S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 512.542
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 20D06,
20D08, 20D60, 05C25

О СУЩЕСТВОВАНИИ СПОРАДИЧЕСКОГО КОМПОЗИЦИОННОГО ФАКТОРА В НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ. II

М.Р. Зиновьева

Представлено П.П. Петровым

Abstract:
Let G be a finite group, $\pi(G)$ is a set of prime divisors of its orders, $\omega(G)$ is a set of orders of its elements (its spectra).

The prime graph (or the Gruenberg–Kegel graph) of a finite group G is a simple graph $GK(G)$ whose vertices are the prime divisors of the order of G, and two distinct vertices p and q are adjacent in $GK(G)$ if and only if G contains an element of order pq. The prime graphs of non-abelian finite simple groups are known. One of the most popular fields of research in finite group theory is study of finite groups by their prime graphs. We study composition factors of finite groups whose the prime graphs are the same as the prime graphs of non-abelian finite simple groups. In the paper, we consider the question about existence of sporadic composition factors in such finite groups. As finite simple groups we take some series of exceptional and classical groups of Lie type, and also alternating groups.

In 2011, A. M. Staroletov studied finite groups with spectrum like a finite simple non-abelian group that have a sporadic composition factor. Generalizing this result, we consider the question of whether the composition factor of a finite group with the prime

Zinovieva, M.R., On the existence of a sporadic composition factor in some finite groups. II.

Поступила 10 февраля 2026 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

graph like a finite simple non-abelian group can be isomorphic to a sporadic group. It is shown that a finite group with the prime graph like the classical groups $L_n(q)$, $U_n(q)$, where $n \geq 11$, $H \in \{O_{2n}^{+}(q), O_{2n}^{-}(q)\}$, where $n \geq 9$, has no sporadic composition factors. For finite groups with the prime graph like the exceptional groups ${}^3D_4(q)$ и $G_2(q)$ we find small list of possible sporadic composition factors of such groups. For alternating groups A_n it is proved that under some condition a finite simple group with the prime graph like the alternating group has no sporadic composition factors.

Keywords: finite group, simple group, sporadic group, exceptional group of Lie type, classical group, alternating group, Gruenberg–Kegel graph (prime graph).

1 Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество всех порядков ее элементов (ее спектр). На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом простых чисел* или *графом Грюнберга — Кегеля* группы G и обозначается через $GK(G)$.

Кокликой графа называется его индуцированный подграф с попарно не смежными вершинами. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком*. *Максимальной кокликой* называется коклика, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ – наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(r, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число r.

В теории конечных групп популярным является направление исследования конечных групп по свойствам графа простых чисел. Например, обзор результатов можно найти в [1].

А. М. Старолетов в [2] изучил конечные простые группы со спектром как у конечной простой неабелевой группы, имеющие спорадический композиционный фактор.

Мы рассматриваем следующую более общую задачу: может ли конечная группа с графом простых чисел как у конечной простой неабелевой группы иметь композиционный фактор, изоморфный простой спорадической группе. Автор в [3] изучил конечные группы с графом простых чисел как у исключительной группы лиева типа, отличной от ${}^3D_4(q)$ и $G_2(q)$, или как у классических групп $L_n(q)$, $U_n(q)$, $O_{2n+1}(q)$, $S_{2n}(q)$. В случае простых групп $L_n(q)$, $U_n(q)$ был рассмотрен случай $n \geq 12$ и композиционный фактор группы не изоморфен F_1.

Согласно статье А. В. Васильева, Е. П. Вдовина [4], обозначим через s'_n наибольшее простое число, не превосходящее $n/2$.

Далее $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$.

В рамках рассматриваемой задачи мы получили следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $H \in \{^3D_4(q), G_2(q)\}$ – конечная простая группа исключительного лиева типа над полем порядка q, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$, S – спорадический композиционный фактор группы G. Тогда выполнен один из следующих случаев:*

1) $S \in \{J_4, Suz, Fi_{22}, F_3, LyS\}$, $H = {}^3D_4(q)$, где $q \in \{p, p^2\}$ и $q > 2000$;

2) $S \in \{J_1, J_4, O'N, LyS, F_3\}$, $H = G_2(q)$, где $q \in \{p, p^2\}$ и $q > 2000$.

Теорема 2. *Пусть $H \in \{L_n(q), U_n(q)\}$ – конечная простая линейная или унитарная группа над полем порядка q, $n \geq 11$, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – композиционный фактор группы G. Тогда S не является спорадической группой.*

Теорема 3. *Пусть $H \in \{O^+_{2n}(q), O^-_{2n}(q)\}$ – конечная простая группа над полем порядка q, $n \geq 9$, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – композиционный фактор группы G. Тогда S не является спорадической группой.*

Теорема 4. *Пусть $H = A_n$ – знакопеременная группа, где $n \geq n_0$ и $n - s'_{2n} \leq 3$, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – спорадическая группа, причем $n_0 = 29$ при $S \notin \{F_2, F_1, Fi'_{24}, J_4\}$, $n_0 = 37$ при $S = Fi'_{24}$, $n_0 = 41$ при $S = F_2$, $n_0 = 47$ при $S = J_4$, $n_0 = 53$ при $S = F_1$. Тогда S не является композиционным фактором группы G.*

Данная работа продолжает серию работ автора о возможных композиционных факторах конечных групп, имеющих граф Грюнберга–Кегеля как у конечной простой группы, начатую в [3].

Уильямс [5] и А. С. Кондратьев [6] получили описания связных компонент графов Грюнберга–Кегеля конечных простых групп. Уточненные таблицы можно найти, например, в [7]. Мы используем стандартные обозначения, которые можно найти, например, в [8].

Предварительные результаты

Лемма 1 (теорема Жигмонди, [9])**.** *Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Существует простое число r, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при любом натуральном $i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$. Если такое r существует, то $r \equiv 1 \pmod{n}$.*

Согласно [4], если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается наименьшее натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod{r}$. Если q нечетно, то $e(2, q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod{4}$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod{4}$. Говорят, что простое число r с $e(r, q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, а через $R_n(q)$ — множество всех таких делителей. По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует, за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n.

Лемма 2 (Героно, [10]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

Лемма 3 (Кресчензо, [11]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^m - 2q^n = \pm 1$ для некоторых нееденичных натуральных чисел m, n. Тогда пара $(p^m,\ q^n)$ равна $(3^5,\ 11^2)$, $(239^2,\ 13^4)$ или $(p^2,\ q^2)$.*

Лемма 4 ([12, теорема 1]). *Пусть G – конечная группа, удовлетворяющая условиям $t(G) \geq 3$ и $t(2,G) \geq 2$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Существует конечная неабелева простая группа S такая, что $S \leq \bar{G} = G/K \leq Aut(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G.*

(2) *Для каждого независимого подмножества (коклики) ρ множества $\pi(G)$ такого, что $|\rho| \geq 3$, не более чем одно простое число из ρ делит произведение $|K| \cdot |\bar{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(G) - 1$.*

(3) *Выполняется одно из двух утверждений:*

(а) *каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |\bar{G}/S|$; в частности, $t(2,S) \geq t(2,G)$;*

(б) *существует простое число $r \in \pi(K)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2; в этом случае $t(G) = 3$, $t(2,G) = 2$, и $S \cong Alt_7$ или $A_1(q)$ для некоторого нечетного числа q.*

Лемма 5 (теорема Грюнберга — Кегеля, [5, Theorem A]). *Для группы G с несвязным графом $GK(G)$ верно одно из следующих утверждений:*

(а) *G — группа Фробениуса;*

(б) *G — 2-фробениусова группа, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G, а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно;*

(в) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством группы A, где $Inn(P) \leq A \leq Aut(P)$, P — простая неабелева группа с условием $s(G) \leq s(P)$ и $A/Inn(P)$ — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 6. *Пусть q – натуральная степень простого числа p. Тогда выполнены следующие утверждения:*

1) *если $R_4(q) = \{5\}$, то $q \in \{2,3,7\}$;*
2) *если $R_8(q) = \{17\}$, то $q = 2$;*
3) *если $R_8(q) = \{41\}$, то $q = 3$;*
4) *$R_{16}(q) \neq \{17\}$.*

Доказательство. 1) См. [3, лемма 10].

2) Пусть $R_8(q) = \{17\}$. Тогда $(q^4+1)/(2,q+1) = 17^a$ для некоторого натурального a. Если $(2,q+1) = 1$, то $q^4 - 17^a = -1$ и по лемме 2 $a = 1$

и $q = 2$. Если $(2, q+1) = 2$, то $q^2 - 2 \cdot 17^a = -1$ и по лемме 3 либо $a = 1$ и $q^2 = 33$, либо $a = 2$, $q^2 = 577$; противоречие.

3) Пусть $R_8(q) = \{41\}$. Тогда $(q^4+1)/(2, q+1) = 41^a$ для некоторого натурального a. Если $(2, q+1) = 1$, то $q^4 - 41^a = -1$ и по лемме 2 $a = 1$ и $q^4 = 40$; противоречие. Если $(2, q+1) = 2$, то $q^4 - 2 \cdot 41^a = -1$ и по лемме 3 имеем $a = 1$ и $q = 3$.

4) См. [3, лемма 10]. □

Лемма 7 ([7, лемма 1])**.** *Если $n \geq 6$ — натуральное число, то существует по меньшей мере $s(n)$ простых чисел p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$, где*

$s(n) = 6$ для $n \geq 48$,
$s(n) = 5$ для $42 \leq n \leq 47$,
$s(n) = 4$ для $38 \leq n \leq 41$,
$s(n) = 3$ для $18 \leq n \leq 37$,
$s(n) = 2$ для $14 \leq n \leq 17$,
$s(n) = 1$ для $6 \leq n \leq 13$.

Лемма 8 ([3, теорема 2])**.** *Пусть $H \in \{L_n(q), U_n(q)\}$ – конечная простая линейная или унитарная группа, $n \geq 12$, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – композиционный фактор группы G, не изоморфный F_1. Тогда S не является спорадической группой.*

2 Доказательство теоремы 1

Пусть $H \in \{{}^3D_4(q), G_2(q)\}$ – конечная простая группа исключительного лиева типа над полем порядка q, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – спорадический композиционный фактор группы G.

По лемме 4 выполнено условие $S \leq \bar{G} = G/K \leq Aut(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G.

Лемма 9. *Если $H = {}^3D_4(q)$, то $S \in \{J_4, Suz, Fi_{22}, F_3, LyS\}$, $q \in \{p, p^2\}$ и $q > 2000$.*

Доказательство. По лемме 4 и [4, табл. 5, 7] имеем $\{2, r_{12}(q)\} = \{2, s\}$, где $s \in S$, причем по лемме 1 имеем $r_{12}(q) \equiv 1 \pmod{12}$. Итак, существует простое число $s \equiv 1 \pmod{12}$, где $s \in S$. По [8]

$$S \notin \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_2, J_3, HS, He, McL, Co_2, Co_3, HN, O'N\}.$$

Значит, $S \in \{J_4, Suz, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Co_1, Ru, LyS, F_3, F_2, F_1\}$.

Так как s несмежна с 2, то по [4, табл. 2] имеем

$$S \in \{J_4, Suz, Fi_{22}, LyS, F_3\}.$$

При $q = 2$ по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 13\}$; противоречие.

Пусть $q > 2$. По [13, табл. 4] множество $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{3f}(p)$, $t_2 = r_{6f}(p)$, $t_3 = r_{12f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{3f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{6f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{12f}$.

Предположим, что $S = J_4$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 29, 31, 37, 43\}.$$

Тогда $R_{12}(q) = \{37\}$. Непосредственно проверяется, что $q > 2000$. По лемме 4 коклика $\{t_1, t_2, t_3\}$ состоит не менее чем из 2 чисел из $\pi(S)$. По лемме 1 выполнен один из следующих случаев:

1) $(t_1, t_2) \in \{(7, 31); (7, 43); (31, 7); (31, 43); (43, 7); (43, 31)\}$;
2) $(t_1, t_3) \in \{(7, 37); (31, 37); (43, 37)\}$;
3) $(t_2, t_3) \in \{(7, 37); (31, 37); (43, 37)\}$.

Рассмотрим случай $(t_1, t_2) = (7, 37)$. Тогда $t_1 = 1+3fa = 7$ для некоторого целого неотрицательного a, поэтому $f \in \{1, 2\}$. Также $t_2 = 1+6fb = 37$ для некоторого целого неотрицательного b, поэтому $f \in \{1, 2, 3, 6\}$. Итак, $f \in \{1, 2\}$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Окончательно получаем, что $f \in \{1, 2\}$.

Предположим, что $S \in \{Suz, Fi_{22}\}$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}.$$

Тогда $R_{12}(q) = \{13\}$. Непосредственно проверяется, что $q = 2$ или $q > 2000$. Если $q = 2$, то по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 13\}$; противоречие.

По лемме 4 коклика $\{t_1, t_2, t_3\}$ состоит не менее чем из 2 чисел из $\pi(S)$. По лемме 1 получаем, что либо $(t_1, t_3) = (7, 13)$, либо $(t_2, t_3) = (7, 13)$. Как в случае $S = J_4$ получаем, что $f \in \{1, 2\}$.

Предположим, что $S = F_3$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 31\}.$$

Тогда $R_{12}(q) = \{13\}$. Непосредственно проверяется, что $q = 2$ или $q > 2000$. Если $q = 2$, то по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 13\}$; противоречие.

По лемме 4 коклика $\{t_1, t_2, t_3\}$ состоит не менее чем из 2 чисел из $\pi(S)$. По лемме 1 выполнен один из следующих случаев:

1) $(t_1, t_2) \in \{(7, 19); (7, 31); (19, 7); (19, 31); (31, 7); (31, 19)\}$;
2) $(t_1, t_3) \in \{(7, 13); (19, 13); (31, 13)\}$;
3) $(t_2, t_3) \in \{(7, 13); (19, 13); (31, 13)\}$.

Как в случае $S = J_4$ получаем, что $f \in \{1, 2\}$.

Предположим, что $S = LyS$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 31, 37, 67\}.$$

Тогда $R_{12}(q) = \{37\}$. Непосредственно проверяется, что $q > 2000$. По лемме 4 коклика $\{t_1, t_2, t_3\}$ состоит не менее чем из 2 чисел из $\pi(S)$. По лемме 1 выполнен один из следующих случаев:

1) $(t_1, t_2) \in \{(7, 31); (7, 67); (31, 7); (31, 67); (67, 7); (67, 31)\}$;
2) $(t_1, t_3) \in \{(7, 37); (31, 37); (67, 37)\}$;
3) $(t_2, t_3) \in \{(7, 37); (31, 37); (67, 37)\}$.

Как в случае $S = J_4$ получаем, что $f \in \{1, 2\}$. □

Лемма 10. *Если $H = G_2(q)$, то $S \in \{J_1, J_4, O'N, LyS, F_3\}$, $q \in \{p, p^2\}$ и $q > 2000$.*

Доказательство. По лемме 4 и [4, табл. 5, 7] имеем $\{2, r_3(q), r_6(q)\} = \{2, s_1, s_2\}$, где $s_1, s_2 \in S$, причем по лемме 1 имеем $r_3(q) \equiv 1 \pmod 3$ и $r_6(q) \equiv 1 \pmod 6$. Итак, существуют простые числа $s_1 \equiv 1 \pmod 3$ и $s_2 \equiv 1 \pmod 6$, где $s \in S$. По [8]

$$S \notin \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_2, J_3, HS, He, McL, Co_2, Co_3, O'N\}.$$

Значит, $S \in \{J_1, J_4, Suz, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Co_1, HN, O'N, Ru, LyS, F_3, F_2, F_1\}$. Так как s_1 и s_2 несмежны с 2, то по [4, табл. 2] имеем

$$S \in \{J_1, J_4, O'N, LyS, F_3\}.$$

Предположим, что $S = J_1$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19\}.$$

По [4, табл. 2] имеем $\{2, r_3(q), r_6(q)\} = \{2, 7, 19\}$. Тогда $R_6(q) = \{7\}$ или $R_6(q) = \{19\}$. Непосредственно проверяется, что $q \in \{3, 5, 8, 19\}$ или $q > 2000$. Если $q = 3$, то по [8] $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 13\}$; противоречие. Если $q = 5$, то по [8] $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 31\}$; противоречие. Если $q = 8$, то по [14] $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 19, 73\}$; противоречие. Если $q = 19$, то по [8] $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 19, 127\}$; противоречие.

Как в случае $H = {}^3D_4(q)$ получаем, что $f \in \{1, 2\}$.

Предположим, что $S = J_4$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 29, 31, 37, 43\}.$$

По [4, табл. 2] имеем $\{2, r_3(q), r_6(q)\} = \{2, s_1, s_2\}$, где $s_1, s_2 \in \{31, 37, 43\}$. Тогда $R_6(q) \subseteq \{31, 37\}$, или $R_6(q) \subseteq \{31, 43\}$, или $R_6(q) \subseteq \{37, 43\}$. Непосредственно проверяется, что $q \in \{7, 11, 37\}$ или $q > 2000$. Если $q = 7$, то по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 19, 43\}$; противоречие. Если $q = 11$, то по [14] $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19, 37\}$; противоречие. Если $q = 37$, то по [14] $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 19, 31, 37, 43, 67\}$; противоречие.

Как в случае $H = {}^3D_4(q)$ получаем, что $f \in \{1, 2\}$.

Предположим, что $S = O'N$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19, 31\}.$$

По [4, табл. 2] имеем $\{2, r_3(q), r_6(q)\} = \{2, 19, 31\}$. Тогда $R_6(q) = \{19\}$ или $R_6(q) = \{31\}$. Непосредственно проверяется, что $q = 8$ или $q > 2000$. Если $q = 8$, то по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 19, 73\}$; противоречие.

Как в случае $H = {}^3D_4(q)$ получаем, что $f \in \{1, 2\}$.

Предположим, что $S = F_3$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 31\}.$$

По [4, табл. 2] имеем $\{2, r_3(q), r_6(q)\} = \{2, s_1, s_2\}$, где $s_1, s_2 \in \{13, 19, 31\}$. Тогда $R_6(q) \subseteq \{13, 19\}$, или $R_6(q) \subseteq \{13, 31\}$, или $R_6(q) \subseteq \{19, 31\}$. Непосредственно проверяется, что $q \in \{4, 8, 23\}$ или $q > 2000$. Если $q = 4$, то по [8] имеем $\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 13\}$; противоречие. Если $q = 8$, то по [14] имеем $\pi(S) \nsubseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 19, 73\}$; противоречие. Если $q = 23$, то по [14] имеем $\pi(S) \nsubseteq \pi(H) = \{2, 3, 7, 11, 13, 23, 79\}$; противоречие.

Как в случае $H = {}^3D_4(q)$ получаем, что $f \in \{1, 2\}$.

Предположим, что $S = LyS$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 31, 37, 67\}.$$

По [4, табл. 2] имеем $\{2, r_3(q), r_6(q)\} = \{2, s_1, s_2\}$, где $s_1, s_2 \in \{31, 37, 67\}$. Тогда $R_6(q) \subseteq \{31, 37\}$, или $R_6(q) \subseteq \{31, 67\}$, или $R_6(q) \subseteq \{37, 67\}$. Непосредственно проверяется, что $q = 11$ или $q > 2000$. Если $q = 11$, то по [14] $\pi(S) \nsubseteq \pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19, 37\}$; противоречие.

Как в случае $H = {}^3D_4(q)$ получаем, что $f \in \{1, 2\}$. □

Теорема 1 следует из лемм 9, 10.

3 Доказательство теоремы 2

Пусть $H \in \{L_n(q), U_n(q)\}$ – конечная простая линейная или унитарная группа над полем порядка q, $n \geq 11$, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – спорадический композиционный фактор группы G.

По лемме 4 выполнено условие $S \leq \bar{G} = G/K \leq Aut(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G.

Лемма 11. *$H \notin \{L_n(q), U_n(q)\}$ при $n \geq 13$.*

Доказательство. Пусть $H = L_n(q)$, где $n \geq 13$. По лемме 8 имеем $S = F_1$. Заметим, что по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}.$$

По лемме 4 имеем $t(S) \geq t(G) - 1$. По [4, табл. 2, 8] имеем $t(S) = 11$ и $t(G) = [(n + 1)/2]$. Имеем $n \leq 24$.

Пусть $n = 13$. Рассмотрим простые числа $t_1 = r_{13f}(p)$, $t_2 = r_{12f}(p)$, $t_3 = r_{11f}(p)$, $t_4 = r_{10f}(p)$, $t_5 = r_{9f}(p)$, $t_6 = r_{8f}(p)$, $t_7 = r_{7f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{13f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{12f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{11f}$, $t_4 \equiv 1 \pmod{10f}$, $t_5 \equiv 1 \pmod{9f}$, $t_6 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_7 \equiv 1 \pmod{7f}$. Имеем $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 13$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 23$ или $t_3 \notin \pi(S)$, $t_4 \in \{11, 31, 41, 71\}$ или $t_4 \notin \pi(S)$, $t_5 = 19$ или $t_5 \notin \pi(S)$, $t_6 \in \{17, 41\}$ или $t_6 \notin \pi(S)$, $t_7 \in \{29, 71\}$ или $t_7 \notin \pi(S)$. По [4, табл. 8] $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7\}$ – максимальная коклика в $GK(G)$. По лемме 4 не более одного простого числа из указанной коклики не содержится в $\pi(S)$. Отсюда $R_{12}(q) = \{13\}$, $R_{11}(q) = \{23\}$, $R_{10}(q) \subseteq \{11, 31, 41, 71\}$, $R_9(q) = \{19\}$, $R_8(q) \subseteq \{17, 41\}$, $R_7(q) \subseteq \{29, 71\}$.

Если $R_8(q) = \{17\}$, то по лемме 6.2) имеем $q = 2$, но $R_{11}(2) = \{23, 89\} \neq \{23\}$; противоречие. Если $R_8(q) = \{41\}$, то по лемме 6.3) имеем $q = 3$, но $R_{11}(3) = \{23, 3851\} \neq \{23\}$; противоречие. Значит, $R_8(q) = \{17, 41\}$, поэтому $R_{10}(q) \subseteq \{11, 31, 71\}$.

По [4, предл. 2.1] множества

$$\{r_3(q), r_{11}(q), r_{13}(q)\}, \{r_4(q), r_{10}(q), r_{11}(q), r_{13}(q)\},$$

$$\{r_5(q), r_9(q), r_{11}(q), r_{12}(q), r_{13}(q)\}, \{r_6(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{11}(q), r_{13}(q)\}$$

— коклики в $GK(G)$. По лемме 4 не более одного простого числа из каждой такой коклики не содержится в $\pi(S)$. Отсюда $R_3(q) \cup R_6(q) = \{7, 31\}$, $R_5(q) \cup R_{10}(q) = \{11, 71\}$ и $R_7(q) = \{29\}$. Итак, $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 6.1) имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Но $R_7(2) = \{127\}$, $R_7(3) = \{1093\}$, $R_7(7) = \{29, 4733\}$; противоречие.

При $n \in \{14, 15\}$ получаем противоречие аналогично случаю $n = 13$.

Пусть $n = 16$. Рассмотрим простые числа $t_1 = r_{16f}(p)$, $t_2 = r_{15f}(p)$, $t_3 = r_{13f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{16f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{15f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{13f}$. Имеем $t_1 = 17$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 31$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 \notin \pi(S)$. По [4, предл. 2.1] $\{t_1, t_2, t_3\}$ – коклика в $GK(G)$. По лемме 4 не более одного простого числа из указанной коклики не содержится в $\pi(S)$. Отсюда $R_{16}(q) = \{17\}$; противоречие с леммой 6.4).

При $n \in \{17, ..., 24\}$ получаем противоречие аналогично случаю $n = 16$.

Случай $H = U_n(q)$, где $n \geq 13$, рассматривается аналогично. $\square$

Лемма 12. *$H \notin \{L_{12}(q), U_{12}(q)\}$.*

Доказательство. Пусть $H = L_{12}(q)$. По лемме 8 имеем $S = F_1$. Если $q = 2$, то

$$\pi(S) \nsubseteq \pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 31, 73, 89, 127\};$$

противоречие. Значит, $q > 2$.

Заметим, что по [8] имеем $2 \cdot 13, 2 \cdot 23 \in \omega(S)$. По [4, предл. 2.1] $\{r_7(q), r_{11}(q), r_{12}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. По лемме 4 либо $R_{11}(q) \cup R_{12}(q) \subseteq \pi(S)$, либо $R_{11}(q) = \{23\}$ и $R_{12}(q) \nsubseteq \pi(S)$, либо $R_{12}(q) = \{13\}$ и $R_{11}(q) \nsubseteq \pi(S)$.

Предположим, что $R_{11}(q) \cup R_{12}(q) \subseteq \pi(S)$. Тогда $R_{11}(q) = \{23\}$, $R_{12}(q) = \{13\}$. По [4, табл. 4, 6] при $p = 2$ множество $\{2, r_{12}(q), r_{11}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$; при $p \neq 2$ и $(q-1)_2 < 4$ множество $\{2, r_{11}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$; при $p \neq 2$ и $(q-1)_2 = 4$ множество $\{2, r_{12}(q), r_{11}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$; при $p \neq 2$ и $(q-1)_2 > 4$ множество $\{2, r_{12}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Итак, при $p = 2$ или $p \neq 2$ и $(q-1)_2 \leq 4$ вершины 2 и 23 не смежны в $GK(G)$; противоречие. Значит, $p \neq 2$ и $(q-1)_2 > 4$. Но тогда вершины 2 и 13 не смежны в $GK(G)$; противоречие.

Предположим, что $R_{11}(q) = \{23\}$ и $R_{12}(q) \nsubseteq \pi(S)$. По [4, предл. 2.1] множества

$$\{r_5(q), r_8(q), r_9(q), r_{11}(q), r_{12}(q)\}, \{r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{11}(q), r_{12}(q)\}$$

— коклики в $GK(G)$. По лемме 4 имеем $R_5(q) \cup R_{10}(q) \subseteq \{11, 31, 41, 71\}$, $R_9(q) = \{19\}$, $R_8(q) \subseteq \{17, 41\}$, $R_7(q) \subseteq \{29, 71\}$. Если $R_8(q) = \{17\}$, то по лемме 6.2) имеем $q = 2$, но $R_{11}(2) = \{23, 89\} \neq \{23\}$; противоречие. Если $R_8(q) = \{41\}$, то по лемме 6.3) имеем $q = 3$, но $R_{11}(3) = \{23, 3851\} \neq \{23\}$; противоречие. Значит, $R_8(q) = \{17, 41\}$, поэтому $R_5(q) \cup R_{10}(q) \subseteq \{11, 31, 71\}$.

Пусть $R_7(q) = \{29, 71\}$. По [4, предл. 2.1] имеем $29 \cdot 71 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, $17 \cdot 41 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Отсюда либо $29, 17 \in \pi(K)$, либо $29, 41 \in \pi(K)$, либо $71, 17 \in \pi(K)$, либо $71, 41 \in \pi(K)$. По [4, предл. 2.1] множество $\{r_7(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$; противоречие с леммой 4.

Пусть $R_7(q) = \{29\}$. Тогда $R_5(q) \cup R_{10}(q) \subseteq \{11, 31, 71\}$. Предположим, что $R_5(q) = \{11\}$ и $R_{10}(q) = \{31\}$. По [4, предл. 2.1] имеем $11 \cdot 31 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$, $17 \cdot 41 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Отсюда либо $11, 17 \in \pi(K)$, либо $11, 41 \in \pi(K)$, либо $31, 17 \in \pi(K)$, либо $31, 41 \in \pi(K)$. По [4, предл. 2.1] множества $\{r_5(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$, $\{r_{10}(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$ — коклики в $GK(G)$; противоречие с леммой 4. Другие возможности для $R_5(q)$ и $R_{10}(q)$ рассматриваются аналогично. Получаем противоречие.

Если $R_7(q) = \{71\}$, то получаем противоречие как в предыдущем абзаце.

Предположим, что $R_{12}(q) = \{13\}$ и $R_{11}(q) \not\subseteq \pi(S)$. По [4, предл. 2.1] множества

$$\{r_3(q), r_{10}(q), r_{11}(q)\}, \{r_4(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{11}(q)\},$$

$$\{r_5(q), r_8(q), r_9(q), r_{11}(q), r_{12}(q)\}, \{r_6(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{11}(q)\},$$

$$\{r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{11}(q), r_{12}(q)\}$$

— коклики в $GK(G)$. По лемме 4 имеем $R_5(q) \cup R_{10}(q) \subseteq \{11, 41, 71\}$, $R_9(q) = \{19\}$, $R_8(q) \subseteq \{17, 41\}$, $R_7(q) \subseteq \{29, 71\}$, $R_3(q) \cup R_6(q) = \{7, 31\}$, $R_4(q) \subseteq \{5, 17, 29, 41\}$. Если $R_8(q) = \{17\}$, то по лемме 6.2) имеем $q = 2$, но $R_7(2) = \{127\} \not\subseteq \{29, 71\}$; противоречие. Если $R_8(q) = \{41\}$, то по лемме 6.3) имеем $q = 3$, но $R_7(3) = \{1093\} \not\subseteq \{29, 71\}$; противоречие. Значит, $R_8(q) = \{17, 41\}$. Имеем $R_5(q) \cup R_{10}(q) = \{11, 71\}$ и $R_7(q) = \{29\}$. Итак, $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 6.1) имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Но $R_7(2) = \{127\}$, $R_7(3) = \{1093\}$, $R_7(7) = \{29, 4733\}$; противоречие.

Случай $H = U_{12}(q)$ рассматривается аналогично. □

Лемма 13. *Если $S = F_1$, то $H \notin \{L_{11}(q), U_{11}(q)\}$.*

Доказательство. Пусть $H = L_{11}(q)$. Если $q = 2$, то

$$\pi(S) \not\subseteq \pi(H) = \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 23, 31, 73, 89, 127\};$$

противоречие. Значит, $q > 2$.

Предположим, что $23 \in R_{11}(q)$. Заметим, что по [8] имеем $2 \cdot 23 \in \omega(S)$. По [4, табл. 4, 6] при $p = 2$ множество $\{2, r_{11}(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(H)$; при $p \neq 2$ множество $\{2, r_{11}(q)\}$ — коклика в $GK(H)$. Значит, вершины 2 и 23 не смежны в $GK(H)$; противоречие.

Итак, $23 \notin R_{11}(q)$. Обозначим $u \in R_{11}(q)$. Тогда $u \notin \pi(S)$.

По [4, предл. 2.1] множества

$$\{r_3(q), r_{10}(q), u\}, \{r_4(q), r_9(q), r_{10}(q), u\}, \{r_5(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), u\},$$

$$\{r_6(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), u\}$$

— коклики в $GK(H)$. Имеем $R_5(q) \cup R_{10}(q) \subseteq \{11, 31, 41, 71\}$, $R_9(q) = \{19\}$, $R_8(q) \subseteq \{17, 41\}$, $R_7(q) \subseteq \{29, 71\}$, $R_3(q) \cup R_6(q) \subseteq \{7, 13, 31\}$, $R_4(q) \subseteq \{5, 13, 17, 29, 41\}$.

Если $R_8(q) = \{17\}$, то по лемме 6.2) имеем $q = 2$, но $R_7(2) = \{127\} \not\subseteq \{29, 71\}$; противоречие. Если $R_8(q) = \{41\}$, то по лемме 6.3) имеем $q = 3$, но $R_7(3) = \{29, 4733\} \not\subseteq \{29, 71\}$; противоречие. Значит, $R_8(q) = \{17, 41\}$. Отсюда $R_5(q) \cup R_{10}(q) \subseteq \{11, 31, 71\}$, $R_9(q) = \{19\}$, $R_7(q) \subseteq \{29, 71\}$, $R_3(q) \cup R_6(q) \subseteq \{7, 13, 31\}$, $R_4(q) \subseteq \{5, 13, 29\}$.

Пусть $R_7(q) = \{29, 71\}$. Тогда $R_5(q) \cup R_{10}(q) = \{11, 31\}$, $R_3(q) \cup R_6(q) = \{7, 13\}$. Итак, $R_4(q) = \{5\}$. По лемме 6.1) имеем $q \in \{2, 3, 7\}$. Но $R_7(2) = \{127\}$, $R_7(3) = \{1093\}$, $R_7(7) = \{29, 4733\}$; противоречие.

Пусть $R_7(q) = \{29\}$. Тогда $R_5(q) \cup R_{10}(q) \subseteq \{11, 31, 71\}$, $R_3(q) \cup R_6(q) \subseteq \{7, 13, 31\}$, $R_4(q) \subseteq \{5, 13\}$. Если $R_4(q) = \{5\}$, то получаем противоречие как в предыдущем абзаце. Значит, $13 \in R_4(q)$, поэтому $R_3(q) \cup R_6(q) = \{7, 31\}$.

Так как по [8] имеем $7 \cdot 17 \in \omega(S) \subseteq \omega(H)$, то по [4, предл. 2.1] $R_3(q) = \{7\}$, $R_6(q) = \{31\}$. Если $R_5(q) = \{11\}$, $R_{10}(q) = \{71\}$, то по [4, предл. 2.1] имеем $11 \cdot 31 \in \omega(H)$, $17 \cdot 41 \in \omega(H)$. Отсюда либо $11, 17 \in \pi(K)$, либо $11, 41 \in \pi(K)$, либо $31, 17 \in \pi(K)$, либо $31, 41 \in \pi(K)$. По [4, предл. 2.1] множества $\{r_5(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$, $\{r_6(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$ — коклики в $GK(H)$; противоречие с леммой 4. В случае $R_5(q) = \{71\}$, $R_{10}(q) = \{11\}$ аналогично получаем противоречие.

Случай $R_7(q) = \{71\}$ рассматривается аналогично случаю $R_7(q) = \{29\}$. Получаем противоречие.

Случай $H = U_{11}(q)$ рассматривается аналогично. □

Лемма 14. *$H \notin \{L_{11}(q), U_{11}(q)\}$.*

Доказательство. Пусть $H = L_{11}(q)$. Если $q = 2$, то по [4, табл. 4] множество $\{2, 11, 89\}$ – коклика, содержащая 2, в графе $GK(G)$. По лемме 4 имеем $89 \in \pi(S)$; противоречие с [8].

Итак, $q > 2$. Так как $n = 11$, то по лемме 4 и [13, табл. 2] имеем $t(S) \geq t(G) - 1 = [(n+1)/2] - 1 = 5$, поэтому ввиду [4, табл. 2] имеем

$$S \in \{F_1, F_2, F_3, J_4, Fi'_{24}, Fi_{23}, LyS, O'N\}.$$

По лемме 13 имеем $S \neq F_1$.

Предположим, что $S = F_2$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31, 47\}.$$

По [13, табл. 2] множество $\{r_7(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{7f}(p)$, $t_2 = r_{8f}(p)$, $t_3 = r_{11f}(p)$. Рассмотрим коклику $\{t_1, t_2, t_3\}$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{7f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{11f}$, поэтому $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 17$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 23$ или $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, по лемме 4 имеем $R_8(q) = \{17\}$. По лемме 6.2) $q = 2$, но $q > 2$; противоречие.

Предположим, что $S = F_3$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 13, 19, 31\}.$$

По [13, табл. 2] множество $\{r_7(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{7f}(p)$, $t_2 = r_{8f}(p)$, $t_3 = r_{11f}(p)$. Рассмотрим коклику $\{t_1, t_2, t_3\}$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{7f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{11f}$, поэтому $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Предположим, что $S = J_4$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 23, 29, 31, 37, 43\}.$$

По [4, табл. 4, 6] при $p = 2$ множество $\{2, r_{11}(q), r_{10}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$; при $p \neq 2$ множество $\{2, r_{11}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$.

Рассмотрим простые числа $t_1 = r_{11f}(p)$, $t_2 = r_{10f}(p)$, $t_3 = r_{9f}(p)$, $t_4 = r_{8f}(p)$, $t_5 = r_{7f}(p)$, $t_6 = r_{6f}(p)$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{11f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{10f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{9f}$, $t_4 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_5 \equiv 1 \pmod{7f}$, $t_6 \equiv 1 \pmod{6f}$. Тогда $t_1 = 23$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 \in \{11, 31\}$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 37$ или $t_3 \notin \pi(S)$, $t_4 \notin \pi(S)$, $t_5 \in \{29, 43\}$ или $t_5 \notin \pi(S)$, $t_6 \in \{7, 31, 37, 43\}$ или $t_6 \notin \pi(S)$. По [13, табл. 2] множество $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$ – максимальная коклика в $GK(G)$. По лемме 4 не более одного простого числа из указанной коклики не содержится в $\pi(S)$. Отсюда $R_{11}(q) = \{23\}$, $R_{10}(q) \subseteq \{11, 31\}$, $R_9(q) = \{37\}$, $R_7(q) \subseteq \{29, 43\}$, $R_6(q) \subseteq \{7, 31, 43\}$.

По [4, предл. 2.1] множество $\{r_5(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{11}(q)\}$ — коклика в $GK(G)$. Поэтому $R_5(q) \cup R_{10}(q) = \{11, 31\}$. Так как $r_8(q) \notin \pi(S)$ для любого $r_8(q)$, то $R_8(q) \subseteq \pi(K)$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна, поэтому по [4, предл. 2.1] имеем $\pi(K) \subseteq \pi(q(q^2-1)) \cup R_3(q) \cup R_4(q) \cup R_8(q)$. По [8] и [4, предл. 2.1] имеем $11 \cdot 31 \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Тогда $11 \in \pi(K)$ или $31 \in \pi(K)$; противоречие.

Предположим, что $S = Fi'_{24}$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29\}.$$

По [4, предл. 2.1] множество $\{r_8(q), r_9(q), r_{11}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{8f}(p)$, $t_2 = r_{9f}(p)$, $t_3 = r_{11f}(p)$. Рассмотрим коклику $\{t_1, t_2, t_3\}$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{9f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{11f}$, поэтому $t_1 = 17$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 23$ или $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, по лемме 4 имеем $R_8(q) = \{17\}$. По лемме 6.2) $q = 2$, но $q > 2$; противоречие.

Предположим, что $S = Fi_{23}$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23\}.$$

По [4, предл. 2.1] множество $\{r_7(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{7f}(p)$, $t_2 = r_{8f}(p)$, $t_3 = r_{11f}(p)$. Рассмотрим коклику $\{t_1, t_2, t_3\}$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{7f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{11f}$, поэтому $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 17$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 23$ или $t_3 \notin \pi(S)$. Значит, по лемме 4 имеем $R_8(q) = \{17\}$. По лемме 6.2) $q = 2$, но $q > 2$; противоречие.

Предположим, что $S = LyS$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 31, 37, 67\}.$$

По [4, предл. 2.1] множество $\{r_7(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{7f}(p)$, $t_2 = r_{8f}(p)$, $t_3 = r_{11f}(p)$. Рассмотрим коклику $\{t_1, t_2, t_3\}$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{7f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{11f}$, поэтому $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 67$ или $t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Предположим, что $S = O'N$. Тогда по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19, 31\}.$$

По [4, предл. 2.1] множество $\{r_7(q), r_8(q), r_{11}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{7f}(p)$, $t_2 = r_{8f}(p)$, $t_3 = r_{11f}(p)$. Рассмотрим коклику $\{t_1, t_2, t_3\}$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{7f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{8f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{11f}$, поэтому $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Случай $H = U_{11}(q)$ рассматривается аналогично. □

Из лемм 11–14 следует теорема 2.

Теорема 2 доказана.

4 Доказательство теоремы 3

Пусть $H \in \{O^+_{2n}(q), O^-_{2n}(q)\}$ – конечная простая группа над полем порядка q, $n \geq 9$, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – ее композиционный фактор.

По лемме 4 выполнено условие $S \leq \bar{G} = G/K \leq Aut(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G.

Лемма 15. *S не является спорадической группой.*

Доказательство. Предположим, что S – спорадическая группа.

Пусть $H = O^+_{2n}(q)$. Так как $n \geq 9$, то по лемме 4 и [13, табл. 2] при $n \not\equiv 3 \pmod 4$ имеем $t(S) \geq t(G) - 1 = [(3n+1)/4] - 1 \geq 6$ и при $n \equiv 3 \pmod 4$ имеем $t(S) \geq t(G) - 1 = (3n+3)/4 - 1 \geq 8$, поэтому ввиду [4, табл. 2] имеем

$$S \in \{F_1, F_2, J_4, Fi'_{24}, LyS\}.$$

Предположим, что $S = F_1$. Тогда ввиду [13, табл. 2] имеем $t(S) = 11$, а по [8] имеем

$$\pi(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59, 71\}.$$

По лемме 4 имеем $t(G) \leq t(S) + 1 = 12$. По [13, табл. 2] имеем $t(G) = [(3n+1)/4]$. Значит, $n \leq 16$.

Пусть $n = 16$. По [13, табл. 3] множество $\{r_9(q), r_{11}(q), r_{18}(q), r_{22}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{9f}(p)$, $t_2 = r_{11f}(p)$, $t_3 = r_{18f}(p)$, $t_4 = r_{22f}(p)$. Рассмотрим коклику $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1$

$\pmod{9f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{11f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{18f}$, $t_4 \equiv 1 \pmod{22f}$, поэтому $t_1 = 19$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 23$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 19$ или $t_3 \notin \pi(S)$, $t_4 = 23$ или $t_4 \notin \pi(S)$. Значит, либо $t_1, t_2 \notin \pi(S)$, либо $t_1, t_4 \notin \pi(S)$, либо $t_3, t_2 \notin \pi(S)$, либо $t_3, t_4 \notin \pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Пусть $n = 10$. По [13, табл. 3] множество $\{r_9(q), r_{16}(q), r_{18}(q)\}$ – коклика в $GK(G)$. Положим $t_1 = r_{9f}(p)$, $t_2 = r_{16f}(p)$, $t_3 = r_{18f}(p)$. Рассмотрим коклику $\{t_1, t_2, t_3\}$. По лемме 1 имеем $t_1 \equiv 1 \pmod{9f}$, $t_2 \equiv 1 \pmod{16f}$, $t_3 \equiv 1 \pmod{18f}$, поэтому $t_1 = 19$ или $t_1 \notin \pi(S)$, $t_2 = 17$ или $t_2 \notin \pi(S)$, $t_3 = 19$ или $t_3 \notin \pi(S)$. По лемме 6.4) имеем $R_{16}(q) \neq \{17\}$. Значит, существует $u \in R_{16}(q) \setminus \pi(S)$. Следовательно, коклика $\{t_1, u, t_3\}$ содержит не меньше двух чисел из $\pi(S)$; противоречие с леммой 4.

Рассуждая аналогично, получаем противоречие для других пар $(n, S) \neq (9, F_1)$.

Пусть $n = 9$ и $S = F_1$. По лемме 4 и [4, табл. 2, 4, 6] имеем либо $\{2, r_{16}(q), r_9(q)\} = \{2, s_1, s_2\}$, где $s_1, s_2 \in \{29, 41, 59, 71\}$, либо $\{2, r_{16}(q)\} = \{2, s\}$, где $s \in \{29, 41, 59, 71\}$, либо $\{2, r_9(q)\} = \{2, s\}$, где $s \in \{29, 41, 59, 71\}$, причем по лемме 1 имеем $r_{16}(q) \equiv 1 \pmod{16}$, $r_9(q) \equiv 1 \pmod 9$; противоречие.

Пусть $H = O^-_{2n}(q)$. Так как $n \geq 9$, то по лемме 4 и [13, табл. 2] имеем $t(S) \geq t(G) - 1 = [(3n+1)/4] - 1 \geq 6$, поэтому ввиду [4, табл. 2] имеем

$$S \in \{F_1, F_2, J_4, Fi'_{24}, LyS\}.$$

Рассуждая как в случае $H = O^+_{2n}(q)$, получаем противоречие для пар $(n, S) \neq (9, F_1)$.

Пусть $n = 9$ и $S = F_1$. По лемме 4 и [4, табл. 2, 4, 6] имеем либо $\{2, r_{16}(q), r_{18}(q)\} = \{2, s_1, s_2\}$, где $s_1, s_2 \in \{29, 41, 59, 71\}$, либо $\{2, r_{16}(q)\} = \{2, s\}$, где $s \in \{29, 41, 59, 71\}$, либо $\{2, r_{18}(q)\} = \{2, s\}$, где $s \in \{29, 41, 59, 71\}$, причем по лемме 1 имеем $r_{16}(q) \equiv 1 \pmod{16}$, $r_{18}(q) \equiv 1 \pmod{18}$; противоречие. $\square$

Теорема 3 доказана.

5 Доказательство теоремы 4

Пусть $H = A_n$ – знакопеременная группа, где $n \geq 29$ и $n - s'_{2n} \leq 3$, G – конечная группа с $GK(G) = GK(H)$ и S – композиционный фактор группы G. Так как $n - s'_{2n} \leq 3$, то $t(2, G) \leq 2$.

По лемме 4 выполнено условие $S \leq \bar{G} = G/K \leq Aut(S)$ для наибольшей нормальной разрешимой подгруппы K группы G.

Лемма 16. *S не является спорадической группой.*

Доказательство. Предположим, что S является спорадической группой. Положим $n_0 = 29$ при $S \notin \{F_2, F_1, Fi'_{24}, J_4\}$, $n_0 = 37$ при $S = Fi'_{24}$, $n_0 = 41$ при $S = F_2$, $n_0 = 47$ при $S = J_4$, $n_0 = 53$ при $S = F_1$.

Пусть $H = A_n$, где $29 \leq n \leq 33$, и

$$S \in \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, HS, He, McL, Suz, Fi_{22}, HN, O'N, LyS, F_3\}.$$

По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $23, 29 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $23, 29 \in \pi(K)$. Но $23 \cdot 29 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $29 \leq n \leq 33$, и

$$S \in \{M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}\}.$$

По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $19, 29 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $19, 29 \in \pi(K)$. Но $19 \cdot 29 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $29 \leq n \leq 33$, и $S \in \{Ru, J_4\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $17, 19 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $17, 19 \in \pi(K)$. Но $17 \cdot 19 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_{34}$ и

$$S \in \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, HS, He, McL, Suz, Fi_{22}, HN\}.$$

Тогда $23, 29, 31 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $23, 29, 31 \in \pi(K)$. Так как $\{23, 29, 31\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{34}$ и

$$S \in \{M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}\}.$$

Тогда $19, 29, 31 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $19, 29, 31 \in \pi(K)$. Так как $\{19, 29, 31\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{34}$ и $S \in \{F_3, O'N, LyS\}$. Тогда $17, 23, 29 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $17, 23, 29 \in \pi(K)$. Так как $\{17, 23, 29\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{34}$ и $S = Ru$. Тогда $17, 23, 31 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $17, 23, 31 \in \pi(K)$. Так как $\{17, 23, 31\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Если $n \in \{35, 36\}$, то $n - s'_{2n} \geq 4$; противоречие с условием.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 37$, и

$$S \in \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, J_1, J_2, J_3, HS, He, McL, Suz, Fi_{22}, HN\}.$$

По лемме 7 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 37$, то $(n+1)/2 \geq 19$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 19$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $37 \leq n \leq 39$, и

$$S \in \{M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}, Fi'_{24}, Ru\}.$$

По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $31, 37 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $31, 37 \in \pi(K)$. Но $31 \cdot 37 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $37 \leq n \leq 39$, и $S \in \{F_3, F_2, O'N\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда

$29, 37 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $29, 37 \in \pi(K)$. Но $29 \cdot 37 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $37 \leq n \leq 39$, и $S = LyS$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $23, 29 \in \pi(H)\setminus\pi(S)$. Значит, $23, 29 \in \pi(K)$. Но $23{\cdot}29 \in \omega(K)\setminus\omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_{40}$ и

$$S \in \{M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}\}.$$

Тогда $29, 31, 37 \in \pi(H)\setminus\pi(S)$. Значит, $29, 31, 37 \in \pi(K)$. Так как $\{29, 31, 37\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{40}$ и $S \in \{Fi'_{24}, Ru\}$. Тогда $19, 31, 37 \in \pi(H)\setminus\pi(S)$. Значит, $19, 31, 37 \in \pi(K)$. Так как $\{19, 31, 37\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{40}$ и $S \in \{F_3, O'N\}$. Тогда $23, 29, 37 \in \pi(H)\setminus\pi(S)$. Значит, $23, 29, 37 \in \pi(K)$. Так как $\{23, 29, 37\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{40}$ и $S = LyS$. Тогда $19, 23, 29 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $19, 23, 29 \in \pi(K)$. Так как $\{19, 23, 29\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $41 \leq n \leq 45$, и

$$S \in \{M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}, Fi'_{24}, Ru, F_3, F_2, O'N\}.$$

По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $37, 41 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $37, 41 \in \pi(K)$. Но $37 \cdot 41 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $41 \leq n \leq 45$, и $S = LyS$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $29, 41 \in \pi(H)\setminus\pi(S)$. Значит, $29, 41 \in \pi(K)$. Но $29{\cdot}41 \in \omega(K)\setminus\omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 46$, и

$$S \in \{M_{23}, M_{24}, Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}\}.$$

По лемме 7 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n + 1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 46$, то $(n + 1)/2 > 23$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 23$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{46}$ и $S \in \{Fi'_{24}, Ru, F_3, F_2, O'N\}$. Тогда $37, 41, 43 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $37, 41, 43 \in \pi(K)$. Так как $\{37, 41, 43\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{46}$ и $S = LyS$. Тогда $29, 41, 43 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $29, 41, 43 \in \pi(K)$. Так как $\{29, 41, 43\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $47 \leq n \leq 49$, и

$$S \in \{Fi'_{24}, Ru, F_3, F_2, O'N, LyS\}.$$

По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $41, 43 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $41, 43 \in \pi(K)$. Но $41 \cdot 43 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $47 \leq n \leq 49$, и $S = F_1$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $37, 43 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $37, 43 \in \pi(K)$. Но $37 \cdot 43 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $47 \leq n \leq 49$, и $S = J_4$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $41, 47 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $41, 47 \in \pi(K)$. Но $41 \cdot 47 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_{50}$ и $S \in \{Fi'_{24}, Ru, F_3, O'N, LyS\}$. Тогда $41, 43, 47 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $41, 43, 47 \in \pi(K)$. Так как $\{41, 43, 47\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{50}$ и $S = F_2$. Тогда $37, 41, 43 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $37, 41, 43 \in \pi(K)$. Так как $\{37, 41, 43\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{50}$ и $S = J_4$. Тогда $19, 41, 47 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $19, 41, 47 \in \pi(K)$. Так как $\{19, 41, 47\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Если $n \in \{51, 52\}$, то $n - s'_{2n} \geq 4$; противоречие с условием.

Пусть $H = A_n$, где $53 \leq n \leq 55$, и

$$S \in \{Fi'_{24}, Ru, F_3, F_2, O'N, LyS, F_1\}.$$

По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $43, 53 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $43, 53 \in \pi(K)$. Но $43 \cdot 53 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $53 \leq n \leq 55$, и $S = J_4$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $47, 53 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $47, 53 \in \pi(K)$. Но $47 \cdot 53 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_{56}$ и

$$S \in \{Fi'_{24}, Ru, F_3, O'N, LyS, F_2\}.$$

Тогда $41, 43, 53 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $41, 43, 53 \in \pi(K)$. Так как $\{41, 43, 53\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{56}$ и $S = F_1$. Тогда $37, 43, 53 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $37, 43, 53 \in \pi(K)$. Так как $\{37, 43, 53\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_{56}$ и $S = J_4$. Тогда $41, 47, 53 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $41, 47, 53 \in \pi(K)$. Так как $\{41, 47, 53\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Если $n \in \{57, 58\}$, то $n - s'_{2n} \geq 4$; противоречие с условием.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 59$, и $S \in \{Fi'_{24}, Ru\}$. По лемме 7 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 59$, то $(n+1)/2 \geq 30$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 29$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{59, 60\}$, и $S \in \{F_3, F_2, O'N, LyS, F_1\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $43, 53 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $43, 53 \in \pi(K)$. Но $43 \cdot 53 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{59, 60\}$, и $S = J_4$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $41, 53 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $41, 53 \in \pi(K)$. Но $41 \cdot 53 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 61$, и $S \in \{F_3, O'N\}$. По лемме 7 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 61$, то $(n+1)/2 \geq 31$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 31$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{61, 62, 63, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 79, 80, 81, 83, 84\}$, и $S \in \{F_2, LyS, F_1, J_4\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $53, 61 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $53, 61 \in \pi(K)$. Но $53 \cdot 61 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{64, 70\}$, и $S \in \{F_2, LyS, F_1\}$. Тогда $43, 53, 61 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $43, 53, 61 \in \pi(K)$. Так как $\{43, 53, 61\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{64, 70\}$, и $S = J_4$. Тогда $41, 53, 61 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $41, 53, 61 \in \pi(K)$. Так как $\{41, 53, 61\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Если $n \in \{65, 66, 77, 78\}$, то $n - s'_{2n} \geq 4$; противоречие с условием.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{76, 82\}$, и $S \in \{F_2, LyS, F_1, J_4\}$. Тогда $53, 61, 73 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $53, 61, 73 \in \pi(K)$. Так как $\{53, 61, 73\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 85$, и $S = J_4$. По лемме 7 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 85$, то $(n+1)/2 \geq 43$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 43$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{85, 89, 90, 91\}$, и $S \in \{F_2, LyS, F_1\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $53, 61 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $53, 61 \in \pi(K)$. Но $53 \cdot 61 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{86, 92\}$, и $S \in \{F_2, LyS, F_1\}$. Тогда $53, 61, 73 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $53, 61, 73 \in \pi(K)$. Так как $\{53, 61, 73\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Если $n \in \{87, 88\}$, то $n - s'_{2n} \geq 4$; противоречие с условием.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 93$, и $S = F_2$. По лемме 7 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 93$, то $(n+1)/2 \geq 47$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 47$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{100, 106, 112\}$, и $S \in \{LyS, F_1\}$. Тогда $53, 61, 73 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $53, 61, 73 \in \pi(K)$. Так как $\{53, 61, 73\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Если $n \in \{93, 94, 95, 96\}$, то $n - s'_{2n} \geq 4$; противоречие с условием.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{97, 98, 99, 101, 102, 103, 104, 105, 107, 108, 109, 110, 111\}$, и $S \in \{LyS, F_1\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $53, 61 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $53, 61 \in \pi(K)$. Но $53 \cdot 61 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{113, 114, 115\}$, и $S \in \{LyS, F_1\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $73, 79 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $73, 79 \in \pi(K)$. Но $73 \cdot 79 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{116, 130\}$, и $S \in \{LyS, F_1\}$. Тогда $73, 79, 83 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $73, 79, 83 \in \pi(K)$. Так как $\{73, 79, 83\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Если $n \in \{117, ..., 126\}$, то $n - s'_{2n} \geq 4$; противоречие с условием.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{127, 128, 129, 131, 132\}$, и $S \in \{LyS, F_1\}$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $73, 79 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $73, 79 \in \pi(K)$. Но $73 \cdot 79 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 133$, и $S = LyS$. По лемме 7 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 133$, то $(n+1)/2 \geq 67$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 67$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Пусть $H = A_n$, где $n \in \{133, 137, 138, 139, 140\}$, и $S = F_1$. По [7, табл. 1] граф $GK(H)$ несвязен. По лемме 5 подгруппа K нильпотентна. Тогда $73, 79 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $73, 79 \in \pi(K)$. Но $73 \cdot 79 \in \omega(K) \setminus \omega(H)$; противоречие.

Пусть $H = A_{134}$ и $S = F_1$. Тогда $73, 79, 83 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $73, 79, 83 \in \pi(K)$. Так как $\{73, 79, 83\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4.

Если $n \in \{135, 136\}$, то $n - s'_{2n} \geq 4$; противоречие с условием.

Пусть $H = A_n$, где $n \geq 141$, и $S = F_1$. По лемме 7 существует по меньшей мере 3 простых числа p_i таких, что $(n+1)/2 < p_i < n$. Так как $n \geq 141$, то $(n+1)/2 \geq 71$, поэтому $p_1, p_2, p_3 > 71$. Тогда $p_1, p_2, p_3 \in \pi(H) \setminus \pi(S)$. Значит, $p_1, p_2, p_3 \in \pi(K)$. Так как $\{p_1, p_2, p_3\}$ – коклика в графе $GK(H)$, то получаем противоречие с леммой 4. □

Теорема 4 доказана.

Пусть K – конечная группа. Старолетов А. М. в [15] заметил, что если $r \leq n - s'_{2n}$ для любого $r \in \pi(K)$, то граф простых чисел расширения знакопеременной группы A_n посредством K совпадает с графом простых чисел знакопеременной группы A_n. Если S – спорадическая группа, то по [8] простые делители из $\pi(S)$ не превосходят 71.

Пример. Если $n - s'_{2n} \geq 4$, то при достаточно большом n существуют конечные группы, имеющие спорадический композиционный фактор S, с графом простых чисел как у знакопеременной группы A_n.

Так как интервал между n и s'_{2n} должен быть не меньше 71, то по [16] можно взять $s'_{2n} = 31397$ и $n = 31468$. Пусть $H = A_{31468}$ и G – прямое произведение H и S. Тогда $GK(G) = GK(H)$.

References

[1] A.S. Kondrat'ev, *Finite Groups with Given Properties of Their Prime Graphs*, Algebra and Logic, **55**:1 (2016), 77—82.

[2] A.M. Staroletov, *Sporadic composition factors of finite groups isospectral to simple groups*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **8** (2011), 268—272.

[3] M.R. Zinovieva, *O sushchestvovanii sporadicheskogo kompozitsionnogo faktora v nekotorykh konechnykh gruppakh*, Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, **30**:4 (2024), 134—148.

[4] A. V. Vasil'ev, E. P. Vdovin, *An Adjacency Criterion for the Prime Graph of a Finite Simple Group*, Algebra and Logic, **44**:6 (2005), 381—406

[5] J.S. Williams, *Prime graph components of finite groups*, J. Algebra, **69**:2 (1981), 487–513.

[6] A.S. Kondrat'ev, *Prime graph components of finite simple groups*, Math. USSR-Sb., **67**:1 (1990), 235—247.

[7] A.S. Kondrat'ev, V.D. Mazurov, *Recognition of alternating groups of prime degree from the orders of their elements*, Siberian Math. J., **41**:2 (2000), 294–302

[8] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson, *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985.

[9] K. Zsigmondy, *Zur Theorie der Potenzreste*, Monatsh. Math. Phys., **3** (1892), 265–284.

[10] G.C. Gerono, *Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation* $x^m = y^n + 1$, Nouv. Ann. Math. (2)., **9** (1870), 469–471.

[11] P. Crescenzo, *A diophantine equation which arises in the theory of finite groups*, Adv. in Math., **17** (1975), 25-–29.

[12] A. V. Vasil'ev, I. B. Gorshkov, *On recognition of finite simple groups with connected prime graph*, Siberian Math. J., **50**:2 (2009), 233–238

[13] A. V. Vasil'ev, E. P. Vdovin, *Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group*, Algebra and Logic, **50**:4 (2011), 291–322

[14] A.V. Zavarnitsine, *Finite simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 1-–12.

[15] A.M. Staroletov, *On recognition of alternating groups by prime graph*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **14** (2017), 994–1010.

[16] Chris Caldwell, *Gaps Between Primes*, t5k.org.

Marianna Rifhatovna Zinovieva
N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
str. S. Kovalevskaya, 16,
620108, Novosibirsk, Russia
Email address: zinovieva-mr@yandex.ru