10	10	127	6049	4
56	406	397.18	483.84	**352.15**	105	11.34	27.22	10	10	89	5032	5
108	566	**475.86**	923.76	484.43	476	-1.8	47.56	20	20	199	16439	4
114	891	2817.04	3092.86	**2419.56**	197	14.11	21.77	10	10	77	8206	8
283	2293	4664.86	5250.31	**4645.73**	891	0.41	11.52	10	10	34	8664	2
313	2801	6506.26	8020.95	**6316.71**	1492	2.91	21.25	10	10	51	12649	3
360	3278	7082.93	8367.75	**6777.88**	2139	4.31	19	10	10	50	12986	3
688	7392	24801.2	29044.8	**24327.3**	1734	1.91	16.24	5	5	19	5541	4
689	6612	**13001.7**	16502.1	13775.6	1081	-5.95	16.52	5	5	16	3990	3
953	9350	24616.3	29898.5	**24580.1**	3725	0.15	17.79	3	10	30	11078	4

Для графов второй (таблицы 4–5) группы АГП показал лучшие значения целевой функции, чем жадный алгоритм и VND, во всех тестовых задачах. Однако АГП с Dir_2 в одном случае уступил VND. АГП с Dir_1 показал меньшие значения целевой функции, чем АГП с Dir_2, почти во всех примерах. Однако время работы АГП с Dir_1 было больше, чем АГП с Dir_2, за исключением одного случая.

Таблица 4. Результаты для группы 2 для Dir_1

n	m	VND	Gr	GSA	t, с	Δ_{VND}, %	Δ_{Gr}, %	M	Q	N_{loc}	N_{lin}	N_{exit}
50	500	3916.85	4162.88	**3814.97**	277	2.6	8.36	10	10	139	14880	4
100	1000	7174.04	8928.79	**7068.16**	779	1.48	20.84	7	7	103	14783	5
250	2500	17402.8	21736.5	**17095.3**	634	1.77	21.35	5	5	28	5941	1
500	5000	34798.1	43709.7	**32939.4**	3139	5.34	24.64	5	5	26	6937	0
1000	10000	68460	84612.1	**67798.4**	7479	0.97	19.87	2	2	10	3853	3

Таблица 5. Результаты для группы 2 для Dir_2

n	m	VND	Gr	GSA	t, с	Δ_{VND}, %	Δ_{Gr}, %	M	Q	N_{loc}	N_{lin}	N_{exit}
50	500	3916.85	4162.88	**3814.97**	460	2.6	8.36	10	10	148	16179	6
100	1000	7174.04	8928.79	**7110.17**	631	0.89	20.37	7	7	66	9829	4
250	2500	17402.8	21736.5	**16477.2**	504	5.32	24.2	5	5	18	4380	2
500	5000	34798.1	43709.7	**32939.4**	1640	5.34	24.64	5	5	11	3643	0
1000	10000	**68460**	84612.1	68786.4	2304	-0.48	18.7	2	2	3	1194	0

В третьей группе (таблицы 6–7) АГП продемонстрировал существенно лучшие результаты по сравнению с жадным алгоритмом и VND для всех графов. АГП с Dir_1 по качеству решений оказался не хуже АГП с Dir_2 во всех задачах. Однако время работы АГП с Dir_1 стабильно превышало время работы АГП с Dir_2.

Следует обратить внимание на параметр N_{exit}, который в некоторых случаях принимает нулевое значение. Это означает, что глобальный поиск не сработал: алгоритм остался в стартовой критической точке. Причиной может быть неудачный выбор множеств

Таблица 6. Результаты для группы 3 для Dir_1

n	m	*VND*	*Gr*	*GSA*	t, с	Δ_{VND}, %	Δ_{Gr}, %	M	Q	N_{loc}	N_{lin}	N_{exit}
100	400	1529.1	2095.83	**965.25**	242	36.87	53.94	5	5	63	409	6
200	700	2117.89	2888.01	**1815.36**	284	14.28	37.14	5	5	37	3693	5
300	1000	2780.97	4122.76	**2106.05**	874	24.27	48.92	5	5	42	4494	2
400	1500	4679.15	7153.89	**4212.53**	1382	9.97	41.12	5	5	47	6093	2
500	1500	2997.97	5255.46	**2326.25**	1464	22.41	55.74	5	5	49	5733	3
600	1800	3861.05	6004.01	**2954.31**	783	23.48	50.79	3	3	17	2169	1
700	2000	5069.25	7466.86	**2679.95**	6980	47.13	64.11	10	10	134	17248	1
800	2500	6049.47	9187.98	**4820.7**	1461	20.31	47.53	3	3	19	2637	2
900	3000	8579.41	12163.1	**6686.93**	751	22.06	45.02	2	2	7	997	2
1000	3000	6317.33	11030.3	**5880.63**	1107	6.91	46.69	2	2	6	908	1

Таблица 7. Результаты для группы 3 для Dir_2

n	m	*VND*	*Gr*	*GSA*	t, с	Δ_{VND}, %	Δ_{Gr}, %	M	Q	N_{loc}	N_{lin}	N_{exit}
100	400	1529.1	2095.83	**1104.99**	42	27.74	47.28	5	5	13	950	2
200	700	2117.89	2888.01	**1860.06**	78	12.17	35.59	5	5	13	1059	1
300	1000	2780.97	4122.76	**2247.24**	173	19.19	45.49	5	5	10	1145	2
400	1500	4679.15	7153.89	**4439.74**	415	5.12	37.94	5	5	13	1898	1
500	1500	2997.97	5255.46	**2620.76**	1484	12.58	55.74	8	20	50	5702	1
600	1800	3861.05	6004.01	**3116.24**	152	19.29	48.1	3	3	3	449	0
700	2000	5069.25	7466.86	**3141.27**	163	38.03	57.93	3	3	3	410	0
800	2500	6049.47	9187.98	**5165.81**	301	14.61	43.78	3	3	4	561	2
900	3000	8579.41	12163.1	**6820.98**	1606	20.5	43.92	7	7	16	2119	1
1000	3000	6317.33	11030.3	**6161.03**	448	2.47	44.14	2	2	3	374	0

направлений Dir_1 и Dir_2 либо недостаточно большое значение параметра Q. С другой стороны, превосходство АГП над алгоритмом VND в этих случаях подтверждает высокую эффективность локального поиска. Фактически, итоговое качество решения здесь обеспечивается только процедурой локального поиска. А эффективнее всего ($N_{exit} \geq 3$ почти во всех случаях) АГП отработал для первой группы графов прикладной природы.

Обобщая полученные результаты, можно заключить, что в большинстве рассмотренных задач АГП позволяет находить решения с меньшим значением целевой функции по сравнению с VND, однако требует больших вычислительных ресурсов. При этом число запусков локального поиска сравнительно небольшое, однако количество решённых линеаризованных задач значительно. Следовательно, основная трудоёмкость алгоритма обусловлена вычислительной сложностью (медленной сходимостью) процедуры локального поиска. В связи с этим одним из направлений дальнейших исследований может стать разработка специального метода локального поиска, учитывающего изначальную комбинаторную природу задачи. Например, в [17, 18] использование специальной С-процедуры продемонстрировало высокую эффективность при решении задач о клике.

6 Заключение

В работе исследован подход на основе DC оптимизации для решения задачи взвешенной 3-раскраски графа. Сформулирована DC постановка задачи и на основе теории глобального поиска А.С. Стрекаловского разработаны специальные методы локального и глобального поисков.

Проведён сравнительный анализ эффективности АГП с жадным алгоритмом и алгоритмом VND. Численные эксперименты подтвердили высокое сравнительное качество решений, получаемых методом глобального поиска, одновременно с недостаточной скоростью его работы. Дальнейшие исследования будут направлены на разработку специального метода локального поиска и использование новой СГП с варьированием параметра штрафа с целью ускорения работы алгоритма.

References

[1] R.M. Karp, *Reducibility Among Combinatorial Problems*, Complexity of Computer Computations, (1972), 85–103. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4684-2001-2_9

[2] R.L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **37**:2 (1941), 194–197. DOI: https://doi.org/10.1017/S030500410002168X

[3] P. Erdős, *Graph Theory and Probability*, Canadian Journal of Mathematics, **11** (1959), 34–38. DOI: https://doi.org/10.4153/CJM-1959-003-9

[4] L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, **25**:3 (1978), 319–324. DOI: https://doi.org/10.1016/0097-3165(78)90022-5

[5] M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer, *Some simplified NP-complete graph problems*, Theoretical Computer Science, **1**:3 (1976), 237–267. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3975(76)90059-1

[6] D.P. Dailey, *Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete*, Discrete Mathematics, **30**:3 (1980), 289–293. DOI: https://doi.org/10.1016/0012-365X(80)90236-8

[7] B. Ghaddar, M.F. Anjos, F. Liers, *A branch-and-cut algorithm based on semidefinite programming for the minimum k-partition problem*, Annals of Operations Research, **188** (2011), 155–174. DOI: https://doi.org/10.1007/s10479-008-0481-4

[8] R. Horst, H. Tuy, *Global Optimization: Deterministic Approaches*, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-03199-5

[9] A.S. Strekalovsky, *Elements of Nonconvex Optimization*, Nauka, Novosibirsk, 2003 (in Russian).

[10] A.S. Strekalovsky, *On Solving Optimization Problems with Hidden Nonconvex Structures*, Optimization in Science and Engineering (Ed. by T.M. Rassias, C.A. Floudas, S. Butenko), Springer, N.Y., (2014), 465–502. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4939-0808-0_23

[11] A.S. Strekalovsky, *New global optimality conditions in a problem with d.c. constraints*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **25**:1 (2019), 245–261 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-1-245-261

[12] A.S. Strekalovsky, *Minimizing sequences in a constrained DC optimization problem*, Proc. Steklov Inst. Math., **323**: Suppl 1 (2023), S255–S278. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543823060214

[13] A.S. Strekalovsky, A.V. Orlov, *Linear and Quadratic-Linear Bilevel Optimization Problems*, Izd-vo SO RAN, Novosibirsk, 2019 (in Russian).

[14] A.S. Strekalovsky, A.V. Orlov, *Global Search for Bilevel Optimization with Quadratic Data*, Bilevel optimization: advances and next challenges (Ed. by S. Dempe, A. Zemkoho), Springer, Cham, **161** (2020), 313–334. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-52119-6_11

[15] A.V. Orlov, *The Global Search Theory Approach to the Bilevel Pricing Problem in Telecommunication Networks*, Computational Aspects and Applications in Large Scale Networks (Ed. by V.A. Kalyagin et. al.), Springer, Cham, (2018), 57–73. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-96247-4_5

[16] A.V. Orlov, S. Batbileg, *Oligopolistic banking sector of Mongolia and three-person polymatrix games*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **11** (2015), 80–95 (in Russian).

[17] T.V. Gruzdeva, A.S. Strekalovsky, *Clique Problems and Nonconvex Optimization*, Nauka, Novosibirsk, 2014 (in Russian).

[18] T.V. Gruzdeva, *On a Continuous Approach for the Maximum Weighted Clique Problem*, Journal of Global Optimization, **56**:3 (2013), 971–981. DOI: https://doi.org/10.1007/s10898-012-9885-4

[19] J. Gui, Z. Jiang, S. Gao, *PCI Planning Based on Binary Quadratic Programming in LTE/LTE-A Networks*, IEEE Access, **7** (2019), 203–214. DOI: https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2885313

[20] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, New York, 2006. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5

[21] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441

[22] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

[23] A.V. Orlov, *Numerical study of a hybrid global search algorithm in hexamatrix games*, BSU Bulletin. Mathematics, Informatics, :2 (2023), 14–29 (in Russian). DOI: https://doi.org/10.18101/2304-5728-2023-2-14-29

[24] A.V. Orlov, *Hybrid Global Search Algorithm with Genetic Blocks for Solving Hexamatrix Games*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **41** (2022), 40–56. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.40

[25] *Набор тестовых графов для численного эксперимента*, [Электронный ресурс]. URL: https://disk.yandex.ru/d/nLmRgg11N5bPlA
[26] R. Horst, P.M. Pardalos, N.V. Thoai, *Introduction to Global Optimization*, Springer, New York, 2000.
[27] *Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2025). Challenge 5*, [Электронный ресурс]. URL: http://old.math.nsc.ru/conference/motor/2025/challenges.html
[28] *Репозиторий решений задачи 3-раскраски (Challenge 5)*, [Электронный ресурс]. URL: https://github.com/prv-rus/3coloring

Georgii Alekseevich Zhukov
Novosibirsk State University,
Pirogova str., 1,
630090, Novosibirsk, Russia
Email address: g.zhukov@g.nsu.ru

Andrey Vasilievich Orlov
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS,
Lermontov str., 134,
664033, Irkutsk, Russia
Email address: anor@icc.ru