S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 26, № 2, стр. 1–7 (2023) УДК 512.54
https://doi.org/10.33048/semi.2026.20.??? MSC 20D60, 05C25

КОНЕЧНЫЕ НЕРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ, ГРАФЫ ГРЮНБЕРГА–КЕГЕЛЯ КОТОРЫХ ИЗОМОРФНЫ ГРАФУ "БАЛАЛАЙКА". СЛУЧАЙ $p > 3$

А.С. Кондратьев, Н.А. Минигулов, М.С. Нирова

Представлено П.П. Петровым

Abstract: The Gruenberg-Kegel graph (or the prime graph) $\Gamma(G)$ of a finite group G is the graph, in which the vertex set is the set of all prime divisors of the order of G and two different vertices p and q are adjacent if and only if there exists an element of order pq in G. One of popular directions of research in finite group theory is the study of finite groups with given properties of their Gruenberg-Kegel graphs. In 2012-2013, the first author described finite groups with Gruenberg-Kegel graph as for the group $Aut(J_2)$ and as for the group A_{10}. The Gruenberg-Kegel graphs of groups $Aut(J_2)$ and A_{10} are isomorphic (as abstract graphs) to the paw. The paw is the graph on four vertices whose degrees are 1, 2, 2, and 3. Generalizing the mentioned results of A.S. Kondrat'ev, we consider the problem of describing finite groups whose Gruenberg-Kegel graphs are isomorphic (as abstract graphs) to the paw. In four papers of 2018-2025, the authors considered the various cases of the problem. In this work, the authors continue the investigation of the problem and study its important new case when, for a finite

---

Kondrat'ev, A.S., Minigulov, N.A., Nirova, M.S., Finite non-solvable groups whose Gruenberg-Kegel graphs are isomorphic to the paw. Case $p > 3$.

Работа выполнена в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (номер соглашения № 075-02-2026-737).

Received , published .

non-solvable group G whose Gruenberg-Kegel graph is isomorphic to the paw, the vertex of degree 3 of the graph $\Gamma(G)$ is greather than 3.

Keywords: finite group, non-solvable group, Gruenberg-Kegel graph.

1 Введение

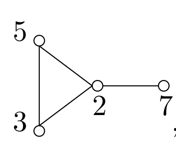
Пусть G — конечная группа. Через $\pi(G)$ обозначается множество всех простых делителей порядка группы G. Граф Грюнберга–Кегеля (граф простых чисел) $\Gamma(G)$ группы G определяется как граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Если порядок группы G четен, то $\pi_1(G)$ обозначает связную компоненту графа $\Gamma(G)$, содержащую 2.

В теории конечных групп интерес многих исследователей вызывают характеризации групп по свойствам их графов Грюнберга–Кегеля и, в частности, исследование распознаваемости группы с точностью до изоморфизма по ее графу Грюнберга–Кегеля (см., например, обзор [11]). В 2003 г. в работе М. Хаги [5] были даны первые примеры конечных групп, распознаваемых по графам Грюнберга–Кегеля, а также получено некоторое описание конечных групп G таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S — спорадическая простая группа. В 2009 г. Б. Хосрави в работах [6, 7] получил аналогичные результаты для групп автоморфизмов всех конечных спорадических простых групп, кроме $Aut(J_2)$, и поставил задачу описания строения конечных групп G таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(Aut(J_2))$. Эта задача была отмечена также в его статье [8].

Задача Хосрави была решена первым автором в [9], а именно, были описаны конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у группы $Aut(J_2)$. Как следствие этого описания, группа $Aut(J_2)$ не распознаваема по ее графу Грюнберга–Кегеля. Заметим, что до сих пор не решена проблема распознаваемости этой группы по ее спектру (множеставу порядков всех ее элементов). По аналогии первым автором были описаны также конечные группы с графом Грюнберга–Кегеля как у группы A_{10} (см. [10]). Группы $Aut(J_2)$ and A_{10} вызывают особый интерес, поскольку $Aut(J_2)$ и $Aut(McL)$ единственные среди групп автоморфизмов простых спорадических групп имеют связные графы Грюнберга–Кегеля, а A_{10} единственная среди простых групп, входящих в "Атлас конечных групп" [2], имеет связный граф Грюнберга–Кегеля.

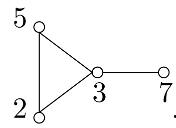
Графы Грюнберга–Кегеля групп $Aut(J_2)$ и A_{10} имеют следующий вид.

$\Gamma(Aut(J_2))$:

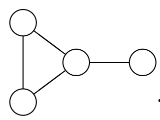


,

$\Gamma(A_{10})$:



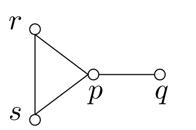
Графы Грюнберга–Кегеля этих групп изоморфны как абстрактные графы графу "балалайка"(paw), который имеет следующий вид:



В [15] была поставлена более общая задача.

Задача. *Описать конечные группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны (как абстрактные графы) графу "балалайка".*

Пусть G — конечная группа, граф Грюнберга–Кегеля которой как абстрактный граф изоморфен графу "балалайка". Тогда. граф $\Gamma(G)$ имеет следующий вид:



(paw)

где r, s, p и q — некоторые попарно различные простые числа.

В [15] доказано, что если группа G неразрешима, то фактор-группа $\overline{G} = G/S(G)$ (где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G) почти проста, и класифицированы все конечные почти простые группы, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны подграфам графа "балалайка". В [16] описаны конечные разрешимые группы G с этим свойством. Также в [17, 18] классифицированы неразрешимые группы G в следующих трех случаях: группа G не содержит элементов порядка 6; группа G содержит элемент порядка 6 и вершина q графа $\Gamma(G)$ делит $|S(G)|$; $q \leq 3$.

В данной работе мы продолжаем изучение сфоормулированной выше задачи и доказываем следующую теорему.

Теорема *Пусть G — конечная неразрешимая группа, $K = S(G)$, $\overline{G} = G/S(G)$, граф $\Gamma(G)$ имеет вид (paw), где $\{r, s\} = \{2, 3\}$, и q не делит $|K|$. Положим $H = G/O_p(G)$ и $\widetilde{H} = H/F(H)$. Тогда*

(1) *граф $\Gamma(\overline{G})$ несвязен с компонентой связности $\{q\}$, p делит $|K|$, 6 делит $E(\overline{G})$ и $\overline{G}/E(\overline{G})$ – $\{2,3\}$-группа;*

(2) *$F(H) = O_2(H) \times O_3(H)$ и $S(H)/F(H)$ — p-группа;*

(3) *$F^*(\widetilde{H}) = O_p(\widetilde{H}) \times E(\widetilde{H})$, $E(\widetilde{H}) \cong E(\overline{G})$ и $\widetilde{H} = O_p(\widetilde{H}) \leftthreetimes \widetilde{N}$, где $\widetilde{N} \cong \overline{G}$;*

(4) *если* N *– полный прообраз полгруппы* $\widetilde{N}$ *в* H*, то граф* $\Gamma(N)$ *несвязен с компонентой связности* $\{q\}$*,* $\{2,3\} \subseteq \pi_1(N) \subseteq \{2,3,p\}$*,* $F(N) = F(H)$*,* $N/F(N) \cong \overline{G}$ *и* $\Gamma(\mathbb{Z}_p \times N) = \Gamma(G)$*.*

Замечание. Детальное строение подгруппы N из п. (4) теоремы извлекается из [12, 13, 14, 20]. Теорема вместе с предыдущими результатами [15, 16, 17, 18] сводит решение нашей задачи к случаю неразрешимых групп с $p \leq 3$ и $q > 3$.

2 Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология, в основном, стандартны, их можно найти в [1, 2, 3, 4].

Пусть G — конечная группа. Если $G = G'$ и $G/Z(G)$ – простая неабелева группа, то G называется *квазипростой* группой. *Компонента* группы G — субнормальная квазипростая подруппа группы G. Произведение всех компонент группы G называется ее *слоем* и обозначается через $E(G)$. $F^*(G) = F(G)E(G)$ — *обобщенная подгруппа Фиттинга* группы G, при этом $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$. Если $F^*(G) = E(G)$ – простая неабелева группа, то G называется *почти простой* группой, при этом $E(G) \trianglelefteq G \leq Aut(E(G))$.

Следующее предложение используется в доказательстве теоремы и имеет самостоятельный интерес.

Предложение *Пусть* r *и* s *— различные простые числа, причем* r *нечетно,* G *– конечная разрешимая группа,* $r, s \in \pi(G)$*,* $G = K \leftthreetimes R$*, где* $K = O_{r'}(G)$*,* $|R| = r$ *и в* G *нет элементов порядка* rs*. Если группа* $O_{s',s,s'}(K)/O_{s',s}(K)$ *имеет нечетный порядок, то* $O_{s',s,s'}(K) = K$ *и* $[R, K] \leq O_{s',s}(K)$*.*

Доказательство. Пусть G — контрпример наименьшего порядка к предложению и $S \in Syl_s(K)$. По теореме Холла-Чунихина [3, теорема 6.4.1] в G существует бипримарная $\{r, s\}$-холлова подгруппа U, причем можно считать, что $U = SR$. Ясно, что U — группа Фробениуса с ядром S и дополнением R. Пусть $S_1 = S \cap O_{s',s}(G)$. Ввиду [3, теорема 6.3.2] централизатор $C_K(S_1)$ содержится в $O_{s',s}(K)$. По выбору группы G имеем $O_{s'}(K) = 1$ и $\Phi(S_1) = 1$. Поэтому $S_1 = O_s(K) = O_s(G)$ и $C_G(S_1) \leq S_1$. Если $N = S_1$, то утверждение предложения верно. Поэтому $S_1 < O_{s,s'}(K)$. Пусть D – s-дополнение в $O_{s,s'}(K)$. Ввиду [3, теорема 6.3.2] имеем $C_K(D) \leq S_1D$. В силу леммы Фраттини $G = S_1N_G(D)$, поэтому можно считать, что R нормализует подгруппу D.

Предположим, что $[R, D] \neq 1$. Тогда для некоторого $t \in \pi(D)$ в D найдется R-допустимая силовская t-допустимая подгруппа T такая, что $[R, T] \neq 1$. Рассмотрим подгруппу $S_1 \leftthreetimes (T \leftthreetimes R)$. Тогда подгруппу S_1 можно рассматривать как точный неприводимый TR-модуль. Теперь ввиду [21, теорема 3.1] получаем, что $C_{S_1}(R)) \neq 1$; противоречие. Таким образом, $[R, D] = 1$. Поскольку R содержится в подгруппе $C_G(D)$, нормальной в

$N_G(D)$, имеем $[K,R] \leq C_K(D) \leq S_1D$. Отсюда легко видеть, что $K = S_1D$ и, следовательно, выполняется утверждение предложения.

Предложение доказано. □

3 Доказательство теоремы

Пусть группа G удовлктворяет условиям теоремы.

Докажем утверждение (1). Имеем $q \in \pi(\overline{G}) \setminus \pi(K)$ и $|\pi(\overline{G})| \in \{3,4\}$. Поскольку группа $\overline{G}$ неразрешима, $2 \in \pi(\overline{G})$. Если $3 \notin \pi(\overline{G})$, то ввиду [12, 13, 14] группа $\overline{G}$) изоморфна $Sz(8)$, $Sz(32)$ или $Aut(Sz(32))$, откуда $|\pi(\overline{G})| = 4$ и $3 \in \pi(K)$, поэтому $|\pi(G)| \geq 5$; противоречие. Таким образом, $3 \in \pi(\overline{G})$.

Предположим, что граф $\Gamma(\overline{G})$ связен. Если $|\pi(\overline{G})| = 3$, то $\pi(\overline{G}) = \{2,3,q\}$ и ввиду [12, 14] в графе $\Gamma(\overline{G})$ вершина q смежна с вершиной 2 или 3; противоречие. Поэтому $|\pi(\overline{G})| = 4$ и, следовательно, $\pi(\overline{G}) = \pi(G)$. Ввиду [19] это противоречит неравенству $p > 3$. Несвязность графа $\Gamma(\overline{G})$ доказана. Ввиду [12, 13, 14] вершина q образует компоненту связности в графе $\Gamma(\overline{G})$ и $\overline{G}/E(\overline{G})$ – $\{2,3\}$-группа.

Предположим, что p не делит $|K|$. Тогда $\pi(K) \subseteq \{2,3\}$ и $\pi(\overline{G}) = \{2,3,p,q\}$. Поскольку вершины p и q смежны в графе $\Gamma(G)$, они смежны и в графе $\Gamma(\overline{G})$. Это противоречит доказанному в предыдущем абзаце.

Утверждение (1) доказано.

Докажем утверждение (2). Ввиду (1) имеем $p \in \pi(K) \subseteq \{2,3,p\}$. Пусть Q — подгруппа порядка q в G. Тогда $|\overline{Q}| = q$.

Если $\pi(K) = \{p\}$, то $K = O_p(G)$ и $F(H) = S(H) = 1$, т. е. утверждение (2) выполняется.

Пусть $\pi(K) = \{3,p\}$. Тогда $O_{3'}(K) = O_p(G)$. По предложению, примененному к группе KQ, имеем $O_{3',3,3'}(K) = K$. Ввиду [3, теорема 6.3.2] имеем $C_H(O_3(H)) \leq O_3(H)$. Следовательно, $F(H) = O_3(H)$ и $S(H)/F(H)$ — p-группа, т. е. утверждение (2) выполняется.

Пусть $\pi(K) = \{2,p\}$. Тогда $O_{2'}(K) = O_p(G)$. По предложению, примененному к группе KQ, имеем $O_{2',2,2'}(K) = K$. Ввиду [3, теорема 6.3.2] имеем $C_H(O_2(H)) \leq O_2(H)$. Следовательно, $F(H) = O_2(H)$ и $S(H)/F(H)$ — p-группа, т. е. утверждение (2)

Пусть $\pi(K) = \{2,3,p\}$. По предложению, примененному к группе KQ, имеем $O_{2',2,2'}(K) = K$ и Q централизует фактор-группу $K/O_{2',2}(K)$. Поскольку в группе G нет элементов порядка $3q$, $K/O_{2',2}(K)$ является p-группой. Поэтому $O_{2'}(K)$ содержит некоторую силовскую 3-подгруппу из K. Положим $N = O_{2'}(K)$ и рассмотрим подгруппу NQ. Ясно, что $3 \in \pi(N) \subseteq \{3,p\}$ и $O_{3'}(N) = O_p(N) = O_p(G)$. По предложению, примененному к группе NQ, имеем $O_{3',3,3'}(N) = N$ и Q централизует p-группу $N/O_{3',3}(N)$. Отсюда $O_3(H) = O_3(\widetilde{N})$. Из [3, теорема 6.3.2] следует, что

$C_{\widetilde{N}}(O_3(\widetilde{N})) \leq O_3(\widetilde{N})$, поэтому $O_3(\widetilde{N}) = F(\widetilde{N})$. Пусть $S \in K$ и U — $\{2,3\}$-холлова подгруппа в NS, содержащая S. Можно считать, что Q нормализует U. Но $C_U(Q) = 1$, следовательно, по теореме Томпсона подгруппа U нильпотентна. Поэтому $C_{\widetilde{NS}}(O_3(\widetilde{N})) = C_{\widetilde{N}}(O_3(\widetilde{N}))\widetilde{S}$ и, следовательно, $F(H) = O_2(H) \times O_3(H)$. Ясно, что $S(H)/F(H)$ — p-группа.

Утверждение (2) доказано.

Докажем утверждение (3). Ясно, что $\widetilde{K} = O_p(\widetilde{H}) = F(\widetilde{H})$ и ввиду предложения $\widetilde{Q}$ централизует $\widetilde{K}$. Поэтому $F^*(\widetilde{H})$ является центральным произведением подгрупп $O_p(\widetilde{H})$ и $E(\widetilde{H})$, где $E(\widetilde{H})$ — квазипростая группа с $E(\widetilde{H})/Z(E(\widetilde{H})) \cong E(\overline{G})$. Поскольку $Z(E(\widetilde{H})$ является p-группой, а ввиду [2, 12, 13, 14] порядок мультипликатора Шура группы $E(\overline{G})$ не делится на простое число, большее 3, $Z(E(\widetilde{H})) = 1$, следовательно, $E(\widetilde{H})$ — простая группа, изоморфная $E(\overline{G})$, и $F^*(\widetilde{H}) = O_p(\widetilde{H}) \times E(\widetilde{H})$. Ввиду утверждения (1) индекс $|\overline{G} : E(\overline{G})|$ не делится на p, поэтому $\widetilde{H} = O_p(\widetilde{H}) \leftthreetimes \widetilde{N}$, где $\widetilde{N} \cong \overline{G}$. Утверждение (3) доказано.

Утверждение (4) следует из утверждений (1)–(3).

Теорема доказана.

References

[1] M. Aschbacher, *Finite group theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[2] J.H. Conway, R.T. Curtis., S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[3] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, New York, 1968.

[4] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups. Number* 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[5] M. Hagie, *The prime graph of a sporadic simple group*, Comm. Algebra, **31**:9 (2003), 4405–4424.

[6] B. Khosravi, *Groups with the same prime graph as an almost sporadic simple group*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyhazi (N.S.), **25**:2 (2009), 175–187.

[7] B. Khosravi, *On the prime graphs of the automorphism groups of sporadic groups*, Arch. Math. (Brno), **45**:2 (2009), 83–94.

[8] B. Khosravi, *On the prime graph of a finite group*, Proc. Groups — St Andrews 2009, London Math. Soc. Lect. Not. Ser. Cambridge: Cambridge University Press **388**:2 (2011), 424–428.

[9] A.S. Kondrat'ev, *Finite groups having the same prime graph as the group* $Aut(J_2)$, Proc. Steklov Inst. Math., **283**:1 (2013), 78–85.

[10] A.S. Kondrat'ev, *Finite groups that have the same prime graph as the group* A_{10}, Proc. Steklov Inst. Math. **285**:1 (2014), 99–107.

[11] A.S. Kondrat'ev, *Finite groups with given properties of their prime graphs*, Algebra and Logic, **55**:1 (2016), 77–82.

[12] A.S. Kondrat'ev, I.V. Khramtsov, *O konechnykh triprimarnykh gruppakh*, Trudy IMM Uro RAN, **16**:3 (2010), 150–158.

[13] A.S. Kondrat'ev, I.V. Khramtsov, *On finite tetraprimary groups*, Proc. Steklov Inst. Math., **279**:1 (2012), 43–61.

[14] A.S. Kondrat'ev, I.V. Khramtsov, *Pis'mo v redakciju*, Trudy IMM Uro RAN, **28**:1 (2022), 276-277.

[15] A.S. Kondrat'ev, N.A. Minigulov, *Finite almost simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs as abstract graphs are isomorphic to subgraphs of the Gruenberg–Kegel graph of the alternating group A_{10}*, Siberian Electronic Mathematical Reports **15** (2018), 1378–1382.

[16] A.S. Kondrat'ev, N.A. Minigulov, *Finite solvable groups whose Gruenberg-Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **28**:2 (2022), 269–273.

[17] A.S. Kondrat'ev, N.A. Minigulov, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw*, Commun. Math. Stat., **10**:4 (2022), 653–667.

[18] A.S. Kondrat'ev, N.A. Minigulov, M.S. Nirova, *On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw. Case $q \leq 3$*, Vladikavkaz. Math. J., **27**:3 (2025), 90-100.

[19] N.A. Minigulov, *Finite almost simple 4-primary groups with connected Gruenberg–Kegel graph*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**:4 (2019), 142–146.

[20] A.S. Kondrat'ev, I.D. Suprunenko, I.V. Khramtsov. *O konechnykh 4-primarnyh gruppakh c nesvyaznym grafom Gryunberga–Kegelya i kompozicionnym faktorom, izomorfnym $L_3(17)$ ili $Sp_4(4)$*, Trudy IMM Uro RAN, **28**:1 (2022), 139-155.

[21] E. Shult, *On groups admitting fixed point free operator groups*, Illinois J. Math., **9**:4 (1965), 701–720.

Anatoly Semenovich Kondrat'ev
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS,
Ural Matematical Center
S. Kovalevskaya St., 16,
620077, Box No. 82, Yekaterinburg, Russia
Email address: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Nikolai Aleksandrovich Minigulov
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of UB RAS,
Ural Matematical Center
S. Kovalevskaya St., 16,
620077, Box No. 82, Yekaterinburg, Russia
Ural Federal University
Mira St., 19,
620002, Yekaterinburg, Russia
Email address: nikola-minigulov@mail.ru

Marina Sefovna Nirova
Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
Chernyshevsky St., 175,
360004, Nalchik, Russia
Email address: nirova_m@mail.ru