S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 12, стр. 144–144 (2026) УДК 512.552

DOI 10.17377/semi.2026.12.xxx MSC 16P10

КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА С СЖАТЫМИ ГРАФАМИ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ МАЛЫХ ПОРЯДКОВ

А.С. МОНАСТЫРЕВА

Abstract. We describe all associative finite rings that have compressed zero-divisor graphs of order not more then 4.

Keywords: associative ring, finite ring, zero-divisor graph, compressed zero-divisor graph.

1. Введение

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу).

Графом делителей нуля $\Gamma(R)$ кольца R называют граф, вершинами которого являются ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем различные две вершины x, y

Monastyreva, A.S., Finite Rings with Compressed Zero-Divisor graphs of Small Orders .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00155, https://rscf.ru/project/24-21-00155/.

Поступила 1 января 2026 г., опубликована 31 декабря 2026 г.

соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$ [1, 2].

Для построения графа делителей нуля колец больших порядков используется понятие сжатого графа делителей нуля [3, 4, 5]. Сформулируем его ниже.

Пусть R – произвольное кольцо. Для каждого элемента $x \in R$ положим $l(x) = \{a \in R;\ ax = 0\}$ и $r(x) = \{a \in R;\ xa = 0\}$. Пусть $D(R)$ – множество делителей нуля (односторонних и двусторонних) кольца R и $D(R)^* = D(R) \setminus \{0\}$.

Для начала введем отношение эквивалентности на множестве $D(R)^*$ следующим образом:

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y)$$

для любых $x, y \in D(R)^*$. Обозначим через $[x]$ класс эквивалентности элемента $x \in D(R)^*$. Для любых $a \in [x]$, $b \in [y]$, где $x, y \in D(R)^*$, очевидно, что $ab = 0$ или $ba = 0$ тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$. Обозначим через $\Gamma_\sim(R)$ граф, множеством вершин которого является множество $\{[x];\ x \in D(R)^*\}$, причем две вершины $[x]$, $[y]$ (не обязательно различные) будем соединять ребром (или петлей) тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$. Граф $\Gamma_\sim(R)$ будем называть *сжатым графом делителей нуля* кольца R.

В работе [5] был доказан следующий факт:

Предложение 1 (см. [5]). *Пусть R – произвольное кольцо и $x \in D(R)^*$. Если $x^2 = 0$, то $yz = 0$ или $zy = 0$ для любых $y, z \in [x]$; если же $x^2 \neq 0$, то $yz \neq 0$ и $zy \neq 0$ для любых $y, z \in [x]$.*

Из предложения 1 следует, что в графе $\Gamma_\sim(R)$ все вершины делятся на два типа. Если $x^2 = 0$, то $[x]$ – это вершина с петлей. Если $x^2 \neq 0$, то $[x]$ – это вершина без петли.

В работах [5] и [6] описаны связные графы с не более, чем 4 вершинами, которые являются сжатыми графами делителей нуля какого-либо ассоциативного конечного кольца. В настоящей работе другая задача: мы описываем конечные кольца, сжатые графы делителей нуля которых имеют порядок не более 4.

Нам понадобятся некоторые обозначения и определения.

Через $J(R)$ обозначим *радикал Джекобсона* кольца R. Конечное кольцо R с единицей называется *локальным*, если фактор-кольцо $R/J(R)$ является полем [11].

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих аддитивных подгрупп A_i, где $i = 1, \ldots, n$ и $n \geq 2$, т.е.

$R = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n$. Если все подгруппы A_i являются двусторонними идеалами кольца R, то кольцо R называют *разложимым* и пишут $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. Аддитивную подгруппу аддитивной группы кольца R, порожденную элементом $x \in R$, будем обозначать $\langle x \rangle$.

Элемент $e \in R$ называется *идемпотентом* кольца R, если $e = e^2$. Система ненулевых идемпотентов $e_1, \ldots, e_k$ $(k \geq 2)$ кольца R называется *ортогональной*, если $e_i e_j = e_j e_i = 0$ для любой пары различных чисел $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Далее, пусть R – произвольное кольцо (возможно, без единицы) и e – нетривиальный идемпотент кольца R, т.е. идемпотент, отличный от единицы (если она существует) и нуля. Обозначим

$$eRe = \{ere;\ r \in R\}, \quad eR(1-e) = \{er - ere;\ r \in R\},$$

$$(1-e)Re = \{re - ere;\ r \in R\}, (1-e)R(1-e) = \{r - re - er + ere;\ r \in R\}.$$

Тогда для аддитивной группы кольца R имеет место следующее разложение, называемое *двусторонним пирсовским разложением* (см. [11, С. 32]):

$$R = eRe \dotplus eR(1-e) \dotplus (1-e)Re \dotplus (1-e)R(1-e).$$

В кольце без единицы под записью $ex(1-e)$ мы будем понимать элемент $ex - exe$, аналогично $(1-e)xe = xe - exe$ и $(1-e)x(1-e) = x - ex - xe + exe$ для любого идемпотента $e \in R$ и для любого элемента $x \in R$.

Далее, положим $N(R) = \{a \in R;\ a^2 = 0\}$. Для любого подмножества S кольца R будем полагать $S^* = S \setminus \{0\}$. Обозначим также $l_R(S) = \{a \in R;\ aS = (0)\}$, $r_R(S) = \{a \in R;\ Sa = (0)\}$ и $\mathrm{Ann}_R(S) = \{a \in R;\ aS = Sa = (0)\}$. Будем также использовать обозначения $l(R) = l_R(R), r(R) = r_R(R)$ и $Ann(R) = Ann_R(R)$.

2. Конечные кольца, сжатые графы делителей нуля которых содержат не более трех вершин

Сначала сделаем одно замечание, которое неоднократно будем использовать на протяжении работы.

Замечание 1. Заметим, что для любого локального кольца R имеем $D(R) = J(R)$ [11], то есть $\Gamma_\sim(R) = \Gamma_\sim(J(R))$. Следовательно, описание локального кольца R с ограничениями на сжатый граф делителей нуля сводится к описанию его радикала, который является нильпотентным кольцом [11]. Таким образом, локальный случай всегда сводится к нильпотентному случаю.

Лемма 1. *Пусть R – конечное нильпотентное (локальное) кольцо. Тогда в графе $\Gamma_\sim(R)$ существует единственная сильная вершина $[b]$ с петлей, причем $[b] = (l(R) \cup r(R))^*$.*

Доказательство. Пусть R – конечное нильпотентное кольцо. Ясно, что ненулевые элементы аннулятора $Ann(R)$ образуют сильную вершину с петлей. Двух сильных вершин с петлей в сжатом графе делителей нуля не может быть, потому что если есть две сильные вершины $[x]$ и $[y]$ с петлей в сжатом графе делителей нуля, то $x \sim y$, что противоречит определению сжатого графа делителей нуля. Пусть $[x]$ – сильная вершина с петлей графа $\Gamma_\sim(R)$. Тогда $l(R)^* \cup r(R)^* \subseteq [b]$. Предположим, что обратное включение не верно. Тогда найдется элемент $a \in [b]$, такой, что $a \notin l(R) \cup r(R)$. Значит, найдутся элементы $z, y \in R$, для которых $ay = 0, ya \neq 0$ и $az \neq 0, za = 0$. Рассмотрим элемент $z + y$. Он не равен нулю, иначе элемент a аннулирует y и z с обеих сторон, чего быть не может. Более того, $(z + y)a = ya \neq 0$ и $a(z + y) = az \neq 0$; противоречие, поскольку вершина $[a] = [x]$ является сильной. Таким образом, $[x] = l(R)^* \cup r(R)^*$. Лемма доказана. □

В статье [5] полностью описаны конечные кольца, сжатые графы делителей нуля которых имеют только одну вершину:

Теорема 1 [5]**.** *Пусть R – конечное кольцо. Граф $\Gamma_\sim(R)$ имеет порядок 1 тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *R – ненулевое нильпотентное кольцо с нулевым умножением;*
(2) *R – локальное кольцо, причем $J(R)^2 = (0)$ и $J(R) \neq (0)$.*

Используя результаты работ [5, 8, 7], легко показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть R – конечное кольцо. Граф $\Gamma_\sim(R)$ имеет порядок 2 тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$R \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ (в этом случае обе вершины без петли);*
(2) *R – нильпотентное кольцо, такое что $R \neq l(R) \cup r(R)$ и $xy \neq 0$ для всех $x, y \notin l(R) \cup r(R)$;*
(3) *R – локальное кольцо, причем $J \neq l(J) \cup r(J)$ и $xy \neq 0$ для всех $x, y \notin l(J) \cup r(J)$, где $J = J(R)$;*
(4) *R – ненильпотентное кольцо без единицы, причем $R/J(R)$ – поле, $R = A \oplus B$, где $B^2 = (0)$ (возможно, что $B = (0)$), A – ненулевое неразложимое кольцо, $A = eAe \dotplus eA(1-e) \dotplus$*

$(1-e)Ae \dotplus (1-e)A(1-e)$, $e = e^2 \in A$, $\overline{e}$ является единицей в фактор-кольце $A/J(A)$, $eAe \cong GF(p^n)$ (p – простое число и $n \geq 1$), $eA(1-e) \subseteq l_A(A)$, $(1-e)Ae \subseteq r_A(A)$, $(1-e)A(1-e) = Ann_A(A)$.

Более того, сжатые графы делителей нуля колец типов (2), (3) и (4) имеют ровно одну вершину с петлей.

Доказательство. Пусть R – конечное кольцо, причем $\Gamma_\sim(R)$ имеет порядок 2. В работе [5] доказано, что в этом случае выполняется одно из следующих условий:

(1) $R \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$, где $q_i = p_i^{s_i}$, p_i – простое число, $s_i \geq 1$, $i = 1, 2$;
(2) R – нильпотентное кольцо;
(3) R – локальное кольцо и $\Gamma_\sim(R) = \Gamma_\sim(J(R))$;
(4) R – ненильпотентное кольцо без единицы, причем $R/J(R)$ – поле, $J^2(R) \subseteq \mathrm{Ann}(R)$ и, в частности, $J(R)^3 = (0)$.

В статье [8] доказано, что если ненильпотентное кольцо R без единицы имеет сжатый граф делителей нуля с двумя вершинами, то это равносильно тому, что $R = A \oplus B$, где $B^2 = (0)$ (возможно, что $B = (0)$), A – ненулевое неразложимое кольцо, $A = eAe \dotplus eA(1-e) \dotplus (1-e)Ae \dotplus (1-e)A(1-e)$, $e = e^2 \in A$, $\overline{e}$ является единицей в фактор-кольце $A/J(A)$, $eAe \cong GF(p^n)$ (p – простое число и $n \geq 1$), $eA(1-e) \subseteq l(A)$, $(1-e)Ae \subseteq r(A)$, $(1-e)A(1-e) = Ann(A)$.

Далее, в статье [7] описаны нильпотентные конечные кольца с полными сжатыми графами делителей нуля. В частности, доказано, что для нильпотентного конечного кольца R граф $\Gamma_\sim(R)$ является полным (с петлей) порядка 2 тогда и только тогда, когда $R \neq l(R) \cup r(R)$ и $xy \neq 0$ для всех $x, y \notin l(R) \cup r(R)$.

Используя замечание 1 и описание нильпотентных колец, у которых сжатый граф делителей нуля имеет ровно две вершины, получим описание локальных колец с сжатыми графами делителей нуля порядка 2. □

Теорема 3. *Пусть R – конечное кольцо. Граф $\Gamma_\sim(R)$ имеет порядок 3 тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *R – локальное кольцо, такое, что $J(R)$ является кольцом типа (2) из настоящей теоремы;*
(2) *R – нильпотентное кольцо, такое, что:*
(1) $xy \neq 0$ или $yx \neq 0$ для всех $x, y \notin l(R) \cup r(R)$ в R;
(2) в R существуют $u, v \notin l(R) \cup r(R)$, такие, что $uv = 0$;

(3) $l(x) \cup r(x) = l(z) \cup r(z)$ *для любого* $x \notin l(R) \cup r(R)$, *где* $z = u$ *или* $z = v$;

(3) $R \cong GF(p^{t_1}) \oplus GF(p^{t_2}) \dotplus e_1 R e_2$, *где* p *– простое число,* e_i *является единицей* $GF(p^{t_i})$, $i = 1, 2$, $e_1 + e_2 = 1$ *– единица кольца* R;

(4) R *– ненильпотентное кольцо без единицы,* eRe *является локальным кольцом,* $J(R)^2 = (0)$, *причем либо* eRe *не является полем, либо* $eR(1-e) \neq (0)$ *или* $(1-e)Re \neq (0)$

(5) R *– нильпотентное кольцо, такое, что выполняются условия:*
(1) Пусть $x \notin l(R)^* \cup r(R)^*$. *Если* $x^2 = 0$, *то* $l(x) \cup r(x) = N(R)$. *Если* $x^2 \neq 0$, *то* $x^4 = 0$ *и* $l(x) \cup r(x) = l(R) \cup r(R)$;
(2) $l(R) \cup r(R) \subsetneq N(R) \subsetneq R$;

(6) R *– локальное кольцо, такое, что для радикала Джекобсона* $J = J(R)$ *выполняются условия:*
(1) Пусть $x \in J$ *и* $x \notin l(J)^* \cup r(J)^*$.
Если $x^2 = 0$, *то* $l(x) \cup r(x) = N(J)$.
Если $x^2 \neq 0$, *то* $x^4 = 0$ *и* $l(x) \cup r(x) = l(J) \cup r(J)$;
(2) $l(J) \cup r(J) \subsetneq N(J) \subsetneq J$;

Кольца типов (1)–(3) имеют полный сжатый граф делителей нуля (треугольник с одной петлей). Сжатый граф делителей нуля колец (4)–(6) является цепью $[a] - [b] - [c]$, *причем вершина* $[a]$ *без петли, а вершины* $[b]$ *и* $[c]$ *являются вершинами с петлями. Кроме того,* $R^4 = (0)$, *если* R *является кольцом типа (2).*

Доказательство. Пусть R – конечное кольцо, причем $\Gamma_{\sim}(R)$ имеет порядок 3. В статье [5] доказано, что среди всех связных графов с тремя вершинами быть сжатыми графами делителей нуля какого-либо конечного ассоциативного кольца могут только два графа:

(1) цепь $[a] - [b] - [c]$, причем вершина $[a]$ не имеет петли, а вершины $[b]$ и $[c]$ являются вершинами с петлями;
(2) цикл $[a] - [b] - [c] - [a]$, причем только вершина $[b]$ имеет петлю, а вершины $[a]$ и $[c]$ без петель.

Во втором случае граф является полным. В статье [8] доказано, что ненильпотентное кольцо имеет полный сжатый граф делителей нуля с тремя вершинами тогда и только тогда, когда R является локальным либо $R \cong GF(p^{t_1}) \oplus GF(p^{t_2}) \dotplus e_1 R e_2$, где p – простое число, e_i является единицей $GF(p^{t_i})$, $i = 1, 2$, $e_1 + e_2 = 1$ – единица кольца R.

Как отмечалось в замечании 1, локальный случай сводится к нильпотентному. Нильпотентные кольца с полными сжатыми графами делителей нуля описаны в работе [7], именно доказано, что граф $\Gamma_\sim(R)$ является полным (с петлей) порядка более, чем 2, тогда и только тогда, когда выполняются следующие три условия:
(1) $xy \neq 0$ или $yx \neq 0$ для всех элементов $x, y \notin l(R) \cup r(R)$ в R;
(2) в R существуют элементы $u, v \notin l(R) \cup r(R)$, такие, что $uv = 0$;
(3) в R для всех элементов $x, y \notin l(R) \cup r(R)$ если $x \notin l(y) \cup r(y)$, то $l(x) \cup r(x) = l(y) \cup r(y)$.

Заметим, что данное описание не позволяет оценить порядок графа $\Gamma_\sim(R)$. Заменив условие (3) на условие (3*), мы получим точное описание нильпотентных колец, у которых сжатый граф делителей нуля имеет ровно три вершины, из которых только одна вершина имеет петлю:

(3*) Пусть $u, v \notin l(R) \cup r(R)$, причем $uv = 0$. Тогда $l(x) \cup r(x) = l(z) \cup r(z)$ для любого $x \notin l(R) \cup r(R)$, где $z = u$ или $z = v$.

Пусть теперь R – конечное кольцо, сжатый граф делителей нуля является цепью $[a] - [b] - [c]$, причем вершина $[a]$ без петли, а вершины $[b]$ и $[c]$ являются вершинами с петлями.

Сделаем несколько замечаний по поводу свойств такого кольца.

В кольце R не существует ортогональных идемпотентов, так как каждая пара ортогональных идемпотентов образует две вершины без петель, которые смежны друг с другом. Поэтому кольцо R является либо нильпотентным, либо локальным, либо ненильпотентным без единицы, таким, что $R/J(R)$ – поле. Локальный случай сводится к нильпотентному (замечание 1). Поэтому можем считать, что кольцо R нильпотентное или ненильпотентное без единицы. В обоих случаях $D(R) = R$ [11].

Далее, пусть $b_1, b_2 \in [b], c_1, c_2 \in [c]$. Заметим, что $[b_1 + c_1]$ смежна с вершиной $[c]$, то есть $b_1 + c_1 \in [b] \cup [c]$. Следовательно, $(b_1 + c_1)^2 = 0$. Поскольку $b_1^2 = c_1^2 = 0$, причем $b_1c_1 = 0$ или $c_1b_1 = 0$, то получаем, что $b_1c_1 = c_1b_1 = 0$. Аналогично доказывается, что $b_1b_2 = b_2b_1 = 0$ и $c_1c_2 = c_2c_1 = 0$. Таким образом, получаем, что любая пара элементов из $[b] \cup [c]$ аннулируют друг друга с обеих сторон.

Рассмотрим сначала случай, когда кольцо R является ненильпотентным кольцом без единицы. Тогда $R/J(R) \cong GF(q)$ и в кольце R существует главный идемпотент e, такой, что $\overline{e}$ является единицей поля $R/J(R)$ [11]. Обозначим $A_1 = eR(1 - e)$, $A_2 = (1 - e)Re$. Элементы из A_1 и A_2 в квадрате равны нулю и аннулируются элементом e хотя бы с одной стороны, то есть $A_1^*, A_2^* \subseteq [b]$. Значит, в частности, $A_1A_2 = A_2A_1 = (0)$. Отсюда $(A_1^* + A_2^*)^2 = (0)$, но элементы множества $A_1^* + A_2^*$ порождают вершины, которые не смежны с вершиной $[e]$. Это говорит о том, что $A_1^* + A_2^* \subseteq [c]$. Предположим, что $J(eRe) \neq (0)$. Обозначим $J = J(eRe)$. Тогда элементы из множества $Ann_J(J)$ в квадрате равны нулю и образуют вершины, не смежные с вершиной $[e]$, то есть $Ann_J(J)^* \subseteq [c]$. Тогда для любого ненулевого элемента $j \in J$ вершина $[j]$ смежна с вершиной $[c]$ и не смежна с вершиной $[e]$. Значит, $J^* \subseteq [c]$. В частности, $J^2 = (0)$. Далее, ненулевые элементы нильпотентного подкольца $B = (1-e)R(1-e)$ образуют вершины, которые смежны с вершиной $[e]$. Следовательно, $B^* \subseteq [b]$. Таким образом, $(A_1+A_2+B+J)^* \subseteq [b] \cup [c]$ и $J(R) = A_1 + A_2 + B + J$, то есть $J(R)^2 = (0)$. Кроме того, $eRe/J = eRe/eRe \cap J(R) \cong (R + eRe)/J(R) \cong GF(q)$ [11], то есть кольцо eRe является локальным. Чтобы вершина $[c]$ не оказалась пустой необходимо, чтобы eRe не было полем либо одна из пирсовских компонент $eR(1-e)$ и $(1-e)Re$ была ненулевой. Итак, кольцо R ненильпотентное, без единицы, eRe является локальным кольцом, $J(R)^2 = (0)$, причем либо eRe не является полем, либо $eR(1-e) \neq (0)$ или $(1-e)Re \neq (0)$.

Докажем теперь обратное: если кольцо R является кольцо типа (4), то граф $\Gamma_\sim(R)$ является цепью $[a] - [b] - [c]$, причем вершина $[a]$ без петли, а вершины $[b]$ и $[c]$ являются вершинами с петлями. Действительно, построим сжатый граф делителей нуля для такого кольца R. Пусть e – главный идемпотент кольца R. Тогда $eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e) \subseteq J(R)$, то есть $(eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e))^2 = (0)$. Элементы кольца R распределяются следующим образом:

$$[e] = eRe \setminus J(eRe) + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e),$$
$$[b] = (eR(1-e) + (1-e)R(1-e))^* \cup ((1-e)Re + (1-e)R(1-e))^*,$$
$$[c] = (eR(1-e)^* + (1-e)Re^* + (1-e)R(1-e)) \cup$$
$$(J(eRe)^* + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e)).$$

Осталось рассмотреть случай, когда кольцо R является нильпотентным. Докажем, что $x^4 = 0$ для любого $x \in R$. Пусть $x^{2t} = 0, x^{2t-1} \neq 0$, $t \geq 2$. Тогда $x^{t-1} \in [a]$, так как $(x^{t-1})^2 \neq 0$. Далее, $x^{t-1} \cdot x^{t+1} = 0$, то есть $x^{t+1} \in [b]$. Следовательно, $x^{t+1} \cdot x = 0$ также. Это означает, что $t + 2 \geq 2t$, или $t \leq 2$ и $x^4 = 0$. Пусть теперь $x^{2t+1} = 0, x^{2t} \neq 0$. Тогда $x, x^t \in [a]$ и $x^{t+1} \in [b]$. Значит, $a \cdot a^{t+1} = 0$ и $t \leq 1$. Таким образом, получили $x^3 = 0$.

По лемме 1 имеем, что $[b] = l(R)^* \cup r(R)^*$. Поэтому кольцо R удовлетворяет следующим условиям:

(1) Пусть $x \notin l(R)^* \cup r(R)^*$. Если $x^2 = 0$, то $l(x) \cup r(x) = N(R)$. Если $x^2 \neq 0$, то $x^4 = 0$ и $l(x) \cup r(x) = l(R) \cup r(R)$.

(2) $l(R) \cup r(R) \subsetneq N(R) \subsetneq R$.

Легко проверяется, что сжатый граф делителей нуля кольца R с такими свойствами является цепью $[a]-[b]-[c]$, где $[a] = R \setminus N(R)$, $[b] = l(R)^* \cup r(R)^*$ и $[c] = N(R)^*$, причем вершина $[a]$ без петли, а вершины $[b]$ и $[c]$ являются вершинами с петлями.

Теорема доказана. □

3. Конечные кольца с единицей, сжатые графы делителей нуля которых имеют ровно 4 вершины

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Предложение 1. *Пусть в графе $\Gamma_\sim(R)$ существует хотя бы одна сильная вершина без петли, причем кольцо R не является нильпотентным или локальным. Тогда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *R – кольцо с единицей, $R = e_1Re_1 \dotplus e_2Re_2 \dotplus e_1Re_2$, причем e_1Re_1 – поле, e_2Re_2 – локальное кольцо, $[e_1]$ – сильная вершина без петли;*

(2) *R – кольцо с единицей, $R = e_1Re_1 \dotplus e_2Re_2 \dotplus e_2Re_1$, причем e_1Re_1 – поле, e_2Re_2 – локальное кольцо, $[e_1]$ – сильная вершина без петли;*

(3) *R – ненильпотентное кольцо без единицы, $e = e_1 + \ldots + e_n$, $n \geq 2$, вершины $[e], [e_1], \ldots, [e_n]$ не являются сильными;*

(4) *R – ненильпотентное кольцо без единицы, $R/J(R)$ является полем, вершина $[e]$ является сильной.*

Доказательство. Пусть кольцо R не является локальным или нильпотентным, а $[a]$ – сильная вершина без петли графа $\Gamma_\sim(R)$.

Случай 1. Пусть кольцо R имеет единицу. Тогда $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, $n \geq 1$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – попарно ортогональные идемпотенты [11]. Поскольку кольцо R не является локальным, то $n \geq 2$ [11]. Если вершина $[e_i]$ не является сильной ни для какого i, то $ae_i = 0$ или $e_ia = 0$ для всех i. Поэтому

$$a^2 = a \cdot 1 \cdot a = a(e_1 + e_2 + \ldots + e_n)a = 0;$$

противоречие. Поэтому, не нарушая общности, можем полагать, что $[a] = [e_1]$. Если $n \geq 3$, то вершины $[e_1]$ и $[e_1 + e_2]$ не смежны. Так как $[e_1]$ является сильной вершиной, то $[e_1] = [e_1 + e_2]$. Тогда вершина $[e_1 + e_2] = [e_1]$ должна быть смежной с вершиной $[e_2]$; противоречие. Следовательно, $n = 2$ и $1 = e_1 + e_2$. Более того, $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ либо $R/J(R) \cong M_2(GF(q))$. Во втором случае $R \cong M_2(S)$ для некоторого локального кольца S, причем $e_1 = e_{11}, e_2 = e_{22}$ [11]. Вершина $[e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22}]$ не смежна с сильной вершиной $[e_{11}]$, но элемент $e_{11}+e_{12}+e_{21}+e_{22}$ является делителем нуля, так как

$$(e_{11}+e_{12}+e_{21}+e_{22})(e_{11}+e_{12}+(p-1)e_{21}+(p-1)e_{22})=0,$$

где p – характеристика кольца S. Значит, $[e_{11}+e_{12}+e_{21}+e_{22}]=[e_{11}]$, при этом эта вершина должна быть смежна с вершиной $[e_{22}]$; противоречие. Поэтому можем заключить, что $R/J(R)\cong GF(q_1)\oplus GF(q_2)$. Так как $R/J(R)$ коммутативно, то $e_1Re_2^*+e_2Re_1^*\subseteq J(R)$. Однако эти элементы не аннулируются e_1 ни с одной стороны, то есть либо $e_1Re_2^*+e_2Re_1^*\subseteq[e_1]$, либо множество $e_1Re_2^*+e_2Re_1^*$ пусто. Если $e_1Re_2^*+e_2Re_1^*\subseteq[e_1]$, то элементы из $e_1Re_2^*+e_2Re_1^*$ должны аннулировать e_2 хотя бы с одной стороны; противоречие. Значит, $e_1Re_2=(0)$ или $e_2Re_1=(0)$. Будем полагать, что $e_2Re_1=(0)$. Итак, $R=e_1Re_1\dotplus e_2Re_2\dotplus e_1Re_2$, причем e_1Re_1 и e_2Re_2 являются локальными кольцами [11]. Предположим, что в e_1Re_1 существует ненулевой элемент j, такой, что $j^2=0$. Тогда $[j]\neq[e_1]$, поэтому эти вершины должны быть смежны; противоречие. Это означает, что e_1Re_1 не содержит нильпотентных элементов, то есть является прямой суммой конечных полей [11]. Однако выше мы доказали, что единица раскладывается сумму только двух попарно ортогональных идемпотентов. Поэтому e_1Re_1 является полем.

Случай 2. Пусть кольцо R является ненильпотентным кольцом без единицы. Тогда в R существует главный идемпотент e и $D(R)=R$ [11]. Более того, e можно расписать как сумму попарно ортогональных идемпотентов $e=e_1+e_2+\ldots+e_n$, где $n\geq 1$. Предположим, что вершина $n\geq 2$. Заметим, что в этом случае вершина $[e]$ не смежна ни с одной из вершин $[e_i]$, $i=1,2,\ldots,n$. Значит, при $n\geq 2$ вершина $[e]$ не может быть сильной. Действительно, если $[e]$ является сильной, то $[e]=[e_1]$, так как эти вершины не смежны. Тогда сильная вершина $[e]=[e_1]$ должна быть смежна с $[e_2]$, чего быть не может. Итак, вершина $[e]$ не является сильной. Аналогично вершины $[e_i]$ при всех i не могут быть сильными, так как не смежны с $[e]$.

Если вершина $[e]$ является сильной, то, как было показано выше, e не раскладывается в прямую сумму попарно ортогональных идемпотентов, то есть $R/J(R)$ является полем. Возьмем ненулевой элемент $j\in J(eRe)$, такой, что $j^2=0$ (если такой существует). Тогда вершина с петлей $[j]$ должна быть смежна с $[e]$; противоречие. Значит, в подкольце eRe нет нильпотентных элементов, то есть оно является полем [11] (так как e не раскладывается в сумму попарно ортогональных идемпотентов).

Предложение доказано. $\square$

Лемма 2. *Пусть $R \cong M_n(S)$, где $n \geq 2$ и S – конечное кольцо с единицей. Тогда граф $\Gamma_\sim(R)$ содержит квадрат $[e_{11}] - [e_{12}] - [e_{22}] - [e_{21}] - [e_{11}]$ с диагональю $[e_{11}] - [e_{22}]$, причем вершины $[e_{12}]$ и $[e_{21}]$ имеют петли, а вершины $[e_{11}]$ и $[e_{22}]$ без петель. В частности, граф $\Gamma_\sim(R)$ содержит не менее 4 вершин.*

Доказательство. Вершины $[e_{11}]$ и $[e_{22}]$ не имеют петель, при этом смежны друг с другом, то есть это две различные вершины. Вершины $[e_{12}]$ и $[e_{21}]$ – две вершины с петлями, которые не смежны друг с другом, то есть $[e_{12}] \neq [e_{21}]$. □

В следующей теореме описывается структура конечных колец с единицей, не являющихся локальными, у которых сжатый граф делителей нуля состоит ровно из четырех вершин. Напомним, что описание локального случая сводится к нильпотентному (см. замечание 1).

Теорема 4. *Пусть R – конечное кольцо с единицей, не являющееся локальным. Граф $\Gamma_\sim(R)$ имеет порядок 4 тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$R \cong GF(q) \oplus S$, где S – локальное кольцо, $J(S)^2 = (0)$, $J(S) \neq (0)$ ($\Gamma_\sim(R)$ в этом случае изоморфен графу типа 1);*
(2) *$R = e_1Re_1 \oplus e_2Re_2 + e_1Re_2$, где e_1Re_1 – конечное поле, S – локальное кольцо, причем $J(S)^2 = (0)$, $J(S) \neq (0)$, $e_1Re_2 \neq (0)$ ($\Gamma_\sim(R)$ в этом случае изоморфен графу типа 7);*
(3) *$R = e_1Re_1 \oplus e_2Re_2 + e_2Re_1$, где e_1Re_1 – конечное поле, S – локальное кольцо, причем $J(S)^2 = (0)$, $J(S) \neq (0)$, $e_2Re_1 \neq (0)$ ($\Gamma_\sim(R)$ в этом случае изоморфен графу типа 7).*

Доказательство. Пусть R – конечное кольцо с единицей, сжатый граф делителей нуля которого состоит из четырех вершин.

Согласно основному результаты работы [6] только восемь графов, состоящие из четырех вершин, могут быть сжатыми графами делителей нуля какого-либо конечного ассоциативного кольца:

тип 1: цепь $[a]-[b]-[c]-[d]$, где только вершина $[c]$ имеет петлю;

тип 2: звезда с сильной вершиной $[b]$ и висячими вершинами $[a], [c], [d]$, причем только вершина $[d]$ не имеет петли;

тип 3: звезда с сильной вершиной $[b]$ и висячими вершинами $[a], [c], [d]$, причем все вершины имеют петли;

тип 4: граф на четырех вершинах $[a], [b], [c], [d]$, где $[b]$ –сильная вершина с петлей, $[c]$ и $[d]$ – вершины без петель степени 2, смежные друг с другом, $[a]$ – висячая вершина без петли;

тип 5: граф на четырех вершинах $[a],[b],[c],[d]$, где $[b]$ –сильная вершина с петлей, $[c]$ и $[d]$ – вершины без петель степени 2, смежные друг с другом, $[a]$ – висячая вершина с петлей;

тип 6: граф на четырех вершинах $[a],[b],[c],[d]$, где $[b]$ –сильная вершина с петлей, $[c]$ и $[d]$ – вершины степени 2, смежные друг с другом, причем вершина $[c]$ имеет петлю, а вершина d не имеет, а $[a]$ – висячая вершина без петли;

тип 7: квадрат $[a]-[b]-[c]-[d]-[a]$ с диагональю $[a]-[c]$, причем ровно две вершины имеют петли - это $[a]$ и $[b]$;

тип 8: квадрат $[a]-[b]-[c]-[d]-[a]$ с двумя диагоналями, причем только вершина $[b]$ имеет петлю. □

В [7] доказано, что сжатый граф делителей нуля конечного кольца имеет мост, вершины которого не являются висячими, тогда и только тогда, когда сжатый граф делителей нуля является графом типа 1 и R – это кольцо (1) из формулировки настоящей теоремы.

В работе [10] описаны конечные кольца, у которых сжатые графы делителей нуля являются ациклическими. В частности, доказано, что если сжатый граф делителей нуля является звездой, то кольцо локальное или нильпотентное. Значит, графы типа 2 и 3 не возможны для конечного кольца с единицей, не являющегося локальным. Далее, в [8] описаны конечные кольца с единицей, сжатые графы делителей нуля которых являются полными. Как следует из результатов этой работы, если полный сжатый граф делителей нуля кольца R имеет более трех вершин, то кольцо R является локальным. Значит, граф типа 8 тоже не возможен в нашем случае. Кроме того, если сжатый граф делителей нуля изоморфен графу типа 6, то в кольце нет ортогональных идемпотентов, поскольку любая пара ортогональных идемпотентов образует в сжатом графе делителей нуля две различные вершины без петель, смежные друг с другом. Следовательно, в этом случае если кольцо с единицей, то оно локальное [11].

Таким образом, нам осталось описать конечные кольца с единицей, у которых сжатый граф делителей нуля является графом типа 4, 5 или 7. Если единица не раскладывается в сумму ортогональных идемпотентов, то кольцо является локальным [11], чего быть не может. Значит, $1 = e_1 + e_2$, то есть единица является суммой ровно двух ортогональных идемпотентов (иначе в графе $\Gamma_\sim(R)$ будет более двух вершин без петель). Поэтому $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ либо $R/J(R) \cong M_2(GF(q))$ [11]. Если $R/J(R) \cong M_2(GF(q))$, то $R \cong M_2(S)$, где S – локальное кольцо [11]. По лемме 2 в этом случае граф $\Gamma_\sim(R)$ должен содержать определенного вида квадрат, что не возможно ни для одного из графов типа 4, 5 или 7. Таким образом, во всех трех случаях имеем, что $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ для некоторых q_1, q_2.

Пусть R – конечное кольцо с единицей, не являющееся локальным, причем $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ и граф $\Gamma_\sim(R)$ изоморфен графу типа 4. Тогда $R = e_1Re_1 \dotplus e_2Re_2 \dotplus e_1Re_2 \dotplus e_2Re_1$, где e_1Re_1, e_2Re_2 являются локальными кольцами [11]. Не нарушая общности, можем полагать, что $[c] = [e_1]$ и $[d] = [e_2]$. Далее, $e_1Re_2^*, e_2Re_1^* \subset [b]$, так как эти элементы в квадрате равны нулю. Поскольку элементы из $e_1Re_2^* + e_2Re_2^*$ не аннулируют ни e_1, ни e_2 ни с одной стороны, то эти элементы содержатся в $[a]$ (если они существуют). Пусть $j \in J(e_1Re_1)^*$, причем $j^2 = 0$. Тогда $[j] = [b]$ и, более того, вершина $[j]$ смежна с $[e_1]$; противоречие. Следовательно, $J(e_1Re_1) = (0)$, то есть e_1Re_1 является полем [11]. Аналогично доказывается, что e_2Re_2 тоже является полем. Заметим, что $e_1Re_1^* + e_1Re_2 \subset [e_1]$ и $e_2Re_2^* + e_2Re_1 \subset [e_2]$. Предположим, что $e_1Re_2 \neq (0)$ и $e_2Re_1 \neq (0)$. Тогда мы можем взять ненулевые элементы e_1re_2 и e_2se_1, где $r, s \in R$. Имеем $e_1+e_1re_2 \in [e_1]$ и $e_2+e_2se_1 \in [e_1]$ согласно замечанию выше. Поэтому эти элементы должны аннулировать друг друга хотя бы с одной стороны, то есть

$$(e_1 + e_1re_2)(e_2 + e_2se_1) = 0 \text{ или } (e_2 + e_2se_1)(e_1 + e_1re_2) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$e_1re_2 + e_1re_2se_1 = 0 \text{ или } e_2se_1 + e_2se_1re_2 = 0.$$

Поскольку в пирсовском разложении кольца сумма является прямой (групповой), то из последних равенств получаем, что $e_1re_2 = 0$ или $e_2se_1 = 0$; противоречие. Это означает, что $e_1Re_2 = (0)$ или $e_2Re_1 = (0)$. Будем полагать, что $e_2Re_1 = (0)$. Итак, имеем $R = e_1Re_1 \dotplus e_2Re_2 \dotplus e_1Re_2$, где e_1Re_1, e_2Re_2 являются конечными полями. Если также $e_1Re_2 = (0)$, то кольцо является прямой суммой двух полей и его сжатый граф делителей нуля состоит из двух вершин без петель. Противоречие. Поэтому $e_1Re_2 \neq (0)$. Кроме того, легко проверить, что элементы $e_1Re_1^* + e_2Re_2^* + e_1Re_2$ не являются делителями нуля. Таким образом, $[c] = [e_1] = e_1Re_1^* + e_1Re_2$, $[d] = [e_2] = e_2Re_2^* + e_1Re_2$, $[b] = e_1Re_2^*$, а вершина $[a]$ остается пустой, поскольку других делителей нуля в кольце R нет. Противоречие доказывает, что этот случай не возможен.

Теперь рассмотрим случай, когда R – конечное кольцо с единицей, не являющееся локальным, такое, что $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ и граф $\Gamma_\sim(R)$ изоморфен графу типа 5. Тогда, как и в предыдущем случае, $R = e_1Re_1 \dotplus e_2Re_2 \dotplus e_1Re_2 \dotplus e_2Re_1$, где

e_1Re_1, e_2Re_2 являются локальными кольцами. Не нарушая общности, мы так же, как и выше, можем полагать, что $[c] = [e_1]$ и $[d] = [e_2]$. Далее, возьмем элемент $j \in J(e_1Re_1)^*$, такой, что $j^2 = 0$. Тогда $[j]$ – вершина с петлей, которая смежна с $[e_2]$ и не смежна с $[e_1]$; противоречие. Значит, таких элементов не существует, то есть $J(e_1Re_1) = (0)$ и кольцо e_1Re_1 является полем [11]. Аналогично доказывается, что кольцо e_2Re_2 – поле. Заметим, что $e_1Re_2^*, e_2Re_1^* \subset [b]$, так как эти элементы аннулируют и e_1, и e_2. Однако $e_1Re_2^* + e_2Re_1^* \subset [a]$, так как эти элементы (они могут и отсутствовать), наоборот, не аннулируют ни e_1, ни e_2. Кроме того, $e_1Re_1^* + e_1Re_2, e_1Re_1^* + e_2Re_1 \subset [e_1]$ и $e_2Re_2^* + e_1Re_2, e_2Re_2^* + e_2Re_1 \subset [e_2]$. Заметим, что для любых $a_1 \in [a]$ и $b_1 \in [b]$ имеем $(a_1 + b_1)a_1 = 0$ или $a_1(a_1 + b_1) = 0$, то есть $a_1 + b_1 \in [a] \cup [b]$. Поэтому $(a_1 + b_1)^2 = 0$. Значит, $a_1b_1 = b_1a_1 = 0$. Используя этот факт, аналогично доказывается, что $b_1b_2 = b_2b_1 = 0$ для всех $b_1, b_2 \in [b]$. Поэтому $e_1Re_2 \cdot e_2Re_1 = (0)$ и $e_2Re_2 \cdot e_2Re_1 = (0)$. Предположим, что $e_1Re_2 \neq (0)$ и $e_2Re_2 \neq (0)$. Тогда $e_1Re_2 \cdot (e_1 + e_1Re_2 + e_2Re_1) = (0)$, то есть элементы из множества $e_1 + e_1Re_2 + e_2Re_1$ является делителями нуля. Однако эти элементы не аннулируются ни e_1, ни e_2 ни с одной стороны. Следовательно, $e_1 + e_1Re_2 + e_2Re_1 \subset [a]$. Как и выше, можно показать, что $a_1a_2 = a_2a_1 = 0$ для всех $a_1, a_2 \in [a]$. Поэтому $(e_1 + e_1Re_2 + e_2Re_1)(e_1Re_2 + e_2Re_1) = (0)$ и $(e_1Re_2 + e_2Re_1)(e_1 + e_1Re_2 + e_2Re_1) = (0)$. Отсюда $e_1Re_2 = (0)$; противоречие. Таким образом, $e_1Re_2 = (0)$ или $e_2Re_1 = (0)$. Будем считать, что $e_2Re_1 = (0)$. Тогда $[c] = e_1Re_1^* + e_1Re_2$, $[d] = e_2Re_2^* + e_1Re_2$ и $[b] = e_1Re_2^*$, причем вершина $[a]$ остается пустой. Противоречие показывает, что этот случай тоже не возможен.

Пусть теперь R – конечное кольцо с единицей, не являющееся локальным, и граф $\Gamma_{\sim}(R)$ изоморфен графу типа 7. Как отмечалось выше, $R/J(R) \cong GF(q_1) \oplus GF(q_2)$ для некоторых q_1, q_2, то есть e_1Re_1, e_2Re_2 являются локальными кольцами [11]. По предложению 1 $R = \dot{+}\ e_2Re_2\ \dot{+}\ e_1Re_2$, где e_1Re_1 – поле, e_2Re_2 – локальное кольцо. Далее, $e_1Re_2 \subseteq [a]$, так как элементы из этого множества аннулируют элементы e_1 и e_2, а также в квадрате равны нулю. Обозначим $J = J(e_2Re_2)$. Докажем, что $J^2 = (0)$. Заметим, что ненулевые элементы из $Ann_J(J)$ не аннулируются e_2, причем в квадрате равны нулю. Поэтому $Ann_J(J) \subset [b]$. Возьмем произвольный ненулевой элемент $j \in J \setminus Ann_J(J)$. Вершина $[j]$ должна быть смежна с $[b]$, так как $Ann_J(J) \subset [b]$, и $[j]$ не должна быть смежна с $[e_2]$. Поэтому $[j] = [b]$. Таким образом, $J^* \subset [b]$. Пусть $j, y \in J^*$. Тогда $j^2 = 0, y^2 = 0$ и, например,

$jy = 0$. Тогда $y + j \in J \subset [b]$, то есть $(j + y)^2 = 0$. Поэтому $jy = yj = 0$ и, следовательно, $J^2 = (0)$. Если $e_1Re_2 = (0)$ также, то $R \cong GF(q) \oplus S$, где $J(S)^2 = (0)$. Тогда кольцо R является кольцом типа (1) из формулировки теоремы; противоречие. Значит, $e_1Re_2 \neq (0)$. Итак, $R = e_1Re_1 + e_2Re_2 + e_1Re_2$, причем e_1Re_1 является конечным полем, e_2Re_2 является локальным кольцом, $e_1Re_2 \neq (0)$. Далее, $e_1Re_1 + J + e_1Re_2 \subset [e_1]$, так как элементы из этого множества не аннулируются e_1 ни с одной стороны. Нетрудно проверить, что элементы множества $e_2Re_2 \setminus J + e_1Re_1^* + e_1Re_2$ не являются делителями нуля. Для любого ненулевого элемента $t \in e_2Re_2 \setminus J + e_1Re_2$ вершина $[t]$ не смежна с $[e_2]$ и $t^2 \neq 0$. Действительно, если $t = e_2\alpha e_2 + e_1xe_2$ и $t^2 = 0$, то $(e_2\alpha e_2)^2 + e_1xe_2\alpha e_2$. Поскольку сумма (групповая) в пирсовском разложении является прямой, то $(e_2\alpha e_2)^2 = 0$; противоречие, так как $e_2\alpha e_2 \in e_2Re_2 \setminus J$ и $D(e_2Re_2) = J$ [11]. Итак, $[a] = e_1Re_2^*$, $[b] = J^*$, $[c] = e_1Re_1^* + J + e_1Re_2$ и $[d] = e_2Re_2 \setminus J + e_1Re_2$.

Список литературы

[1] D.F. Anderson, P.S. Livingston, *The zero-divizor graph of a commutative ring*, J. Algebra, **217** (1999), 434–447.

[2] S.P. Redmond, *The Zero-Divisor Graph of a Noncommutative Ring*, Int. J. Commut. Rings, **1(4)** (2002), 203–211.

[3] N. Bloomfield, C. Wickham, *Local rings with genus two zero divisor graph*, Comm. Alg., **38** (2010), 2965–2980.

[4] N. Bloomfield, *The zero divisor graphs of commutative local rings of order p^4 and p^3*, Comm. Alg., **41** (2013), 765–775.

[5] E.V. Zhuravlev, A.S. Monastyreva, *Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings* , Siberian Math. J., **61(1)** (2020), 76-–84.

[6] A.S. Monastyreva, *The Compressed Zero-divisor Graphs of Order 4*, J. Alg. Appl., **21(9)** (2022), 2250179.

[7] A.A. Afanas'ev, A.S. Monastyreva, *Compressed and Partially Compressed Zero-Divisor Graphs of Finite Associative Rings* , Sib. Math. J., **64(2)** (2023), 281–291.

[8] A.S. Monastyreva, *Finite Non-Nilpotent Rings with Complete Compressed Zero-Divisor Graphs* , Lobach. J. Math., **41(9)** (2020), 1666–1671.

[9] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Moscow, Gelios–ARV, 2006 (in Russian).

[10] A.S. Monastyreva, *Finite Rings with Acyclic Compressed Zero-Divisor Graphs* , Sib.Electr.Math.Reports, **21(1)** (2024), 405–416.

[11] V.P. Elizarov, *Finite rings*, Moscow, Gelios–ARV, 2006 (in Russian).

Anna S. Monastyreva
Altai State University,
61, Lenina st.,
Barnaul, Russia, 656049
E-mail address: akuzmina1@yandex.ru