

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ

А.А. ПАПИН, М.А. ТОКАРЕВА  

Представлено М.А. ТОКАРЕВА

Abstract: Using the theory of interacting continua, governing equations for the motion of a viscous fluid in a poroelastic skeleton were obtained. In the first stage, local solvability in Holder classes was established. Uniform time estimates were then obtained, and global solvability of the initial-boundary value problem was established.

Keywords: poroelasticity, two-phase filtration, Darcy's law, global solvability, viscoelasticity.

1 Введение

Проблема антропогенного изменения климата стимулирует активный поиск технологий, способных снизить концентрацию парниковых газов в атмосфере. Одним из наиболее перспективных направлений признаётся геологическое хранение (секвестрация) диоксида углерода (CO_2) в

PAPIN, A.A., TOKAREVA M.A. GLOBAL SOLVABILITY OF THE PROBLEM OF VISCOUS FLUID FILTRATION IN A VISCOELASTIC POROUS MEDIUM WITH PERMEABLE BOUNDARIES.

© 2026 ПАПИН А.А., ТОКАРЕВА М.А..

Работа выполнена за счет гранта Российского Научного Фонда № 23-71- 10045, <https://rscf.ru/project/23-71-10045>.

Поступила 1 марта 2026 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

глубинных пористых структурах — выработанных месторождениях углеводородов и глубоких солёных водоносных горизонтах [1] – [4]. Эффективность и безопасность такого захоронения напрямую зависят от способности геологической среды удерживать закачиваемый газ на протяжении длительного времени, что требует глубокого понимания сложных гидромеханических процессов, возникающих при нагнетании.

С математической точки зрения, процесс закачки CO₂ в глубокие пласты описывается в рамках механики многофазных сред и теории фильтрации. При этом классические модели с жестким скелетом оказываются недостаточными, так как закачка флюида под высоким давлением неизбежно приводит к деформации пористой структуры горной породы, изменению её фильтрационно-ёмкостных свойств (пористости и проницаемости) и возникновению напряжённо-деформированного состояния в системе [5], [6]. Для корректного описания этих эффектов применяются модели пороупругости, которые связывают фильтрацию флюида и деформацию упругой матрицы через систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Такие модели, основанные на законах сохранения массы для фаз, законе Дарси с учётом движения скелета и реологических соотношениях (например, типа Максвелла), адекватно отражают процессы консолидации, изменения порового давления и фильтрационные отклики среды [7]–[9].

Несмотря на очевидную практическую значимость, математическая теория пороупругости применительно к задачам подземного хранения газа разработана недостаточно полно. Как отмечается в ряде работ, существующие модели часто сложны для инженерного применения, а результаты о разрешимости начально-краевых задач, свойствах и качественном поведении решений остаются фрагментарными. Вопросы локальной и глобальной разрешимости, единственности решения, а также корректности постановки граничных условий (например, проницаемых или непроницаемых границ пласта) требуют строгого математического обоснования. Исследование этих аспектов необходимо не только для развития теории нелинейных уравнений, но и для верификации численных моделей, используемых при проектировании подземных хранилищ.

Настоящая работа посвящена исследованию разрешимости начально-краевой задачи, моделирующей фильтрацию жидкости (газа) в пороупругой среде. Основное внимание уделено обоснованию корректности математической постановки в классах достаточно гладких функций и анализу физически допустимых режимов решения, что имеет прямое приложение к задачам прогнозирования поведения CO₂ в геологических структурах и оценки целостности пласта-коллектора.

2 Определяющие уравнения

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих движение вязкой жидкости в деформируемой вязкоупругой среде. Уравнения неразрывности для каждой фазы с учетом переменной пористости в отсутствие фазовых переходов принимают вид [10]:

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f\phi\vec{v}_f) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0.$$

Здесь $\rho_f, \rho_s, \vec{v}_f, \vec{v}_s$ – соответственно истинные плотности и скорости фаз (f – жидкая фаза, s – твердый деформируемый скелет), ϕ – пористость.

Вместо уравнений сохранения импульса в теории двухфазной фильтрации используется обобщенный закон Дарси для жидкой фазы, учитывающий движение твердого скелета [11], [12]:

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f - \rho_f\vec{g}), \quad (2)$$

где p_f – давление жидкости, $k(\phi)$ – коэффициент фильтрации (заданная функция), \vec{g} – вектор ускорения силы тяжести.

Принципиальным моментом является учет сжимаемости пористой среды. Соотношение типа Максвелла, связывающее пористость и эффективное давление p_e , выглядит следующим образом [7], [8], [9]:

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -\frac{1}{\xi(\phi)}p_e - \beta(\phi)\frac{dp_e}{dt}, \quad (3)$$

где $\xi(\phi), \beta(\phi)$ – заданные функции, зависящие от пористости (коэффициенты объемной вязкости и упругости соответственно), $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_s \cdot \nabla)$ – материальная производная. Эффективное давление p_e и давления в жидкой и твердой фазах p_f, p_s связаны соотношениями:

$$p_{tot} = \phi p_f + (1-\phi)p_s, \quad p_e = (1-\phi)(p_s - p_f). \quad (4)$$

Уравнение баланса сил системы в целом имеет вид [5], [7], [8]:

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot}\vec{g} + \nabla \cdot \left((1-\phi)\eta \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right), \quad (5)$$

$$\rho_{tot} = \phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s,$$

где p_{tot} – общее давление, ρ_{tot} – общая плотность, η – вязкость пористого скелета, * – символ операции транспонирования. Здесь используется подход, при котором девиатором тензора напряжения в жидкой фазе пренебрегают, потому что вязкость жидкости много меньше, чем сдвиговая вязкость скелета.

Таким образом система уравнений (1)–(5), описывающая движение жидкости в деформируемой пористой среде, принимает вид [13]:

$$\frac{\partial(\rho_f\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f\phi\vec{v}_f) = 0, \quad \frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot ((1-\phi)\rho_s\vec{v}_s) = 0, \quad (6)$$

$$\phi(\vec{v}_f - \vec{v}_s) = -k(\phi)(\nabla p_f - \rho_f \vec{g}), \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}_s = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e - \beta(\phi) \frac{dp_e}{dt}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_s \cdot \nabla), \quad (8)$$

$$p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s, \quad p_e = (1 - \phi)(p_s - p_f), \quad (9)$$

$$\nabla p_{tot} = \rho_{tot} \vec{g} + \text{div} \left((1 - \phi) \eta \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} + \left(\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial \vec{x}} \right)^* \right) \right), \quad \rho_{tot} = \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s. \quad (10)$$

Данная модель является достаточно сложной для исследования, относительно новой и исследована недостаточно подробно. В одномерном случае для системы уравнений (6)–(10) в случае неизотермической фильтрации при преобладании вязких свойств скелета в работе [14] предложен алгоритм расчета и проведено численное исследование полученной начально-краевой задачи. В случае двухфазной неизотермической фильтрации в тонком пороупругом слое получены некоторые точные решения в работах [15], [16]. В приложении к задачам захоронения CO₂ в пороупругих средах в работе [17] численно исследована модель закачки CO₂ в тонкий вязкоупругий слой. При постоянстве плотностей глобальная разрешимость изотермической задачи непротекания доказана в [13]. В работах [18], [19] рассматриваются задачи двухфазной фильтрации в деформируемой среде с известной пористостью. Цель настоящей работы - исследование глобальной разрешимости предложенной системы уравнений (6)–(10) для случая проницаемых границ.

3 Локальная разрешимость

Одномерная модель в случае преобладания вязких свойств деформируемого скелета ($\beta(\phi) = 0$) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-\phi)\rho_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}((1-\phi)\rho_s v_s) &= 0, \\ \frac{\partial(\rho_f \phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_f \phi v_f) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$q_D = -k(\phi) \left(\frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} = -\frac{1}{\xi(\phi)} p_e, \quad p_e = p_{tot} - p_f, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{tot}}{\partial x} &= -\rho_{tot} g, \quad p_{tot} = \phi p_f + (1 - \phi) p_s, \\ \rho_{tot} &= \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s. \end{aligned} \quad (14)$$

Система решается в области $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$, а также дополняется следующими краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} v_s|_{x=0, x=1} &= 0 \quad q_D|_{x=0} = q_D^0(t), \quad q_D|_{x=1} = q_D^1(t), \\ p_{tot}|_{x=0} &= p^0(t), \quad \phi|_{t=0} = \phi^0(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $q_D = \phi(v_f - v_s)$ - скорость Дарси, g - плотность массовых сил, x, t - координаты Эйлера. Истинные плотности твердых частиц ρ_s и

жидкости ρ_f принимаются постоянными. Таким образом, решение поставленной задачи сводится к отысканию пористости, скоростей и давлений фаз, удовлетворяющих системе уравнений (11) – (14) и начальнo-краевым условиям (15).

В настоящей статье установлена глобальная по времени разрешимость задачи (11)–(15).

Основные обозначения, которые будут использованы далее, будем понимать в общепринятом смысле [20]. Для функции $f(x,t)$, определенной в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T]$ введем некоторые функциональные пространства. Пусть $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ норма в пространстве Лебега $L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty]$, которую будем также обозначать для краткости $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{q,\Omega}$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,\Omega}$. Нами также будет использоваться пространство Гельдера $C^\alpha(\Omega)$, $C^{k+\alpha}(\Omega)$, k – натуральное, $\alpha \in (0, 1]$, в котором определены нормы:

$$\|f\|_{C^\alpha(\Omega)} \equiv |f|_{\alpha,\Omega} = |f|_{0,\Omega} + H_x^\alpha(f), \quad |f|_{0,\Omega} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|,$$

$$H_x^\alpha(f) = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega} |f(x_1) - f(x_2)| |x_1 - x_2|^{-\alpha},$$

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\Omega)} \equiv |f|_{k+\alpha,\Omega} = \sum_{m=0}^k \|D_x^m f\|_{0,\Omega} + H_x^\alpha(D_x^k f).$$

Для функций, определенных на Q_T , нам потребуется пространство $C^{k+\alpha, m+\beta}(Q_T)$, где k, m – натуральные, $(\alpha, \beta) \in (0, 1]$, с нормой

$$\|f\|_{C^{k+\alpha, m+\beta}(Q_T)} \equiv |f|_{k+\alpha, m+\beta, Q_T} = \sum_{l=0}^k \|D_x^l f\|_{0, Q_T} +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \|D_t^j f\|_{0, Q_T} + H_x^\alpha(D_x^k f) + H_t^\beta(D_x^k f) + H_x^\alpha(D_t^m f) + H_t^\beta(D_t^m f),$$

где

$$H_x^\alpha(f(x, t)) = \sup_{x_1, x_2 \in \Omega, t \in (0, T)} |f(x_1, t) - f(x_2, t)| |x_1 - x_2|^{-\alpha},$$

$$H_t^\beta(f(x, t)) = \sup_{t_1, t_2 \in (0, T), x \in \Omega} |f(x, t_1) - f(x, t_2)| |t_1 - t_2|^{-\beta}.$$

В случае $k=m$ и $\alpha=\beta$ используется обозначение $C^{k+\alpha}(Q_T)$.

Определение 1. Решением задачи (11) – (15) называется совокупность функций $\phi, v_s, v_f \in C^{2+\alpha, 1+\beta}(Q_T)$, $p_f, p_s \in C^{1+\alpha, 1+\beta}(Q_T)$, удовлетворяющих уравнениям (11)–(14) и принимающих начальные и граничные условия (15) как непрерывные в Q_T функции, а также таких, что $0 < \phi < 1$.

Теорема 1. Пусть данные задачи (11) – (15) обладают следующим свойством: 1. функции $k(\phi)$, $\xi(\phi)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $\phi \in (0, 1)$ и удовлетворяют условиям

$$k_0^{-1} \phi^{q_1} (1 - \phi)^{q_2} \leq k(\phi) \leq k_0 \phi^{q_3} (1 - \phi)^{q_4},$$

$$\frac{1}{\xi(\phi)} = a_0(\phi)\phi^{\alpha_1}(1-\phi)^{\alpha_2-1}, \quad 0 < R_1 \leq a_0(\phi) \leq R_2 < \infty,$$

где $k_0, \alpha_i, R_i, i = 1, 2$ – положительные постоянные, q_1, \dots, q_4 – фиксированные вещественные числа. 2. функция g , начальная функция ϕ^0 и граничные функции $p^0(t), q_D^0(t), q_D^1(t)$ удовлетворяют следующим условиям гладкости

$$g(x, t) \in C^{1+\alpha, 1+\beta}(\bar{Q}_T), \quad \phi^0(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega}_T), \quad (q_D^0(t), q_D^1(t), p^0(t)) \in C^{1+\beta}(0, T),$$

и неравенствам

$$0 < m_0 \leq \phi^0(x) \leq M_0 < 1, \quad |g(x, t)| \leq g_0 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где m_0, M_0, g_0 – известные положительные константы. Тогда существует единственное локальное классическое решение задачи (11) – (15), т. е. существует значение t_0 такое, что

$$(\phi(x, t), v_s(x, t), v_f(x, t)) \in C^{2+\alpha, 1+\beta}(Q_{t_0}),$$

$$(p_f(x, t), p_s(x, t)) \in C^{1+\alpha, 1+\beta}(Q_{t_0}),$$

а также $0 < \phi(x, t) < 1$ в \bar{Q}_{t_0} .

Локальная разрешимость задачи установлена в [21].

4 Глобальная разрешимость

Теорема 2. Пусть дополнительно к условиям теоремы 1 функции $k(\phi), \xi(\phi), q_D^0(t), q_D^1(t)$ удовлетворяют условиям

$$k(\phi) = k = const, \quad \xi(\phi) = k_1\phi^{-1},$$

$$\int_0^1 \frac{\phi^0(x)}{1-\phi^0(x)} dx + \int_0^t (q_D^0(\tau) - q_D^1(\tau)) d\tau > 0,$$

где k, k_1 – положительные постоянные. Тогда для всех $t \in [0, T], T < \infty$ существует решение задачи (11) – (15), причем существуют числа $0 < m_1 < M_1 < 1$ такие, что $m_1 \leq \phi(x, t) \leq M_1, (x, t) \in Q_T$.

Доказательство. В силу теоремы 1 будем считать, что на промежутке $[0, t_0]$ существует решение задачи (11) – (15), причем $0 < \phi(x, t) < 1, x \in \Omega, t \in [0, t_0]$. После получения необходимых априорных оценок, не зависящих от величины t_0 , локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0, T]$.

Легко видеть, что переход к переменным Лагранжа при доказательстве теоремы позволяет исключить из системы скорости фаз, а также при постоянстве плотностей фаз свести исходную систему к одному уравнению для функции пористости [21]. Таким образом, после перехода к безразмерным переменным Лагранжа (по скорости твердой фазы) система (11) – (14) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + (1-\phi)^2 \frac{\partial v_s}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\phi(v_f - v_s)) &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$q_D = -k(\phi) \left((1-\phi) \frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g \right), \quad (17)$$

$$(1-\phi) \frac{\partial p_{tot}}{\partial x} = -\rho_{tot} g, \quad (18)$$

$$(1-\phi) \frac{\partial v_s}{\partial x} = -a_1(\phi) p_e, \quad a_1(\phi) = \frac{1}{\xi(\phi)}. \quad (19)$$

Опишем схему преобразования системы (16)-(19). Подставляя во второе уравнение (16) скорость Дарси (17), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\phi) \left((1-\phi) \frac{\partial p_f}{\partial x} + \rho_f g \right) \right) = 0. \quad (20)$$

Уравнение (19) с учетом первого уравнения (16) примет вид

$$\frac{1}{1-\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -a_1(\phi) (p_{tot} - p_f).$$

Однако его удобнее переписать в следующей форме

$$p_{tot} - p_f = -\frac{\partial G(\phi)}{\partial t}, \quad (21)$$

где функция $G(\phi)$ определяется следующим равенством

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a_1(\phi)(1-\phi)}.$$

Продифференцировав уравнение (21) по переменной x , а также используя уравнение (18), при подстановке в уравнение (20) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{1-\phi} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(\phi)(1-\phi) \left(\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f) \right) \right). \quad (22)$$

С учетом условий протекания, начальные и граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} \phi|_{t=0} &= \phi^0, \\ \left(k(\phi)(1-\phi) \left(\frac{\partial^2 G(\phi)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f) \right) + q_D \right) |_{x=0,1} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Положим в (22) $s(x, t) = \phi/(1-\phi)$. Тогда функция s удовлетворяет следующей задаче

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{1}{1+s} \left(\frac{\partial^2 G(s)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f) \right) \right) = 0, \quad (24)$$

$$s|_{t=0} = s^0,$$

$$\left(\frac{1}{1+s} \left(\frac{\partial^2 G(s)}{\partial x \partial t} - g(\rho_s - \rho_f) \right) + q_D \right) |_{x=0, x=1} = 0, \quad (25)$$

где

$$s^0 = \frac{\phi^0}{1 - \phi^0}.$$

Имеет место следующая Лемма.

Лемма 1. При выполнении условий теоремы 2 для всех $t \in [0, T]$ имеет место следующее соотношение:

$$\int_0^1 s(x, t) dx = B(t), \quad (26)$$

где $B(t) = \int_0^1 s^0(x) dx + \int_0^t (q_D^0(\tau) - q_D^1(\tau)) d\tau$ есть заданная положительная, ограниченная функция начальных данных задачи (24)–(25).

Замечание. В силу равенства (26) существует ограниченная измеримая функция $a(t) \in [0, 1]$ такая, что $s(a(t), t) = \hat{B}(t)$. Поскольку функция $\psi(x, t) = s(x, t) - \hat{B}(t)$ обладает свойством $\int_0^1 \psi(x, t) ds = 0$, то существует $a(t)$ такая, что $\psi(a(t), t) = 0$. Следовательно, $\int_0^1 (s(x, t) - s^0(x)) dx = \int_0^t (q^0(\tau) - q^1(\tau)) d\tau \equiv \bar{B}(t)$, т.е. $(s(x, t) - s^0(x))|_{x=a(t)} = \bar{B}(t)$. Поэтому $s(a(t), t) = s^0(a(t)) + \bar{B}(t) = \hat{B}(t)$.

Лемма 2. Пусть $s(x, t)$ – решение задачи (24)–(25). Тогда существуют постоянные A, B такие, что $0 < A \leq s \leq B < \infty$ для любого $t \in [0, T]$.

Доказательство. Для доказательства леммы рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$z \equiv \frac{\partial G}{\partial t}, \quad G|_{t=0} = G(\phi^0) \equiv G^0(x), \quad (27)$$

$$\frac{z}{d(G)} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(G) \frac{\partial z}{\partial x} - b(G) \right) = 0, \quad (28)$$

$$\left(a(G) \frac{\partial z}{\partial x} - b(G) + q_D \right) |_{x=0, x=1} = 0, \quad (29)$$

где

$$d(G) = \frac{1 - \phi(G)}{a_1(\phi(G))}, \quad a(G) = k(\phi(G))(1 - \phi(G)),$$

$$b(G) = k(\phi(G))g(1 - \phi(G))(\rho_s - \rho_f).$$

Обозначим $D = a \frac{\partial z}{\partial x} - b$. Функция D удовлетворяет граничным условиям $D|_{x=0} = -q_D^0(t)$, $D|_{x=1} = -q_D^1(t)$. В силу (28) имеем $z = d \frac{\partial D}{\partial x}$. Откуда получим уравнение для D :

$$D = a \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial D}{\partial x} \right) - b. \quad (30)$$

Положим $D^{(k)} = \max\{D - k, 0\}$, $k > \max\{\max_t(-q^0), \max_t(-q^1), 0\} \geq 0$.

Уравнение (30) умножим на $D^{(k)}$ и результат проинтегрируем по Ω . Получим:

$$\int_0^1 \left(\frac{DD^{(k)}}{a} + \frac{b}{a}D^{(k)} + dD_x D_x^{(k)} \right) dx = 0.$$

Откуда следует, что

$$\int_0^1 D^{(k)} dx \leq 0.$$

Поэтому $D^{(k)} = 0$ и $D \leq k$.

Получим оценку снизу для D . Рассмотрим $\bar{D} = -D$. Тогда уравнение для \bar{D} примет вид:

$$\bar{D} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(d \frac{\partial \bar{D}}{\partial x} \right) + b.$$

Умножим уравнение для \bar{D} на функцию

$$\bar{D}^{(l)} = \max\{\bar{D} - l, 0\}, l > \max\{\max_t(q^0), \max_t(q^1), 0, g(\rho_s - \rho_f)\} \geq 0$$

и результат проинтегрируем по Ω , получим:

$$\int_0^1 \left(\frac{\bar{D}\bar{D}^{(l)}}{a} - \frac{b}{a}\bar{D}^{(l)} + d\bar{D}_x \bar{D}_x^{(l)} \right) dx = 0.$$

Откуда получим, что

$$\int_0^1 \left(\frac{l-b}{a} \bar{D}^{(l)} \right) dx \leq 0.$$

Поэтому $\bar{D}^{(l)} = 0$, $\bar{D} \leq l$ и $D \geq -l$.

Таким образом имеем оценку $|D| \leq C = \max\{k, l\}$.

Заметим, что следствием леммы 1 является оценка $\int_0^1 s dx < \infty$, из которой следует, что

$$\int_0^1 \frac{1}{1-\phi} dx < \infty.$$

Поскольку $D = a \frac{\partial z}{\partial x} - b$, то

$$|z_x| \leq \left| \frac{D}{k(1-\phi)} \right| + |g(\rho_s - \rho_f)|.$$

Проинтегрируем это неравенство по x от 0 до 1. Получим:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |z_x| dx &\leq \int_0^1 \left| \frac{D}{k(1-\phi)} \right| dx + \int_0^1 |g(\rho_s - \rho_f)| dx \leq \frac{|D|}{k} \int_0^1 \frac{1}{|1-\phi|} dx + \int_0^1 |g(\rho_s - \rho_f)| dx \leq \\ &\leq \frac{C}{k} \int_0^1 \frac{1}{|1-\phi|} dx + \int_0^1 |g(\rho_s - \rho_f)| dx \leq C_1, \end{aligned}$$

где C_1 – положительная постоянная, зависящая от данных задачи.

Таким образом имеем оценку

$$\int_0^1 |z_x| dx \leq C_1,$$

из которой получим, что $|z| = |G_t| \leq c_1 = \text{const} > 0$, а следовательно $-c_1 \leq G_t \leq c_1$. Откуда имеем оценку для G :

$$G_0 - Tc_1 \leq G \leq Tc_1 + G_0,$$

а следовательно и для s (т.к. из свойств функции G следует, что $G = \ln s$):

$$s_0 e^{-Tc_1} \leq s \leq s_0 e^{Tc_1}.$$

Лемма 2 доказана. □

С учетом леммы 2 выводим оценку $|z_x| \leq c_2$. Из (28), (29) аналогично лемме 1 находим точку $b(t) \in [0, 1]$, в которой функция z известна:

$$z(b(t), t) = d(G(b(t), t)(q_D^0(t) - q_D^1(t)),$$

и, следовательно, $|z(x, t)| \leq c_3$. Далее получаем оценки в гельдеровских нормах для функции z по x и по t [22]. А затем, используя для функции z теорию эллиптических уравнений [23], приходим к утверждению теоремы 2. □

References

- [1] Geological Storage of CO2 in Deep Saline Formations, *Springer, Editor: Niemi, Bear and Bensabat*, (2016).
- [2] M. Ferronato, G. Gambolati, C. Janna, P. Teatini, *Geomechanical issues of anthropogenic CO2 sequestration in exploited gas fields*, Energy Conversion and Management, **51** (2010), 1918–1928.
- [3] C. Wang, S. Luo, Y. Mou, J. Zeng, Y. Ren, C. Guo, *Numerical simulations of geological CO2 storage in a gas reservoir of the B depression, Pearl River Mouth Basin*, Energy Geoscience, **7**, Issue 1 (2026), 100512,
- [4] M.A. Hesse, (2008) Mathematical modeling and multiscale simulation of carbon dioxide storage in saline aquifers (Doctoral dissertation, Stanford University).
- [5] O. Coussy, *Poromechanics*, John Wiley & Sons, 2004.
- [6] J. JE. Lee, Modelling and Simulation of Compacting Sedimentary Basins (PhD dissertation), *University of Oxford*, (2019).
- [7] A. Fowler, *Mathematical Geoscience*, Springer-Verlag London Limited, 2011.
- [8] C. Morency et al., *A numerical model for coupled fluid flow and matrix deformation with applications to disequilibrium compaction and delta stability*, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, **112** (2007), no. B10.
- [9] J. A. D. Connolly, Y. Y. Podladchikov, *Compaction-driven fluid flow in viscoelastic rock*, Geodin. Acta, **11** (1998), 55–84.
- [10] R. I. Nigmatulin, *Fundamentals of the Mechanics of Heterogeneous Media*, Moscow, Izdatel'stvo Nauka, 1978. (In Russian.)
- [11] J. Bear, A.H.D. Cheng, *Modeling Groundwater Flow and Contaminant Transport*, Springer Science & Business Media, Berlin, 2010.

- [12] F. Schneider, J.L. Potdevin, S. Wolf, I. Faille, *Mechanical and chemical compaction model for sedimentary basin simulation*, Tectonophysics, **263** (1996), 307-317.
- [13] M.A. Tokareva, A.A. Papin, *On the existence of global solution of the system of equations of one-dimensional motion of a viscous liquid in a deformable viscous porous medium*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**, no. 2 (2021), 1397-1422.
- [14] R. Virts, A. Papin, M. Tokareva, *Non-isothermal filtration of a viscous compressible fluid in a viscoelastic porous medium*, Journal of Physics: Conference Series. Bristol, (2020), 012041.
- [15] M.A. Tokareva, A.A. Papin, *Mathematical model of fluids motion in poroelastic snow-ice cover*, Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics, **14**, № 1 (2021), 47-56.
- [16] A.A. Papin, M.A. Tokareva, *Problems of heat and mass transfer in the snow-ice cover*, IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, (2018), 012055.
- [17] V.B. Pogosyan, M.A. Tokareva, A.A. Papin, *Calculation of the Physical Characteristics of a Poroelastic Medium in the Gas Filtration Process*, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, **66** (2025), 758–768.
- [18] V. V. Shelukhin, *A poroelastic medium saturated by a two-phase capillary fluid*, Contin. Mech. Thermodyn, **26** (5) (2014), 619–638.
- [19] Y. Amirat, V. Shelukhin, K. Trusov, *Cross-coupling permeabilities in two-phase flows through porous media: Spontaneous counter-current capillary imbibition*, International Journal of Engineering Science, **221** (2026), 104471.
- [20] S.N.Antontsev, A.V.Kazhikhov, V.N.Monakhov, *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*, Amsterdam etc., North-Holland 1990.
- [21] A.A. Papin, M.A. Tokareva, *Solvability of a one-dimensional problem of fluid flow in poroelastic medium with permeable boundaries*, Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics, **90** (2024), 140-151.
- [22] M.A. Tokareva, A.A. Papin, *Global solvability of a system of equations of one-dimensional motion of a viscous fluid in a deformable viscous porous medium*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **13**, no2 (2019), 350-362.
- [23] O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type*, Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).

ALEXANDER ALEKSEEVICH PAPIN
 ALTAI STATE UNIVERSITY,
 PR. LENINA, 61,
 656049, BARNAUL, RUSSIA
E-mail address: papin@math.asu.ru

MARGARITA ANDREEVNA TOKAREVA
 ALTAI STATE UNIVERSITY,
 PR. LENINA, 61,
 656049, BARNAUL, RUSSIA
E-mail address: tma2505@gmail.com