S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 23, № 1, стр. 571–581 (2026) УДК 517.9
https://doi.org/10.33048/semi.2026.23.035 MSC 76S05

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

А.А. Папин, М.А. Токарева

Представлено О.С. Розановой

Abstract: Using the theory of interacting continua, governing equations for the motion of a viscous fluid in a poroelastic skeleton were obtained. In the first stage, local solvability in Holder classes was established. Uniform time estimates were then obtained, and global solvability of the initial-boundary value problem was established.

Keywords: poroelasticity, two-phase filtration, Darcy's law, global solvability, viscoelasticity.

1 Введение

Проблема антропогенного изменения климата стимулирует активный поиск технологий, способных снизить концентрацию парниковых газов в атмосфере. Одним из наиболее перспективных направлений признаётся геологическое хранение (секвестрация) диоксида углерода (CO2) в

Papin, A.A., Tokareva M.A. Global solvability of the problem of viscous fluid filtration in a viscoelastic porous medium with permeable boundaries.

© 2026 Папин А.А., Токарева М.А..

Работа выполнена за счет гранта Российского Научного Фонда № 23-71- 10045, https://rscf.ru/project/23-71-10045.

Поступила 3 марта 2026 г., опубликована 15 июня 2026 г.

глубинных пористых структурах — выработанных месторождениях углеводородов и глубоких солёных водоносных горизонтах [1] – [4]. Эффективность и безопасность такого захоронения напрямую зависят от способности геологической среды удерживать закачиваемый газ на протяжении длительного времени, что требует глубокого понимания сложных гидромеханических процессов, возникающих при нагнетании.

С математической точки зрения, процесс закачки CO2 в глубокие пласты описывается в рамках механики многофазных сред и теории фильтрации. При этом классические модели с жестким скелетом оказываются недостаточными, так как закачка флюида под высоким давлением неизбежно приводит к деформации пористой структуры горной породы, изменению её фильтрационно-ёмкостных свойств (пористости и проницаемости) и возникновению напряжённо-деформированного состояния в системе [5], [6]. Для корректного описания этих эффектов применяются модели пороупругости, которые связывают фильтрацию флюида и деформацию упругой матрицы через систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Такие модели, основанные на законах сохранения массы для фаз, законе Дарси с учётом движения скелета и реологических соотношениях (например, типа Максвелла), адекватно отражают процессы консолидации, изменения порового давления и фильтрационные отклики среды [7]–[9].

Несмотря на очевидную практическую значимость, математическая теория пороупругости применительно к задачам подземного хранения газа разработана недостаточно полно. Как отмечается в ряде работ, существующие модели часто сложны для инженерного применения, а результаты о разрешимости начально-краевых задач, свойствах и качественном поведении решений остаются фрагментарными. Вопросы локальной и глобальной разрешимости, единственности решения, а также корректности постановки граничных условий (например, проницаемых или непроницаемых границ пласта) требуют строгого математического обоснования. Исследование этих аспектов необходимо не только для развития теории нелинейных уравнений, но и для верификации численных моделей, используемых при проектировании подземных хранилищ.

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей фильтрацию жидкости (газа) в пороупругой среде. Основное внимание уделено обоснованию корректности математической постановки в классах достаточно гладких функций и анализу физически допустимых режимов решения, что имеет прямое приложение к задачам прогнозирования поведения CO2 в геологических структурах и оценки целостности пласта-коллектора.

2 Определяющие уравнения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение вязкой жидкости в деформируемой вязкоупругой среде. Уравнения неразрывности для каждой фазы с учетом переменной пористости в отсутствие фазовых переходов принимают вид [10]:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_f) = 0, \\ \tfrac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_s \vec{v}_s) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз (f – жидкая фаза, s – твёрдый деформируемый скелет), ϕ – пористость.

Вместо уравнений сохранения импульса в теории двухфазной фильтрации используется обобщенный закон Дарси для жидкой фазы, учитывающий движение твердого скелета [11], [12]:

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \tag{2}$$

где p_f – давление жидкости, $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации (заданная функция), $\vec{g}$ – вектор ускорения силы тяжести.

Принципиальным моментом является учет сжимаемости пористой среды. Соотношение типа Максвелла, связывающее пористость и эффективное давление p_e, выглядит следующим образом [7], [8], [9]:

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta(\phi) \frac{dp_e}{dt}, \tag{3}$$

где $\xi(\phi), \beta(\phi)$ – заданные функции, зависящие от пористости (коэффициенты объемной вязкости и упругости соответственно), $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_s \cdot \nabla)$ – материальная производная. Эффективное давление p_e и давления в жидкой и твердой фазах p_f, p_s связаны соотношениями:

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s, \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f). \tag{4}$$

Уравнение баланса сил системы в целом имеет вид [5], [7], [8]:

$$\begin{gathered} \nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g} + \nabla \cdot \left((1-\phi)\eta \left(\tfrac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} + \left(\tfrac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right), \\ \rho_{tot} = \phi \rho_f + (1-\phi)\rho_s, \end{gathered} \tag{5}$$

где p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – общая плотность, η – вязкость пористого скелета, $*$ – символ операции транспонирования. Здесь используется подход, при котором девиатором тензора напряжения в жидкой фазе пренебрегают, потому что вязкость жидкости много меньше, чем сдвиговая вязкость скелета.

Таким образом система уравнений (1)–(5), описывающая движение жидкости в деформируемой пористой среде, принимает вид [13]:

$$\tfrac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \phi \vec{v}_f) = 0, \quad \tfrac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_s \vec{v}_s) = 0, \tag{6}$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta(\phi)\frac{dp_e}{dt}), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_s \cdot \nabla), \tag{8}$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s, \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f), \tag{9}$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g} + div\left((1-\phi)\eta\left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}}\right)^*\right)\right), \quad \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s. \tag{10}$$

Данная модель является достаточно сложной для исследования, относительно новой и исследована недостаточно подробно. В одномерном случае для системы уравнений (6)–(10) в случае неизотермической фильтрации при преобладании вязких свойств скелета в работе [14] предложен алгоритм расчета и проведено численное исследование полученной начально-краевой задачи. В случае двухфазной неизотермической фильтрации в тонком пороупругом слое получены некоторые точные решения в работах [15], [16]. В приложении к задачам захоронения CO2 в пороупругих средах в работе [17] численно исследована модель закачки CO2 в тонкий вязкоупругий слой При постоянстве плотностей глобальная разрешимость изотермической задачи непротекания доказана в [13]. В работах [18], [19] рассматриваются задачи двухфазной фильтрации в деформируемой среде с известной пористостью. Цель настоящей работы - исследование глобальной разрешимости предложенной системы уравнений (6)–(10) для случая проницаемых границ.

3 Локальная разрешимость

Одномерная модель в случае преобладания вязких свойств деформируемого скелета ($\beta(\phi) = 0$) принимает следующий вид:

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial (1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) = 0, \\ \tfrac{\partial (\rho_f \phi)}{\partial t} + \tfrac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi v_f) = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

$$q_D = -k(\phi)(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g), \tag{12}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \tag{13}$$

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \quad p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi) p_s, \\ \rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s. \end{gathered} \tag{14}$$

Система решается в области $(x,t) \in Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,1)$, а также дополняется следующими краевыми и начальными условиями

$$\begin{gathered} v_s|_{x=0,x=1} = 0 \quad q_D|_{x=0} = q_D^0(t), \quad q_D|_{x=1} = q_D^1(t), \\ p_{tot}|_{x=0} = p^0(t), \quad \phi|_{t=0} = \phi^0(x). \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь $q_D = \phi(v_f - v_s)$ – скорость Дарси, g – плотность массовых сил, x, t - координаты Эйлера. Истинные плотности твердых частиц ρ_s и жидкости ρ_f принимаются постоянными. Таким образом, решение поставленной задачи сводится к отысканию пористости, скоростей и давлений фаз, удовлетворяющих системе уравнений (11) – (14) и начально-краевым условиям (15).

В настоящей статье установлена глобальная по времени разрешимость задачи (11)–(15).

Основные обозначения, которые будут использованы далее, будем понимать в общепринятом смысле [20]. Для функции *f(x,t)*, определенной в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T]$ введем некоторые функциональные пространства. Пусть $||\cdot||_{q,\Omega}$ норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q \in [1,\infty]$, которую будем также обозначать для краткости $||\cdot||_q = ||\cdot||_{q,\Omega}$, $||\cdot|| = ||\cdot||_{2,\Omega}$. Нами также будет использоваться пространство Гельдера $C^{\alpha}(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, k – натуральное, $\alpha \in (0,1]$, в котором определены нормы:

$$||f||_{C^{\alpha}(\Omega)} \equiv |f|_{\alpha,\Omega} = |f|_{0,\Omega} + H^{\alpha}_x(f), |f|_{0,\Omega} = \max_{x\in\overline{\Omega}} |f(x)|,$$

$$H^{\alpha}_x(f) = \sup_{x_1,x_2\in\Omega} |f(x_1) - f(x_2)||x_1 - x_2|^{-\alpha},$$

$$||f||_{C^{k+\alpha}(\Omega)} \equiv |f|_{k+\alpha,\Omega} = \sum_{m=0}^{k} ||D^m_x f||_{0,\Omega} + H^{\alpha}(D^k_x f).$$

Для функций, определенных на Q_T, нам потребуется пространство $C^{k+\alpha,m+\beta}(Q_T)$, где *k,m* – натуральные, $(\alpha,\beta) \in (0,1]$, с нормой

$$||f||_{C^{k+\alpha,m+\beta}(Q_T)} \equiv |f|_{k+\alpha,m+\beta,Q_T} = \sum_{l=0}^{k} ||D^l_x f||_{0,Q_T} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} ||D^j_t f||_{0,Q_T} + H^{\alpha}_x(D^k_x f) + H^{\beta}_t(D^k_x f) + H^{\alpha}_x(D^m_t f) + H^{\beta}_t(D^m_t f),$$

где

$$H^{\alpha}_x(f(x,t)) = \sup_{x_1,x_2\in\Omega, t\in(0,T)} |f(x_1,t) - f(x_2,t)||x_1 - x_2|^{-\alpha},$$

$$H^{\beta}_t(f(x,t)) = \sup_{t_1,t_2\in(0,T), x\in\Omega} |f(x,t_1) - f(x,t_2)||t_1 - t_2|^{-\beta}.$$

В случае $k{=}m$ и $\alpha{=}\beta$ используется обозначение $C^{k+\alpha}(Q_T)$.

Определение 1. *Решением задачи* (11) – (15) *называется совокупность функций* $\phi, v_s, v_f \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_T), p_f, p_s \in C^{1+\alpha,1+\beta}(Q_T)$, *удовлетворяющих уравнениям* (11)–(14) *и принимающих начальные и граничные условия* (15) *как непрерывные в* Q_T *функции, а также таких, что* $0 < \phi < 1$.

Теорема 1. *Пусть данные задачи* (11) – (15) *обладают следующим свойствами: 1. функции* $k(\phi)$, $\xi(\phi)$*и их производные до второго порядка непрерывны для* $\phi \in (0,1)$ *и удовлетворяют условиям*

$$k_0^{-1}\phi^{q_1}(1-\phi)^{q_2} \le k(\phi) \le k_0\phi^{q_3}(1-\phi)^{q_4},$$

$$\frac{1}{\xi(\phi)} = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1}, \quad 0 < R_1 \le a_0(\phi) \le R_2 < \infty,$$

где $k_0,\ \alpha_i,\ R_i,\ i = 1, 2$ *– положительные постоянные,* $q_1, ..., q_4$ *– фиксированные вещественные числа. 2. функция* g*, начальная функция* ϕ^0 *и граничные функции* $p^0(t)$*,* $q_D^0(t)$*,* $q_D^1(t)$ *удовлетворяют следующим условиям гладкости*

$$g(x,t) \in C^{1+\alpha,1+\beta}(\bar{Q}_T), \quad \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T), (q_D^0(t), q_D^1(t), p^0(t)) \in C^{1+\beta}(0,T),$$

и неравенствам

$$0 < m_0 \le \phi^0(x) \le M_0 < 1, \quad |g(x,t)| \le g_0 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где $m_0,\ M_0,\ g_0$ *– известные положительные константы. Тогда существует единственное локальное классическое решение задачи* (11) *–* (15)*, т. е. существует значение* t_0 *такое, что*

$$(\phi(x,t), v_s(x,t), v_f(x,t)) \in C^{2+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}),$$

$$(p_f(x,t), p_s(x,t)) \in C^{1+\alpha,1+\beta}(Q_{t_0}),$$

а также $0 < \phi(x,t) < 1$ *в* $\bar{Q}_{t_0}$.

Локальная разрешимость задачи установлена в [21].

4 Глобальная разрешимость

Теорема 2. *Пусть дополнительно к условиям теоремы 1 функции* $k(\phi)$*,* $\xi(\phi)$*,* $q_D^0(t)$*,* $q_D^1(t)$ *удовлетворяют условиям*

$$k(\phi) = k = const, \quad \xi(\phi) = k_1\phi^{-1},$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\phi^0(x)}{1-\phi^0(x)}dx + \int\limits_0^t (q_D^0(\tau) - q_D^1(\tau))d\tau > 0,$$

где k, k_1 *– положительные постоянные. Тогда для всех* $t \in [0,T]$*,* $T < \infty$ *существует решение задачи* (11) *–* (15)*, причем существуют числа* $0 < m_1 < M_1 < 1$ *такие, что* $m_1 \le \phi(x,t) \le M_1$*,* $(x,t) \in Q_T$*.*

Доказательство. В силу теоремы 1 будем считать, что на промежутке $[0,\ t_0]$ существует решение задачи (11) – (15), причем $0 < \phi(x,t) < 1$, $x \in \Omega$, $t \in [0,\ t_0]$. После получения необходимых априорных оценок, не зависящих от величины t_0, локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0,\ T]$.

Легко видеть, что переход к переменным Лагранжа при доказательстве теоремы позволяет исключить из системы скорости фаз, а также при постоянстве плотностей фаз свести исходную систему к одному уравнению для функции пористости [21]. Таким образом, после перехода к безразмерным переменным Лагранжа (по скорости твердой фазы) система (11) – (14) примет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\tfrac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2 \tfrac{\partial v_s}{\partial x} = 0, \\
\tfrac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac{\phi}{1-\phi}\right) + \tfrac{\partial}{\partial x}(\phi(v_f - v_s)) = 0,
\end{gathered} \tag{16}
$$

$$
q_D = -k(\phi)\left((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g\right), \tag{17}
$$

$$
(1-\phi)\frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \tag{18}
$$

$$
(1-\phi)\frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi)p_e, \quad a_1(\phi) = \frac{1}{\xi(\phi)}. \tag{19}
$$

Опишем схему преобразования системы (16)-(19). Подствляя во второе уравнение (16) скорость Дарси (17), получим

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(\phi)((1-\phi)\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g)\right) = 0. \tag{20}
$$

Уравнение (19) с учетом первого уравнения (16) примет вид

$$
\frac{1}{1-\phi}\frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi)(p_{tot} - p_f).
$$

Однако его удобнее переписать в следующей форме

$$
p_{tot} - p_f = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t}, \tag{21}
$$

где функция $G(\phi)$ определяется следующим равенством

$$
\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}.
$$

Продифференцировав уравнение (21) по переменной x, а также используя уравнение (18), при подстановке в уравнение(20) получим

$$
\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\phi}{1-\phi}) = \frac{\partial}{\partial x}(k(\phi)(1-\phi)(\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f))). \tag{22}
$$

С учетом условий протекания, начальные и граничные условия записываются в виде

$$
\begin{gathered}
\phi|_{t=0} = \phi^0, \\
\left(k(\phi)(1-\phi)\left(\tfrac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f)\right) + q_D\right)|_{x=0,1} = 0.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Положим в (22) $s(x,t) = \phi/(1-\phi)$. Тогда функция s удовлетворяет следующей задаче

$$
\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{1}{1+s}\left(\frac{\partial^2 G(s)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f)\right)\right) = 0, \tag{24}
$$

$$
\begin{gathered}
s|_{t=0} = s^0, \\
\left(\frac{1}{1+s}(\frac{\partial^2 G(s)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f)) + q_D\right)|_{x=0,x=1} = 0,
\end{gathered} \tag{25}
$$

где
$$s^0 = \frac{\phi^0}{1-\phi^0}.$$
Имеет место следующая Лемма.

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы 2 для всех* $t \in [0,T]$ *имеет место следующее соотношение:*
$$\int\limits_0^1 s(x,t)dx = B(t), \tag{26}$$
где $B(t) = \int\limits_0^1 s^0(x)dx + \int\limits_0^t (q_D^0(\tau) - q_D^1(\tau))d\tau$ *есть заданная положительная, ограниченная функция начальных данных задачи* (24)–(25).

Замечание. В силу равенства (26) существует ограниченная измеримая функция $a(t) \in [0,1]$ такая, что $s(a(t),t) = \hat{B}(t)$. Поскольку функция $\psi(x,t) = s(x,t) - \hat{B}(t)$ обладает свойством $\int_0^1 \psi(x,t)ds = 0$, то существует $a(t)$ такая, что $\psi(a(t),t) = 0$. Следовательно, $\int_0^1 (s(x,t) - s^0(x))dx = \int_0^t (q^0(\tau) - q^1(\tau))d\tau \equiv \bar{B}(t)$, т.е. $(s(x,t) - s^0(x))|_{x=a(t)} = \bar{B}(t)$. Поэтому $s(a(t),t) = s^0(a(t)) + \bar{B}(t) = \hat{B}(t)$.

Лемма 2. *Пусть* $s(x,t)$ *– решение задачи* (24)–(25). *Тогда существуют постоянные* A, B *такие, что* $0 < A \le s \le B < \infty$ *для любого* $t \in [0,T]$.

Доказательство. Для доказательства леммы рассмотрим следующую вспомогательную задачу:
$$z \equiv \frac{\partial G}{\partial t}, \quad G|_{t=0} = G(\phi^0) \equiv G^0(x), \tag{27}$$
$$\frac{z}{d(G)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(G)\frac{\partial z}{\partial x} - b(G)\right) = 0, \tag{28}$$
$$\left(a(G)\frac{\partial z}{\partial x} - b(G) + q_D\right)|_{x=0,x=1} = 0, \tag{29}$$
где
$$d(G) = \frac{1-\phi(G)}{a_1(\phi(G))}, \quad a(G) = k(\phi(G))(1-\phi(G)),$$
$$b(G) = k(\phi(G))g(1-\phi(G))(\rho_s - \rho_f).$$

Обозначим $D = a\frac{\partial z}{\partial x} - b$. Функция D удовлетворяет граничным условиям $D|_{x=0} = -q_D^0(t), \quad D|_{x=1} = -q_D^1(t)$. В силу (28) имеем $z = d\frac{\partial D}{\partial x}$. Откуда получим уравнение для D:
$$D = a\frac{\partial}{\partial x}(d\frac{\partial D}{\partial x}) - b. \tag{30}$$
Положим $D^{(k)} = \max\{D-k, 0\}, k > \max\{\max_t(-q^0), \max_t(-q^1), 0\} \ge 0$.

Уравнение (30) умножим на $D^{(k)}$ и результат проинтегрируем по Ω. Получим:

$$\int_0^1 (\frac{DD^{(k)}}{a} + \frac{b}{a}D^{(k)} + dD_x D_x^{(k)})dx = 0.$$

Откуда следует, что

$$\int_0^1 D^{(k)} dx \leq 0.$$

Поэтому $D^{(k)} = 0$ и $D \leq k$.

Получим оценку снизу для D. Рассмотрим $\bar{D} = -D$. Тогда уравнение для $\bar{D}$ примет вид:

$$\bar{D} = a\frac{\partial}{\partial x}(d\frac{\partial \bar{D}}{\partial x}) + b.$$

Умножим уравнение для $\bar{D}$ на функцию

$$\bar{D}^{(l)} = \max\{\bar{D} - l, 0\}, l > \max\{\max_t(q^0), \max_t(q^1), 0, g(\rho_s - \rho_f)\} \geq 0$$

и результат проинтегрируем по Ω, получим:

$$\int_0^1 (\frac{\bar{D}\bar{D}^{(l)}}{a} - \frac{b}{a}\bar{D}^{(l)} + d\bar{D}_x \bar{D}_x^{(l)})dx = 0.$$

Откуда получим, что

$$\int_0^1 (\frac{l-b}{a}\bar{D}^{(l)})dx \leq 0.$$

Поэтому $\bar{D}^{(l)} = 0$, $\bar{D} \leq l$ и $D \geq -l$.

Таким образом имеем оценку $|D| \leq C = \max\{k, l\}$.

Заметим, что следствием леммы 1 является оценка $\displaystyle\int_0^1 s dx < \infty$, из которой следует, что

$$\int_0^1 \frac{1}{1-\phi} dx < \infty.$$

Поскольку $D = a\frac{\partial z}{\partial x} - b$, то

$$|z_x| \leq |\frac{D}{k(1-\phi)}| + |g(\rho_s - \rho_f)|.$$

Проинтегрируем это неравенство по x от 0 до 1. Получим:

$$\int_0^1 |z_x| dx \leq \int_0^1 |\frac{D}{k(1-\phi)}| dx + \int_0^1 |g(\rho_s - \rho_f)| dx \leq \frac{|D|}{k} |\int_0^1 \frac{1}{|1-\phi|}| dx + \int_0^1 |g(\rho_s - \rho_f)| dx \leq$$

$$\leq \frac{C}{k}\int_0^1 |\frac{1}{|1-\phi|}| dx + \int_0^1 |g(\rho_s - \rho_f)| dx \leq C_1,$$

где C_1 – положительная постоянная, зависящая от данных задачи.

Таким образом имеем оценку

$$\int_0^1 |z_x| dx \leq C_1,$$

из которой получим, что $|z| = |G_t| \leq c_1 = const > 0$, а следовательно $-c_1 \leq G_t \leq c_1$. Откуда имеем оценку для G:

$$G_0 - Tc_1 \leq G \leq Tc_1 + G_0,$$

а следовательно и для s (т.к. из свойств функции G следует, что $G = lns$):

$$s_0 e^{-Tc_1} \leq s \leq s_0 e^{Tc_1}.$$

Лемма 2 доказана. □

С учетом леммы 2 выводим оценку $|z_x| \leq c_2$. Из (28), (29) аналогично лемме 1 находим точку $b(t) \in [0, 1]$, в которой функция z известна:

$$z(b(t), t) = d(G(b(t), t)(q_D^0(t) - q_D^1(t)),$$

и, следовательно, $|z(x, t)| \leq c_3$. Далее получаем оценки в гельдеровских нормах для функции z по x и по t [22]. А затем, используя для функции z теорию эллиптических уравнений [23], приходим к утверждению теоремы 2 .

□

References

[1] A. Niemi, J. Bear, J. Bensabat (eds.), *Geological Storage of CO2 in Deep Saline Formations*, Springer Dordrecht, 2016.

[2] M. Ferronato,G. Gambolati, C. Janna, P. Teatini, *Geomechanical issues of anthropogenic CO2 sequestration in exploited gas fields*, Energy Conversion and Management, **51**:10 (2010), 1918–1928.

[3] C. Wang, S. Luo, Y. Mou, J. Zeng, Y. Ren, C. Guo, *Numerical simulations of geological CO2 storage in a gas reservoir of the B depression, Pearl River Mouth Basin*, Energy Geoscience, **7**:1 (2026), 100512.

[4] M.A. Hesse, *Mathematical modeling and multiscale simulation of carbon dioxide storage in saline aquifers*, Doctoral dissertation, Stanford University, 2008.

[5] O. Coussy, *Poromechanics*, John Wiley & Sons, 2004.

[6] J.J.E. Lee, *Modelling and Simulation of Compacting Sedimentary Basins*, PhD dissertation, University of Oxford, 2019.

[7] A. Fowler, *Mathematical Geoscience*, Springer-Verlag London Limited, 2011.

[8] C.Morency et al., *A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability*, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, **112**:B10 (2007), paper no. B10407.

[9] J.A.D. Connolly, Y.Y. Podladchikov, *Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock*, Geodin. Acta, **11** (1998), 55–84.

[10] R. I. Nigmatulin, *Fundamentals of the Mechanics of Heterogeneous Media*, Nauka, Moscow, 1978 (In Russian).

[11] J. Bear, A.H.D. Cheng, *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport*, Springer Science & Business Media, Berlin, 2010.

[12] F. Schneider, J.L. Potdevin, S. Wolf, I. Faille, *Mechanical and chemical compaction model for sedimentary basin simulation*, Tectonophysics, **263** (1996), 307–317.

[13] M.A. Tokareva, A.A. Papin, *On the existence of global solution of the system of equations of one-dimensional motion of a viscous liquid in a deformable viscous porous medium*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:2 (2021), 1397–1422. Zbl 1486.35352

[14] R. Virts, A. Papin, M. Tokareva, *Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium*, Journal of Physics: Conference Series, **1666** (2020), paper no. 012041.

[15] M.A. Tokareva, A.A. Papin, *Mathematical model of fluids motion in poroelastic snow-ice cover*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, **14**:1 (2021), 47–56.

[16] A.A. Papin, M.A. Tokareva, *Problems of heat and mass transfer in the snow-ice cover*, IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, (2018), paper no. 012055.

[17] V.B. Pogosyan, M.A. Tokareva, A.A. Papin, *Calculation of the Physical Characteristics of a Poroelastic Medium in the Gas Filtration Process*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **66** (2025), 758–768.

[18] V. V. Shelukhin, *A poroelastic medium saturated by a two-phase capillary fluid*, Contin. Mech. Thermodyn., **26** :5 (2014), 619–638.

[19] Y. Amirat, V. Shelukhin, K. Trusov, *Cross-coupling permeabilities in two-phase flows through porous media: Spontaneous counter-current capillary imbibition*, Int. J. Eng. Sci., **221** (2026), Article ID 104471. Zbl 8154734

[20] S.N.Antontsev, A.V.Kazhikhov, V.N.Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, Amsterdam etc., North-Holland 1990. Zbl 0696.76001

[21] A.A. Papin, M.A. Tokareva, *Solvability of a one-dimensional problem of fluid flow in poroelastic medium with permeable boundaries*, Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics, **90** (2024), 140–151.

[22] M.A. Tokareva, A.A. Papin, *Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium*, J. Appl. Ind. Math., **13**:2 (2019), 350–362. Zbl 1438.76044

[23] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type*, Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).

Alexander Alekseevich Papin
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
Email address: papin@math.asu.ru

Margarita Andreevna Tokareva
Altai State University,
pr. Lenina, 61,
656049, Barnaul, Russia
Email address: tma2505@gmail.com