SⓔMR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 510.64
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03B44,
03B42, 03A05, 03B45, 03B70,03H05

КОРТЕЖНАЯ СЕМАНТИКА И ПРОЕКТИВНАЯ УНИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЛОГИКИ СТУПЕНЧАТОГО ВРЕМЕНИ

С.И. Башмаков, А.А. Поляков, Т.Ю. Зверева

COMMUNICATED BY S.V. SUDOPLATOV

Abstract: In this article, we continue the investigation of deductive systems within the class of linear step-like temporal logics. For the case of the temporal logic $\mathcal{LTL}.sl$ we proved the finite model property and the projective unification. Building on the results of P. Balbiani and T. Tinchev for modal logic Alt_1, we formally define the tuple and relational semantics for $\mathcal{LTL}.sl$ and prove their equivalence.

Keywords: modal logic, temporal logic, linear time, finite model property, Kripke relational semantics, tuple semantics, unification.

1 Введение

Модальные логики активно исследуются с середины прошлого века. Обогащение языка классической логики модальными операторами *необходимости* ($\Box$) и *возможности* ($\Diamond$) позволило заметно обогатить выразительные способности логического языка, а возможность различных

Bashmakov, S.I., Polyakov, A.A., Zvereva, T.Yu., Tuple semantics and projective unification for linear logic of step-like time.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение № 075-02-2026-1314).

Поступила 1 января 2025 г., опубликована 31 декабря 2025 г.

интерпретаций этих операторов позволяет применять модальные логики в широком классе информационных систем и задач, [1, 2].

В частности, временные логики зачастую рассматриваются в качестве логик, в которых модальные операторы необходимости и возможности интерпретируются как «всегда» и «возможно», соответственно. С помощью таких логик может моделироваться работа компьютерных программ или информационных систем, в которых за такт работы из текущего состояния система может либо недетерминированно перейти в одно из фиксированных новых состояний, либо новое состояние единственно возможно, в зависимости от природы моделируемого времени. Тогда, в зависимости от количества возможных состояний в любой момент времени, могут применяться как ветвящиеся, так и линейные временные логики. Например, линейная временная логика знаний $\mathcal{LTK}.sl$ моделирует линейную систему со строго разграниченными моментами времени, каждому из которых соответствуют свои распределения знаний между разными агентами-участниками моделируемого процесса, [3, 4].

Наиболее актуальными для исследования задачами, вне зависимости от выбранной логики, являются свойства финитной аппроксимируемости, разрешимости, аксиоматизируемости, а также унификации в ней. Если логика обладает свойством финитной аппроксимируемости (или, что в нашем случае равносильно, *свойством конечной модели*), в её характеризации достаточно ограничиться только конечными структурами. Проверка истинности любой наперёд заданной формулы в этой логике на конечных структурах открывает возможность конструктивного доказательства разрешимости логики — описания алгоритма, позволяющего совершить эту проверку за конечное число шагов. Возможность же аксиоматизировать логику (или же описать конечный, либо бесконечный набор её аксиом), позволяет не только открыть возможности для синтаксического подхода исследования дедуктивной системы, но и оценить место данной логики в классификации наиболее изученных расширений других систем.

Теория унификации занимает важное место в современных исследованиях в области неклассических и, в частности, модальных логик. Задача унификации состоит в поиске такой подстановки, применение которой к формуле делает её теоремой в логике. Наибольший интерес в теории унификации представляют следующие задачи: определение типа унификации в логике, исследование унифицируемости её формул, поиск эффективных алгоритмов построения унификаторов и сопутствующие вопросы, [5, 6].

Для их решения часто используют семантические методы характеризации логик. Широко применяется уже устоявшаяся реляционная семантика Крипке — подход к представлению логических систем в виде специальных графических моделей, [7]. Применима семантика Крипке и при решении задачи унификации в модальных логиках, однако, в некоторых исследованиях работа ведётся с другими семантиками, зачастую, лучше отвечающими требованиям конкретной задачи. Так, в работе Ф. Балбиани и Т. Тинчева [8] для исследования унификации в модальной логике Alt_1, помимо реляционной семантики, также введена *кортежная семантика*, которая представляет логическую систему Alt_1 в виде упорядоченных наборов множеств переменных. Опираясь на этот подход, ими был получен алгоритм проверки унифицируемости любой заданной формулы, а также приведён пример формулы с нулярным типом унификации.

В данной работе исследуется взаимосвязь подходов реляционной и кортежной семантики, применительно к линейной модальной логике ступенчатого (нерефлексивного нетранзитивного) времени $\mathcal{LTL}.sl$, характеризующейся схожим с Alt_1 классом шкал Крипке. Доказаны свойства конечной модели и эквивалентности двух представленных семантик для $\mathcal{LTL}.sl$. Кроме того, показана проективность унификации в логике $\mathcal{LTL}.sl$.

2 Линейная логика ступенчатого времени $\mathcal{LTL}.sl$

В статьях Т.Ю. Зверевой и С.И. Башмакова [3, 4] вводится и исследуется логика линейного ступенчатого времени и знания $\mathcal{LTK}.sl$. Для этой логической системы было предложено семантическое описание, показана финитная аппроксимируемость и проективность унификации.

Интерес представляет рассмотрение версии логики класса ступенчатых по времени (с нерефлексивным и нетранзитивным временным отношением в семантике) с обеднённым языком, исключающим рассуждения о знаниях агентов, так как такая логика, как будет показано далее, оказывается схожей с невременной логикой Alt_1, однако, обладает полезными с точки зрения унификации свойствами.

Определим семантически логику $\mathcal{LTL}.sl$. Алфавит языка $L^{\mathcal{LTL}.sl}$ включает $Prop := \{p_1, \dots, p_n, \dots\}$ константы $\top$, $\bot$, временной оператор N, скобки и стандартные булевы операции.

$\mathcal{LTL}.sl$-шкала — это пара $F = \langle W_{\mathbb{N}}, \mathbf{Next}\rangle$ где $W_{\mathbb{N}} = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{N}} C_t$: $C_{t_1} \cap C_{t_2} = \varnothing$ при $t_1 \neq t_2$, каждый C_t — одноэлементный сгусток, $\mathbf{Next}$ — отношение на $W_{\mathbb{N}}$ такое, что $x\,\mathbf{Next}\,y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{N}\colon\ x \in C_t,\ y \in C_{t+1}$. Такая шкала, по своей сути, эквивалентна множеству натуральных чисел с отношением «следующее натуральное число». Заметим, что отношение $\mathbf{Next}$ является *сериальным* на множестве $W_{\mathbb{N}}$, т.е. для любого $x \in W_{\mathbb{N}}$ существует $y \in W_{\mathbb{N}}$ такое, что $x\,\mathbf{Next}\,y$.

На шкале стандартно определим *$\mathcal{LTL}.sl$-модель* как пару $M = \langle F, V\rangle$, где F — $\mathcal{LTL}.sl$-шкала, V — означивание: $Prop \to 2^{W_{\mathbb{N}}}$. Истинность формул на $\mathcal{LTL}.sl$-моделях также определяется стандартным образом:

- $\langle M, x_i\rangle \vDash p \Leftrightarrow x_i \in V(p)$;
- $\langle M, x_i\rangle \vDash \top$;
- $\langle M, x_i\rangle \nvDash \bot$;

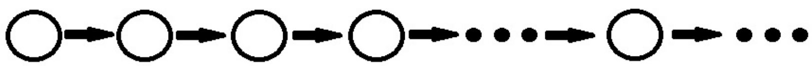

Рис. 1. $\mathcal{LTL}.sl$-шкала

- $\langle M, x_i \rangle \vDash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \langle M, x_i \rangle \vDash \varphi$ или $\langle M, x_i \rangle \vDash \psi$;
- $\langle M, x_i \rangle \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \langle M, x_i \rangle \vDash \varphi$ и $\langle M, x_i \rangle \vDash \psi$;
- $\langle M, x_i \rangle \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow \langle M, x_i \rangle \nvDash \varphi$;
- $\langle M, x_i \rangle \vDash N\varphi \Leftrightarrow$ если $x_i\, \mathbf{Next}\, x_{i+1}$, то $\langle M, x_{i+1} \rangle \vDash \varphi$.

Задачей исследования этой логической системы стало показать, что для случая с исключёнными знаниями агентов сохраняется свойство финитной аппроксимируемости, а также применим аналог подхода кортежной семантики для логики Alt_1, описанный в [8].

2.1. Кортежная семантика в $\mathcal{LTL}.sl$. Кортеж $(U_0, \ldots, U_n)$, где каждый $U_0, \ldots, U_n \subset Prop$, назовём *n-оценкой*. Выполнимость формул на n-оценке определяется следующим образом:

- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash p \Leftrightarrow p \in U_n$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \top$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \nvDash \bot$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_n) \vDash \varphi$ или $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \psi$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_n) \vDash \varphi$ и $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \psi$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow (U_0, \ldots, U_n) \nvDash \varphi$;
- $(U_0, \ldots, U_n) \vDash N\varphi \Leftrightarrow$ если $n > 0$, то $(U_0, \ldots, U_{n-1}) \vDash \varphi$;
- $(U_0) \vDash N\varphi \Leftrightarrow (U_0) \vDash \varphi$.

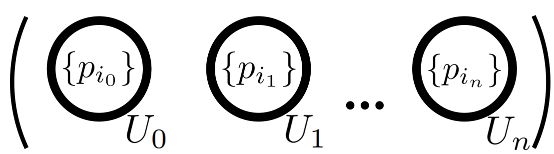

Рис. 2. произвольная n-оценка.

Пример 1. *Рассмотрим формулу $\varphi = (Np \vee p) \wedge \neg q$. Возьмём 1-оценку (U_0, U_1), где $U_0 = \{p, q\}$, $U_1 = \{p\}$. Тогда $(U_0, U_1) \vDash \varphi$, т.к. $(U_0, U_1) \vDash p$, $(U_0, U_1) \nvDash q$, $(U_0) \vDash p$.*

Поскольку кортежи и линейные шкалы являются упорядоченными структурами, каждому элементу которых ставятся в соответствие наборы переменных, логично предположить, что кортежная и реляционная семантики эквивалентны в логике $\mathcal{LTL}.sl$. Однако, в то время как

n-оценки определяются только конечными наборами множеств переменных, $\mathcal{LTL}.sl$-шкалы по определению являются бесконечными. Далее мы покажем, что для характеризации модальной логики $\mathcal{LTL}.sl$ достаточно использовать конечные шкалы.

3 Финитная аппроксимируемость в $\mathcal{LTL}.sl$

Логика называется *финитно аппроксимируемой*, если она полна относительно класса конечных шкал. Чтобы показать финитную аппроксимируемость логики $\mathcal{LTL}.sl$, определим конечные $\mathcal{LTL}.sl$-шкалы, на моделях которых формула выполняется в том и только в том случае, когда она выполняется на соответствующих моделях бесконечной $\mathcal{LTL}.sl$-шкалы.

Пусть $F = \langle W_{\mathbb{N}}, \mathbf{Next}\rangle$ — бесконечная $\mathcal{LTL}.sl$-шкала. На её основе определим конечную $\mathcal{LTL}.sl$-шкалу $F_n = \langle W_n, \mathbf{Next}_n\rangle$, где $W_n = \{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$, $\mathbf{Next}_n = \{(x_i, x_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{(x_{n+1}, x_{n+1})\}$ — суть ограничение отношения $\mathbf{Next}$ на первые $n+1$ элементов в объединении с рефлексивным $(n+1)$-м элементом. Заметим, что такие отношения $\mathbf{Next}_n$ также являются сериальными $\forall n \in \mathbb{N}$.

Отображение f шкалы $F = \langle W, R\rangle$ на шкалу $F' = \langle W', R'\rangle$ называется *p-морфизмом*, если для любых $x, y \in W$ выполняется:

(1) $xRy \Rightarrow f(x)R'f(y)$;
(2) $f(x)R'f(y) \Rightarrow \exists z \in W\colon x\,R\,z$ и $f(z) = f(y)$.

Согласно введённым определениям, сформулируем и докажем следующее утверждение:

Лемма 1. *Любая конечная $\mathcal{LTL}.sl$-шкала F_n является p-морфным образом бесконечной $\mathcal{LTL}.sl$-шкалы F.*

Доказательство. Покажем выполнение условий (1) и (2) определения p-морфизма. Определим отображение $f(x_i) = \begin{cases} x_i, & i \leq n; \\ x_{n+1}, & i > n. \end{cases}$

(1) $f(x_i) = x_i$ и $f(x_{i+1}) = x_{i+1}$ при $i \leq n$. По определению, $x_i\,\mathbf{Next}\,x_{i+1}$ и $x_i\,\mathbf{Next}_n\,x_{i+1}$. При $i > n$, $f(x_i) = f(x_{i+1}) = x_{n+1}$. Тогда получаем, что $f(x_i)\,\mathbf{Next}_n\,f(x_{i+1})$, поскольку $x_{n+1}\,\mathbf{Next}_n\,x_{n+1}$.
(2) $x_i\,\mathbf{Next}_n\,x_{i+1}$ при $i \leq n$,. Возьмём $x_{i+1} \in W_{\mathbb{N}}$. По определению, $x_i\,\mathbf{Next}\,x_{i+1}$ и $f(x_{i+1}) = x_{i+1}$. При $i > n$, $f(x_i)\,\mathbf{Next}_n\,f(x_{i+1})$, поскольку $x_{n+1}\,\mathbf{Next}_n\,x_{n+1}$. Возьмём $x_{i+1} \in W_{\mathbb{N}}$. По определению, $x_i\,\mathbf{Next}\,x_{i+1}$ и $f(x_i) = x_{n+1}$ и $f(x_{i+1}) = x_{n+1}$.

$\square$

При оценке глубины конечной модели, в дальнейшем, будем использовать понятие *модальной степени формулы*. Под *модальной степенью* $md(\varphi)$ в логике $\mathcal{LTL}.sl$ будем понимать число вложенных в φ модальных операторов N: $\forall p \in Prop$, $md(p) = md(\top) = md(\bot) = 0$;

$md(\varphi \circ \psi) = max\{md(\varphi), md(\psi)\}$, где $\circ \in \{\vee, \wedge\}$; $md(\neg\varphi) = md(\varphi)$; наконец, $md(N\varphi) = md(\varphi) + 1$.

Теорема 1. *Пусть φ — такая формула, что $md(\varphi) = m \leq n$, $M = \langle F, V\rangle$ — бесконечная $\mathcal{LTL}.sl$-модель, $M_n = \langle F_n, V_n\rangle$ — конечная $\mathcal{LTL}.sl$-модель, где $\forall p \in Prop$, $V_n(p) = V(p) \cap W_n$. Тогда для любого состояния $x_i \in W_{\mathbb{N}}$ такого, что $i \leq n - m + 1$, справедливо:*

$$\langle M, x_i\rangle \nvDash \varphi \Leftrightarrow \langle M_n, x_i\rangle \nvDash \varphi.$$

Доказательство. Индукцией по модальной степени формулы φ. При $md(\varphi) = 0$ утверждение теоремы выполняется для любого $x_i \in W_n$. Пусть теорема выполняется для любой формулы $\varphi : md(\varphi) = k$. Возьмём $\psi = N\varphi$ и исследуем её выполнимость при $x_i \in W$ таком, что $i \leq n - k$:

$$\langle M, x_i\rangle \nvDash \psi \Leftrightarrow \langle M, x_i\rangle \nvDash N\varphi \Leftrightarrow \langle M, x_{i+1}\rangle \nvDash \varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle M_n, x_{i+1}\rangle \nvDash \varphi \Leftrightarrow \langle M_n, x_i\rangle \nvDash N\varphi \Leftrightarrow \langle M_n, x_i\rangle \nvDash \psi.$$

$\square$

Таким образом, при проверке выполнимости любой формулы φ достаточно использовать $\mathcal{LTL}.sl$-модели, определенными на конечных $\mathcal{LTL}.sl$-шкалах. Это значит, что логика $\mathcal{LTL}.sl$ финитно аппроксимируема относительно реляционной семантики.

Финитная аппроксимируемость $\mathcal{LTL}.sl$ относительно кортежной семантики напрямую следует из того, что n-оценки — это всегда конечные наборы. Так как теперь в обеих семантиках используются только конечные структуры, мы можем показать их эквивалентность для логики $\mathcal{LTL}.sl$.

4 Эквивалентность реляционной и кортежной семантик в $\mathcal{LTL}.sl$

В данном разделе мы покажем, что для проверки истинности произвольной наперёд заданной формулы в логике $\mathcal{LTL}.sl$ можно пользоваться средствами одной из представленных семантик — для любой $\mathcal{LTL}.sl$-модели найдётся единственная соответствующая ей n-оценка, на которой выполнимость заданной формулы будет совпадать с выполнимостью на $\mathcal{LTL}.sl$-модели. Тогда набор формул, выполнимых при любой n-оценке будет совпадать с набором формул, выполнимых на любой $\mathcal{LTL}.sl$-модели.

Будем говорить, что формула φ *выполняется на $\mathcal{LTL}.sl$-модели* M, если она выполняется на любом элементе $x \in W$, обозначим как $M \vDash \varphi$. Формула φ *выполняется на $\mathcal{LTL}.sl$-шкале* F, если она выполняется на любой $\mathcal{LTL}.sl$-модели $M = \langle F, V\rangle$, обозначим как $F \vDash \varphi$. Будем говорить, что формула φ *n-выполнима*, если она выполнима при любой n-оценке $(U_0, \ldots, U_n)$, обозначим как $\vDash_n \varphi$.

Теорема 2. *Пусть φ — такая формула, что $md(\varphi) = n$, $F_n = \langle W_n, R_n \rangle$ — конечная $\mathcal{LTL}.sl$-шкала. Тогда:*

$$\langle F_n, x_1 \rangle \vDash \varphi \Leftrightarrow \vDash_n \varphi.$$

Доказательство. Пусть $M_n = \langle F_n, V_n \rangle$ — произвольная конечная $\mathcal{LTL}.sl$-модель. Определим u как отображение $\mathcal{LTL}.sl$-модели M_n на n-оценку:

$$u(M_n) = (U_0, \dots, U_n),$$

где $U_i = \{p \in Prop \mid x_{n-i+1} \in V_n(p)\}$, $0 \leq i \leq n$. Пользуясь тем, что $\mathcal{LTL}.sl$-модели, построенные на основе фиксированной $\mathcal{LTL}.sl$-шкалы, однозначно определяются своим означиванием, а n-оценки однозначно определяются своими компонентами U_i, получаем, что отображение u инъективно. Также, u сюръективно, т.к. данное отображение позволяет получить любой набор $(U_0, \dots, U_n)$. Значит, u — биекция между множеством всех конечных $\mathcal{LTL}.sl$-моделей M_n и множеством всех n-оценок.

По определению u, для любых $x_i \in W_n$, $p \in Prop$ верно, что $\langle M_n, x_i \rangle \vDash p \;\Leftrightarrow\; (U_0, \dots, U_{n-i+1}) \vDash p$, где $u(M_n) = (U_0, \dots, U_n)$, поскольку $p \in U_{n-i+1} \Leftrightarrow x_i \in V_n(p)$. Отсюда, $\langle M_n, x_1 \rangle \vDash \varphi \Leftrightarrow u(M_n) \vDash \varphi$ для любой формулы φ такой, что $md(\varphi) = n$. □

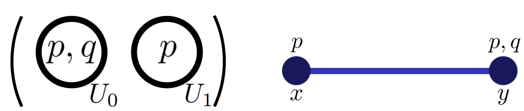

Рис. 3. 1-оценка (U_0, U_1) и конечная $\mathcal{LTL}.sl$-модель M_1

Теоремы 1 и 2 показывают, что реляционная и кортежная семантики действительно эквиваленты в логике $\mathcal{LTL}.sl$.

Вернёмся к примеру 1. Напомним, формула $\varphi = (Np \vee p) \wedge \neg q$ выполнима на 1-оценке $U = (U_0, U_1)$, где $U_0 = \{p, q\}$, $U_1 = \{p\}$. Применим к этой 1-оценке отображение u^{-1}, которое существует, т.к. u — биекция: $u^{-1}(U) = M_1 = \langle F_1, V_1 \rangle$, где $V_1(p) = \{x, y\}$, $V_1(q) = \{y\}$. В силу теоремы 2, $\langle M_1, x \rangle \vDash \varphi$, что также верно по определению выполнимости на $\mathcal{LTL}.sl$-модели.

5 Унификация в $\mathcal{LTL}.sl$

Приведем необходимые определения и известные результаты теории унификации, используемые далее.

Формула $\varphi(p_1, \dots, p_s)$ называется *унифицируемой* в логике $\mathcal{L}$, если $\exists \sigma \colon p_i \mapsto \sigma_i$ — подстановка для каждой переменной $p_i \in Var(\varphi)$ (далее мы будем называть её *унификатором* формулы φ) такая, что $\sigma(\varphi) = \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_s) \in \mathcal{L}$. Верхний индекс будем использовать для обозначения различных унификаторов, нижний — для указания соответствия между переменной и её подстановочным вариантом.

Корневым называется унификатор, получаемый подстановкой констант вместо переменных формулы (т.е. $gu : p_i \mapsto \{\top, \bot\}, \forall p_i \in Var(\varphi)$).

На множестве унификаторов определено отношение предпорядка: унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *более общим*, чем унификатор σ^1 в логике $\mathcal{L}$, если существует подстановка γ такая, что для любой переменной p_i: $\sigma^1(p_i) \equiv \gamma(\sigma(p_i)) \in \mathcal{L}$ (заданный таким образом порядок будем обозначать как $\sigma^1 \preceq \sigma$).

Унификатор σ формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ называется *максимальным*, если для любого другого унификатора σ^i выполняется $\sigma^i \preceq \sigma$ или же они несравнимы, т.е. ($\sigma^i \npreceq \sigma$) и ($\sigma \npreceq \sigma^i$). Если σ более общий, чем любой другой, он называется *наиболее общим* (сокращённо *н.о.у.*). Унификаторы σ^i и σ^j будем называть *эквивалентными* (пишем $\sigma^i \equiv_{\mathcal{L}} \sigma^j$), если ($\sigma^i \preceq \sigma^j$) и ($\sigma^j \preceq \sigma^i$).

Проективной в $\mathcal{L}$ назовём формулу $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ для которой найдётся унификатор τ, удовлетворяющий условию: $\varphi \vdash_{\mathcal{L}} [p_i \equiv \tau(p_i)]$ для всех переменных $p_i \in Var(\varphi)$. Такой унификатор τ будем называть *проективным*.

Лемма 2. *Для любой формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s) \in L^{\mathcal{LTL}.sl}$ и любого набора $c_1, \ldots, c_s \in \{\top, \bot\}$ существует $c \in \{\top, \bot\}$ такая, что на любой $\mathcal{LTL}.sl$-шкале F*

$$\forall x \in F, \ \langle F, x \rangle \vDash \varphi(c_1, \ldots, c_s) \equiv c.$$

Доказательство. Покажем индукцией по модальной степени $md(\varphi^{(s)})$. При $md(\varphi) = 0$ имеем формулу, лишённую модальных связок, для которой утверждение выполняется. Предположим, что утверждение верно для формулы $\psi = \psi(p_1, \ldots, p_s)$: $md(\psi) = m$. Рассмотрим формулу $\varphi = N\psi$. По определению $\mathcal{LTL}.sl$-шкал, как бесконечных, так и конечных, для любого $x \in F$ существует $y \in F$ такой, что $x \,\mathbf{Next}\, y$. Тогда, поскольку $\psi(c_1, \ldots, c_s) \equiv c_\psi$, получаем, что $\varphi(c_1, \ldots, c_s) \equiv Nc_\psi$, откуда, в силу сериальности $\mathbf{Next}$, $\varphi(c_1, \ldots, c_s) \equiv c_\psi$. $\square$

Покажем существование корневого унификатора (и алгоритм его эффективного поиска) для любой унифицируемой формулы в $\mathcal{LTL}.sl$.

Теорема 3. *Если формула φ унифицируема в $\mathcal{LTL}.sl$, то φ имеет корневой унификатор.*

Доказательство. Покажем, что для проверки унифицируемости любой данной формулы φ достаточно установить только существование корневого унификатора gu, получаемого заменой переменных на константы. Пусть формула $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ унифицируема в $\mathcal{LTL}.sl$ и σ — её унификатор, т.е.

$$\sigma(\varphi) = \varphi(\sigma_1(q_1, \ldots, q_r), \ldots, \sigma_s(q_1, \ldots, q_r)) \in \mathcal{LTL}.sl,$$

где $\sigma_1(q_1, \ldots, q_r), \ldots, \sigma_s(q_1, \ldots, q_r)$ — формулы $\mathcal{LTL}.sl$.

Произведём такую оценку δ формул $\sigma_1(q_1,\dots,q_r),\dots,\sigma_s(q_1,\dots,q_r)$, что $\delta(\sigma_i)\in\{\top,\bot\}$ $\forall q_j\in Prop$ и верно

$$\varphi(\delta(\sigma_1),\dots,\delta(\sigma_s))\equiv\varphi(\sigma_1(q_1,\dots,q_r),\dots,\sigma_s(q_1,\dots,q_r))\in\mathcal{LTL}.sl.$$

Поскольку $\sigma(\varphi)$ истинна в логике, в результате оценки мы снова получим истинную формулу:

$$\varphi(\delta(\sigma_1),\dots,\delta(\sigma_s))\in\mathcal{LTL}.sl.$$

Обозначим $gu(p_i):=\delta(\sigma(p_i))$, тогда

$$\varphi(gu(p_1),\dots,gu(p_s))\in\mathcal{LTL}.sl,$$

где $gu(p_i)\in\{\top,\bot\}$, $1\le i\le s$. Следовательно, $gu(\varphi)$ — это корневой унификатор для унифициремой в $\mathcal{LTL}.sl$ формулы φ. $\square$

В связи с тем, что для каждой унифицируемой формулы $\varphi^{(s)}$ набор $gu(p_1),\dots,gu(p_s)$ не более, чем последовательность констант длины s, проверка унифицируемости произвольной формулы $\psi(p_1,\dots,p_s)$ требует не более, чем перебора 2^s подстановочных вариантов констант $\top,\bot$ вместо переменных.

Если среди них найдётся такой вариант, что $\psi(gu(p_1),\dots,gu(p_s))$ истинна в $\mathcal{LTL}.sl$, это будет означать, что формула ψ унифицируема и gu — её корневой унификатор в $\mathcal{LTL}.sl$. В противном случае, если для всех 2^s вариантов подстановок $\psi(gu(p_1),\dots,gu(p_s))\notin\mathcal{LTL}.sl$, такая формула ψ не имеет корневого унификатора, откуда следует её неунифицируемость в $\mathcal{LTL}.sl$.

Теперь покажем проективность унификации в логике.

Теорема 4. *Любая унифицируемая формула в $\mathcal{LTL}.sl$ проективна.*

Доказательство. Пусть $\varphi(p_1,\dots,p_s)$ унифицируемая в $\mathcal{LTL}.sl$ формула модальной степени m. Тогда для любой переменной $p_i\in Var(\varphi)$ и любого $k\in\omega$ такого, что $k=n-m$, где n — необходимый диапазон проверки истинности формулы φ в модели, определим следующую подстановку $\tau^k(p_i)$:

$$\tau^k(p_i):=\bigwedge_{i=0}^{k}N^i\varphi\wedge p_i\vee\neg\bigwedge_{i=0}^{k}N^i\varphi\wedge gu(p_i),$$

где gu — корневой унификатор формулы $\varphi(p_1,\dots,p_s)$, полученный по алгоритму из предыдущей теоремы.

Рассмотрим любую бесконечную $\mathcal{LTL}.sl$-модель $M=\langle W_{\mathbb{N}},\mathbf{Next},V\rangle$. Если τ^k — унификатор φ, то $\tau^k(\varphi)\in\mathcal{LTL}.sl$ и $\forall x\in W_{\mathbb{N}}$ $\langle M,x\rangle\vDash\tau^k(\varphi)$. Докажем, что подстановка τ^k является унификатором φ в $\mathcal{LTL}.sl$.

(1) Если $\forall x\in W_{\mathbb{N}}$ верно $\langle M,x\rangle\vDash\varphi$, тогда $\langle M,x\rangle\vDash\bigwedge\limits_{i=0}^{k}N^i\varphi$ и, следовательно, второй дизъюнктивный член будет опровергнут на x. Если $\langle M,x\rangle\vDash p_i$, тогда $\langle M,x\rangle\vDash\bigwedge\limits_{i=0}^{k}N^i\varphi\wedge p_i$, следовательно,

$\langle M, x\rangle \vDash \sigma(p_i)$. Если $\langle M, x\rangle \vDash \neg p_i$, тогда $\langle M, x\rangle \nvDash \bigwedge\limits_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i$ и следовательно $\langle M, x\rangle \vDash \neg\tau^k(p_i)$. Как следствие, истинностное значение $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$ на произвольном элементе x при означивании V совпадает с истинностью $\varphi(\tau^k(p_1), \ldots, \tau^k(p_s))$ на том же элементе при том же означивании V и, в этом случае, $\langle M, x\rangle \vDash \tau^k(\varphi)$.

(2) Если $\exists x \in W_{\mathbb{N}}\colon \langle M, x\rangle \vDash \neg\varphi$, тогда $\langle M, x\rangle \nvDash \bigwedge\limits_{i=0}^{k} N^i\varphi$. В этом случае возможно выполнение второго дизъюнктивного члена, но первый при этом опровергается на x. Тогда истинностное значение для всех $\tau^k(p_i)$ на x совпадает с $gu(p_i)$ (т.е. $\tau^k(\varphi) \equiv gu(\varphi)$), и поскольку $\langle M, x\rangle \vDash gu(\varphi)$ (в силу выбора корневого унификатора $gu(\varphi)$ в $\mathcal{LTL}.sl$), снова $\langle M, x\rangle \vDash \tau^k(\varphi)$.

Следовательно, $\tau^k(\varphi) \in \mathcal{LTL}.sl$ для любой унифицируемой в $\mathcal{LTL}.sl$ формулы φ.

Докажем, что $\tau^k(\varphi)$ — проективный унификатор. Если $\tau^k(p_i)$ — проективный унификатор для φ, то по определению, $\forall p_i \in Var(\varphi)$

$$\varphi \vdash_{\mathcal{LTL}_{sl}} p_i \leftrightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i \vee \neg \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right).$$

Предположим обратное: пусть τ^k не является проективным унификатором. В таком случае $\exists x \in W_{\mathbb{N}}$:

$$\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi, \tag{1}$$

но

$$\langle M, x\rangle \nvDash p_i \leftrightarrow \left(\bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i \vee \neg \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right). \tag{2}$$

В этом случае

$$\langle M, x\rangle \nvDash p_i \to \left(\bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i \vee \neg \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right) \tag{3}$$

или

$$\langle M, x\rangle \nvDash \left(\bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i \vee \neg \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right) \to p_i. \tag{4}$$

Если (3), тогда $\langle M, x\rangle \vDash p_i$, но в этом случае $\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge\limits_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i$ благодаря (1) и p_i на x, и поэтому

$$\langle M, x\rangle \vDash p_i \to \left(\bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i \vee \neg \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right).$$

Следовательно, выполнение (3) невозможно.

Если (4), то $\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i \vee \neg \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge gu(p_i)$, но это возможно только при $\langle M, x\rangle \vDash p_i$, поскольку $\langle M, x\rangle \vDash \bigwedge\limits_{i=0}^{k} N^i\varphi$ следует из (1). Как следствие, в дизъюнкции $\tau^k(p_i)$ может выполняться только первый член. Поэтому $\langle M, x\rangle \vDash \left(\bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge p_i \vee \neg \bigwedge_{i=0}^{k} N^i\varphi \wedge gu(p_i)\right) \to p_i$ справедливо, что противоречит (4). Следовательно, τ^k — проективный унификатор для φ в логике $\mathcal{LTL}.sl$, поэтому φ — проективная формула. $\square$

Следуя доказательству теоремы, для любой унифицируемой в $\mathcal{LTL}.sl$ формулы φ, подстановка вида $\tau^k(p_i)$ представляет проективный унификатор, а значит и н.о.у., согласно результатам С. Гиларди, [5]. Сформулируем этот факт в виде следующей леммы.

Лемма 3. *Пусть $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_s)$ — унифицируемая в $\mathcal{LTL}.sl$ формула, σ — произвольный унификатор φ, τ^k — проективный унификатор φ. Тогда $\sigma \preceq \tau$.*

Следовательно, логика $\mathcal{LTL}.sl$ обладает унитарным типом унификации. Однако, очевидно, существует бесконечный класс таких проективных унификаторов $\{\tau^k\}$, порождаемый индексом $k \in \omega$. Покажем далее, что класс $\{\tau^k\}$ представляет собой класс эквивалентных между собой унификаторов.

Теорема 5. *Для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$: $k_1 = n_1 - m \geq 0$ и $k_2 = n_2 - m \geq 0$, где m — модальная степень унифицируемой формулы $\varphi = \varphi(p_1, \ldots, p_s)$, справедливо $\tau^{k_1} \preceq \tau^{k_2}$ и $\tau^{k_2} \preceq \tau^{k_1}$.*

Доказательство. Согласно определению отношения более общий, рассмотрим в качестве подстановки γ проективный унификатор τ^{k_1} и применим его к τ^{k_2} (то есть ко всем переменным формулы):

$$\tau^{k_1}(\tau^{k_2}(p_j)) = \left(\left(\bigwedge_{i=0}^{k_2} \tau^{k_1}(N^i\varphi) \wedge \tau^{k_1}(p_j)\right) \vee \left(\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{k_2} \tau^{k_1}(N^i\varphi)\right) \wedge \tau^{k_1}(gu(p_j))\right)\right),$$

где $\tau^{k_1}(N^i\varphi) = N^i\varphi(\tau^{k_1}(p_1), \ldots, \tau^{k_1}(p_s))$. Поскольку τ^{k_1} — унификатор φ, получаем

$$\left(\left(\bigwedge_{i=0}^{k_2} \tau^{k_1}(N^i\varphi) \wedge \tau^{k_1}(p_j)\right) \vee \left(\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{k_2} \tau^{k_1}(N^i\varphi)\right) \wedge \tau^{k_1}(gu(p_j))\right)\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\left(\bigwedge_{i=0}^{k_2} N^i\top \wedge \tau^{k_1}(p_j)\right) \vee \left(\neg\left(\bigwedge_{i=0}^{k_2} N^i\top\right) \wedge \tau^{k_1}(gu(p_j))\right)\right) \equiv \tau^{k_1}(p_j).$$

Как итог, $\tau^{k_1}(\tau^{k_2}(p_j)) \equiv_{\mathcal{LTL}.sl} \tau^{k_1}(p_j)$ при любой переменной p_j формулы $\varphi(p_1, \ldots, p_s)$, а значит $\tau^{k_1} \preceq \tau^{k_2}$. В силу произвольности выбора чисел k_2 и k_1, аналогично получаем, что $\tau^{k_2} \preceq \tau^{k_1}$, а значит, по определению, $\tau^{k_2} \equiv \tau^{k_1}$. $\square$

Таким образом, для любой унифицируемой формулы определён класс эквивалентных наиболее общих унификаторов вида τ^k. Отсюда, логика $\mathcal{LTL}.sl$ действительно обладает унитарным типом унификации.

Установленное выше не только позволяет утверждать, что полученные ранее результаты по финитной аппроксимируемости и унификации для линейной многоагентной логики ступенчатого времени $\mathcal{LTK}.sl$ сохраняются и для случая обеднённого на знания языка, но и открывает определённые перспективы исследования данного класса логик с использованием кортежной семантики — потенциально даже для случая логик альтернативного времени и временных ветвлений.

6 Заключение

Успешно показано, что к модальной логике $\mathcal{LTL}.sl$ применим аналог кортежной семантики, который также является эквивалентным реляционной семантике — обе семантики удовлетворяют свойству конечной модели. Отметим, что полученные результаты позволяют характеризовать $\mathcal{LTL}.sl$ линейными сериальными шкалами, что делает рассматриваемую логику родственной к логике $DAlt = \mathbf{K} + \{\Diamond p \equiv \Box p\}$, а не Alt_1, как предполагалось изначально. По-видимому, именно этот факт позволяет получить «лучший» тип унификации в логике $\mathcal{LTL}.sl$ через проективность, что резко контрастирует с «худшим» (нульарным) типом унификации в Alt_1, установленным в [8].

References

[1] Шапировский, И. Б. *Современная модальная логика: между математикой и информатикой* / И. Б. Шапировский, В. Б. Шехтман. // Современная логика: основания, предмет и перспективы развития. – Москва: ИД «Форум», 2018. – С. 265–305.

[2] Goldblatt, R. *Logics of time and computation* / R. Goldblatt. // CSLI Lecture Notes. – Center for the Study of Language and Information, 1992. – no. 7. 2 edition. – 180 p.

[3] Bashmakov, S. I. *Unification and finite model property for linear step-like temporal multi-agent logic with the universal modality* / S. I. Bashmakov, T. Yu. Zvereva // Bulletin of the Section of Logic. – 2022. – Vol. 51, no. 3. – P. 345–361.

[4] Bashmakov, S. I. *Linear Step-like Logic of Knowledge LTK.sl* / S. I. Bashmakov, T. Yu. Zvereva // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2023. – Vol. 20, no. 2. – P. 1361–1373.

[5] Ghilardi, S. *Unification through projectivity* / S. Ghilardi // J. Logic Computation. – 1997. – Vol. 7. – P. 733–752.

[6] Baader, F. *Unification in modal and description logic* / F. Baader, S. Ghilardi. // Logic Journal of the IGPL. – 2011. – Vol. 19. – P. 705–730.

[7] Chagrov, A. *Modal Logic* / A. Chagrov, M. Zacharyaschev: Oxford University. – Oxford: Oxford University Press, 1997. – 605 p.

[8] Balbiani, P. *Unification in modal logic Alt1* / P. Balbiani, T. Tinchev // Advances in Modal Logic. – 2016. – Vol. 11. – P. 117–134.

Stepan Igorevich Bashmakov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
600041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: krauder@mail.ru

Alexandr Alexeyevich Polyakov
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
600041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: sasha.polyakov.03@mail.ru

Tatyana Yurievna Zvereva
Siberian Federal University,
pr. Svobodny, 79,
600041, Krasnoyarsk, Russia
Email address: 3336259@gmail.com