

ТОЧНЫЕ ПАРЫ ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ  
ИДЕАЛОВ ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСАЗ.К. ЩЕДРИКОВА *Представлено С.В. СУДОПЛАТОВЫМ*

**Abstract:** In this paper we study the question of the existence of exact pairs for ideals in upper semilattices of computable numberings and prove that all proper  $\Sigma_3^0$ -ideals in the semilattices of computable numberings of the families of all partial recursive functions, r.e. sets, left-r.e. reals, and Martin-Löf random left-r.e. reals have exact pairs.

**Keywords:** computable numbering, Rogers semilattice, ideal, exact pair, left-r.e. real.

## 1 Введение

В статье изучается вопрос о существовании точных пар для идеалов полурешеток Роджерса (верхних полурешеток вычислимых нумераций) семейств рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств и частично рекурсивных функций, т.е. таких пар их элементов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , что идеал состоит

---

SHCHEDRIKOVA, Z.K., EXACT PAIRS FOR ARITHMETICAL IDEALS IN THE ROGERS SEMILATTICES.

© 2026 Щедрикова З.К.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 24-11-00227 и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2026-1328).

Поступила 2 февраля 2026 г., опубликована 18 мая 2026 г.

в точности из элементов  $\mathbf{x}$ , для которых  $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$  и  $\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  (все используемые в статье сведения из теории нумераций содержатся в монографии Ю.Л. Ершова [1] и его статье [2]). Эти исследования мотивированы вопросом, сформулированным в [3, § 2.2]: верно ли, что всякий  $\emptyset''$ -р.п. класс вычислимых нумераций подсемейств семейства  $\mathcal{P}_1$  всех унарных частично рекурсивных функций, не содержащий его главной нумерации, имеет неглавную верхнюю границу (относительно сводимости нумераций).

Согласно результату работы [4], если сочленение  $A \oplus B$  р.п. множеств  $A$  и  $B$  креативно, то одно из этих множеств само является креативным. Из результатов работ [1, 5] следует, что подобное утверждение справедливо также для вычислимых нумераций семейств  $\mathcal{P}_1$  всех унарных частично рекурсивных функций и  $\mathcal{E}$  всех р.п. множеств: если прямая сумма  $\alpha \oplus \beta$  их нумераций  $\alpha$  и  $\beta$  главная, то одна из этих нумераций сама является главной. В работе [3] был получен бесконечный аналог этого результата. А именно, в теореме 2.1.7 процитированной работы было установлено, что всякий  $\emptyset'$ -р.п. класс вычислимых нумераций подсемейств семейства  $\mathcal{P}_1$ , не содержащий его главной нумерации, имеет неглавную верхнюю границу.

В настоящей статье устанавливается, что всякий собственный  $\Sigma_3^0$ -идеал полурешетки Роджерса каждого из семейств  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{E}$  обладает точной парой. Отсюда, в частности, следует, что заключение теоремы 2.1.7 [3] остается справедливым и для  $\emptyset''$ -р.п. классов вычислимых нумераций (см. следствие 2). Помимо этого устанавливается, что собственные  $\Sigma_3^0$ -идеалы полурешеток Роджерса семейств  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$ , состоящих из всех р.п. снизу и всех случайных по Мартин-Лефу р.п. снизу вещественных чисел соответственно, обладают точными парами.

В обозначениях и терминологии теории рекурсии мы в основном придерживаемся монографии Р.И. Соара [6]. Так через  $\varphi_e$  и  $W_e$  мы обозначаем частично рекурсивную функцию и р.п. множество с геделевскими номерами  $e$  соответственно. Через  $\varphi_{e,s}$  будем обозначать частичную функцию, определенную только на аргументах меньших  $s$  за  $s$  шагов работы вычисляющей ее машины Тьюринга. Для произвольной частичной функции  $\psi$  область ее определения обозначается как  $\text{dom } \psi$ , а область ее значений — как  $\text{ran } \psi$ . Для натурального  $x$  пишем  $\psi(x) \downarrow$ , если  $x \in \text{dom } \psi$ , и  $\psi(x) \uparrow$  в противном случае. Положим  $W_{e,s} = \text{dom } \varphi_{e,s}$ .

Через  $c(x, y)$  будем обозначать стандартную общерекурсивную биекцию  $2^x(2y+1) - 1$ , отображающую  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  на  $\mathbb{N}$ . Вместо  $c(c(x, y), z)$  будем просто писать  $c(x, y, z)$ . Пусть  $l$  и  $r$  — общерекурсивные функции, такие, что  $l(c(x, y)) = x$  и  $r(c(x, y)) = y$  для всех  $x$  и  $y$ .

Через  $D_e$  будем обозначать конечное множество с каноническим индексом  $e$ . Последовательность конечных множеств назовем *сильно вычислимой*, если канонический индекс каждого ее элемента определяется равномерно по его номеру.

Запись  $\exists^\infty x [\dots]$  означает “существует бесконечно много  $x$ , таких, что”. Двойственный квантор “для почти всех  $x$ ”, т.е.  $\exists x_0 \forall x \geq x_0 [\dots]$ , обозначается через  $\forall^\infty x [\dots]$ .

Множество всех конечных и бесконечных строк, состоящих из 0 и 1, будем обозначать через  $2^{<\omega}$  и  $2^\omega$  соответственно. Для строк  $\sigma \in 2^{<\omega}$  и  $\tau \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$  будем писать  $\sigma \leq_L \tau$ , если либо  $\sigma$  является началом  $\tau$ , либо  $\sigma(n) = 0$  и  $\tau(n) = 1$ , где  $n$  — наименьшее число, для которого  $\sigma(n) \neq \tau(n)$ . Если  $\sigma \neq \tau$ , то вместо  $\sigma \leq_L \tau$  будем писать  $\sigma <_L \tau$ .

## 2 Предварительные сведения

Нумерацией непустого не более чем счетного множества  $S$  будем называть любую сюръекцию  $\nu : \mathbb{N} \rightarrow S$ . Скажем, что нумерация  $\mu$  сводима к нумерации  $\nu$  (в этом случае используется обозначение  $\mu \leq \nu$ ), если существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что  $\mu(x) = \nu(f(x))$  для всех  $x$ . Нумерации  $\mu$  и  $\nu$  называются эквивалентными (в этом случае используется запись  $\mu \equiv \nu$ ), если  $\mu \leq \nu$  и  $\nu \leq \mu$ . Класс  $\equiv$ -эквивалентности нумерации  $\nu$  будем обозначать через  $[\nu]$ . Прямой суммой нумераций  $\nu_0$  и  $\nu_1$  называется нумерация  $\nu_0 \oplus \nu_1$ , определенная для всех  $x \in \mathbb{N}$  и  $i = 0, 1$  следующим образом:

$$(\nu_0 \oplus \nu_1)(2x + i) = \nu_i(x).$$

Нумерацию  $\alpha$  семейства р.п. множеств  $\mathcal{A}$  назовем *вычислимой*, если множество

$$G_\alpha = \{c(x, y) : y \in \alpha(x)\}$$

р.п. Семейства, обладающие вычислимыми нумерациями, также будем называть *вычислимыми*. Назовем вычислимую нумерацию  $\nu$  семейства  $\mathcal{A}$  *главной*, если к ней сводима любая его вычислимая нумерация. Будем говорить, что нумерация  $\beta$  семейства унарных частично рекурсивных функций  $\mathcal{B}$  *вычислима*, если нумерация  $x \mapsto \Gamma_{\beta_x}$ , где

$$\Gamma_\psi = \{c(x, y) : \psi(x) \downarrow = y\}$$

для произвольной частичной функции  $\psi \in \mathcal{P}_1$ , вычислима как нумерация семейства р.п. множеств. В дальнейшем будем отождествлять элементы  $\psi \in \mathcal{P}_1$  с р.п. множествами  $\Gamma_\psi$ . Для каждого натурального  $e$  через  $\nu_e$  будем обозначать вычислимую нумерацию

$$\nu_e : x \mapsto \{y : c(x, y) \in W_e\}.$$

Очевидно, что для каждой вычислимой нумерации  $\alpha$  существует такое  $e$ , что  $\alpha = \nu_e$ .

Для произвольного множества  $X$  класс  $\mathcal{C}$  вычислимых нумераций называется *X-р.н.*, если существует такая функция  $f \leq_T X$ , что

$$\mathcal{C} = \{\nu_{f(e)} : e \in \mathbb{N}\}.$$

Через  $S(\mathcal{C})$  будем обозначать *индексное множество* класса  $\mathcal{C}$ , т.е. множество

$$S(\mathcal{C}) = \{e : \nu_e \in \mathcal{C}\}.$$

Последовательность вычислимых нумераций  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  назовем *вычислимой*, если существует такая общерекурсивная функция  $f$ , что

$$\alpha_n = \nu_{f(n)}$$

для всех  $n$ .

Множество классов эквивалентности вычислимых нумераций вычислимого семейства  $\mathcal{A}$  относительно порядка, заданного отношением сводимости нумераций, образует верхнюю полурешетку, называемую *полурешеткой Роджерса* семейства  $\mathcal{A}$ . В этой полурешетке наименьшей верхней гранью классов эквивалентности двух нумераций семейства  $\mathcal{A}$  является класс эквивалентности их прямой суммы. Очевидно, что класс эквивалентности главной нумерации  $\mathcal{A}$  является наибольшим элементом его полурешетки Роджерса.

Для класса  $\mathcal{C}$  вычислимых нумераций семейства  $\mathcal{A}$  через  $\mathbf{I}(\mathcal{C})$  будем обозначать идеал его полурешетки Роджерса, порожденный классами эквивалентности нумераций, принадлежащих  $\mathcal{C}$ .

*Рекурсивно перечислимым снизу числом* назовем всякий элемент  $\rho \in 2^\omega$ , для которого множество

$$\{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \rho\}$$

р.п. Через  $\mathcal{L}$  будем обозначать семейство всех р.п. снизу чисел, а через  $\mathcal{R}$  — семейство всех случайных по Мартин-Лефу (см., например, [7, 8]) р.п. снизу чисел. Следуя [9], назовем нумерацию  $\alpha$  подсемейства  $\mathcal{L}$  *вычислимой*, если нумерация

$$x \mapsto \{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \alpha(x)\}$$

вычислима как нумерация семейства р.п. множеств (при произвольном заранее фиксированном эффективном взаимно однозначном соответствии между элементами  $2^{<\omega}$  и натуральными числами). В дальнейшем будем отождествлять подсемейства  $\mathcal{B}$  семейства  $\mathcal{L}$  с семействами

$$\{\{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \tau\} : \tau \in \mathcal{B}\}.$$

Назовем нумерацию  $\nu$  *фридберговой*, если  $\nu(x) \neq \nu(y)$  для любых различных  $x$  и  $y$ . Из результатов работы [10] вытекает, что семейства  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{E}$  обладают фридберговыми вычислимыми нумерациями, а из результатов работы [11] — что фридберговыми вычислимыми нумерациями обладают семейства  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{R}$  (см. также [12, 13]).

### 3 Результаты

Следующая теорема позволяет получить достаточное условие существования точных пар для идеалов вида  $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ , где  $\mathcal{C}$  — класс вычислимых нумераций с  $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{A}$  — семейство р.п. множеств, такое, что для любого  $X \in \mathcal{A}$  и для любого конечного  $F \subseteq X$  существует бесконечно много  $Y \in \mathcal{A}$ , для которых  $F \subseteq Y$ . Тогда если  $\mathcal{A}$  обладает фридберговой вычислимой нумерацией, то для любой вычислимой последовательности его нумераций

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$$

существуют его вычислимые нумерации  $\beta_0$  и  $\beta_1$ , удовлетворяющие следующим двум условиям:

- (а)  $\alpha_n \leq \beta_0$  и  $\alpha_n \leq \beta_1$  для всех  $n$ ,
- (б) для любой вычислимой нумерации  $\gamma$ , такой, что  $\gamma \leq \beta_0$  и  $\gamma \leq \beta_1$ , существует  $n$ , для которого  $\gamma \leq \alpha_n$ .

*Доказательство.* Зафиксируем фридбергову вычислимую нумерацию  $\delta$  семейства  $\mathcal{A}$  и построим его вычислимые нумерации  $\beta_0$  и  $\beta_1$ , удовлетворяющие для всех  $n$ ,  $e_0$  и  $e_1$  следующим требованиям:

$$\begin{aligned} Q_n : \exists k \forall x [\beta_0(c(k, n, x)) = \beta_1(c(k, n, x)) = \alpha_n(x)], \\ R_{c(e_0, e_1)} : (\varphi_{e_0} \text{ и } \varphi_{e_1} \text{ всюду определены}) \& \beta_0 \circ \varphi_{e_0} = \beta_1 \circ \varphi_{e_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists m [\beta_0 \circ \varphi_{e_0} \leq \alpha_m]. \end{aligned}$$

Очевидно, что тогда нумерации  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  будут искомыми.

*Построение*

Шаг 0. Полагаем  $\beta_{0,0}(x) = \beta_{1,0}(x) = \emptyset$  для всех  $x$  и  $\psi_{0,0} = \psi_{1,0} = \emptyset$ . Частичные функции  $\psi_{0,s}$  и  $\psi_{1,s}$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , будут использоваться в построении для выполнения требований  $R_{c(e_0, e_1)}$ , при этом будет обеспечено, что на каждом его шаге  $s+1$  они определяются лишь на конечном числе элементов. На каждом последующем шаге  $u > 0$  будем считать, что  $\psi_{0,u} = \psi_{0,u-1}$  и  $\psi_{1,u} = \psi_{1,u-1}$ , если явно не указано обратное. Зафиксируем сильно вычислимые последовательности конечных множеств  $\{\alpha_{n,s}(x)\}_{n,x,s \in \mathbb{N}}$  и  $\{\delta_s(x)\}_{s,x \in \mathbb{N}}$ , такие, что

$$\begin{aligned} \alpha_{n,s}(x) \subseteq \alpha_{n,s+1}(x), \quad \delta_s(x) \subseteq \delta_{s+1}(x), \\ \alpha_n(x) = \bigcup_t \alpha_{n,t}(x), \quad \delta(x) = \bigcup_t \delta_t(x) \end{aligned}$$

для всех  $n$ ,  $s$  и  $x$ .

Шаг  $s+1 = 2t+1$ . На этих шагах выполняем требования  $Q_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Для всех  $i = 0, 1$  и  $k, n, x \in \mathbb{N}$ , таких, что  $c(k, n, x) \notin \text{ran}(l \circ \psi_{i,s})$ , полагаем

$$\beta_{i,s+1}(c(k, n, x)) = \alpha_{n,s+1}(x). \quad (1)$$

Шаг  $s+1 = 2c(e_0, e_1, t)+2$ . На этих шагах выполняем требование  $R_{c(e_0, e_1)}$ . Если  $\psi_{0,s}(e_0, e_1) \uparrow$ ,  $\psi_{1,s}(e_0, e_1) \uparrow$  и существуют числа  $y, k_i, n_i, x_i \leq s$ , где  $i = 0, 1$ , удовлетворяющие следующим условиям:

- (i)  $n_i > c(e_0, e_1)$ ,

$$(ii) \varphi_{e_i, s}(y) \downarrow = c(k_i, n_i, x_i),$$

(поскольку области определения частичных функций  $\psi_{i, s}$  и  $\varphi_{e_i, s}$  конечны, эти условия проверяются рекурсивно), то зафиксируем один из таких наборов  $y, k_i, n_i, x_i$  и выберем такие числа  $z_0, z_1$  и  $u$ , что  $z_0 \neq z_1$  и

$$\beta_{i, s}(c(k_i, n_i, x_i)) \subseteq \delta_u(z_i), \quad (2)$$

$$z_i \notin \text{ran}(r \circ \psi_{0, s}) \cup \text{ran}(r \circ \psi_{1, s}), \quad (3)$$

(из условий теоремы непосредственно вытекает, что подходящие  $z_0, z_1$  и  $u$  существуют) и определим

$$\psi_{i, s+1}(e_0, e_1) = \begin{cases} c(c(k_i, n_i, x_i), z_i), & \text{если } c(k_i, n_i, x_i) \notin \text{ran}(l \circ \psi_{i, s}), \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Если же либо одно из значений  $\psi_{0, s}(e_0, e_1), \psi_{1, s}(e_0, e_1)$  определено, либо не существует чисел  $y, k_i, n_i, x_i \leq s$ , где  $i = 0, 1$ , удовлетворяющих условиям (i) и (ii), то полагаем  $\psi_{i, s+1} = \psi_{i, s}$ .

Для всех  $i = 0, 1$  и  $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$ , для которых  $\psi_{i, s}(d_0, d_1) \downarrow$ , полагаем

$$\beta_{i, s+1}(l(\psi_{i, s}(d_0, d_1))) = \beta_{i, s}(l(\psi_{i, s}(d_0, d_1))) \cup \delta_s(r(\psi_{i, s}(d_0, d_1))). \quad (5)$$

В конце построения для всех  $i = 0, 1$  и  $x \in \mathbb{N}$  полагаем  $\beta_i(x) = \bigcup_s \beta_{i, s}(x)$ .

Покажем, что для каждого  $n$  существует лишь конечное число пар  $k, x$ , таких, что  $\beta_i(c(k, n, x)) \neq \alpha_n(x)$  для некоторого  $i = 0, 1$ . Зафиксируем произвольные числа  $e_0, e_1$ . Проверки (i) и присваивания (4) в построении обеспечивают, что существует лишь конечное число пар  $k, x$ , таких, что значения  $\beta_i(c(k, n, x))$  при  $n = c(e_0, e_1)$  определяются присваиваниями (5). Значит, для всех, за исключением конечного числа, пар  $k, x$  значения  $\beta_i(c(k, n, x))$  определяются присваиваниями (1) и, следовательно, совпадают с  $\alpha_n(x)$ . Отсюда следует, что для каждого  $n$  требование  $Q_n$  выполнено.

Зафиксируем произвольные  $e_0, e_1$  и покажем, что требование  $R_{c(e_0, e_1)}$  также выполнено. Предположим, что соблюдается левая часть импликации в требовании  $R_{c(e_0, e_1)}$ . Если не существует чисел  $y$  и  $k_i, n_i$  и  $x_i$ , где  $i = 0, 1$ , для которых

$$n_i > c(e_0, e_1) \ \& \ \varphi_{e_i}(y) \downarrow = c(k_i, n_i, x_i),$$

то, поскольку для любого  $n$  существует лишь конечное число пар  $k, x$ , таких, что  $\beta_i(c(k, n, x)) \neq \alpha_n(x)$  для некоторого  $i = 0, 1$ , имеем

$$\beta_i \circ \varphi_{e_i} \leq \bigoplus_{j=0}^{c(e_0, e_1)} \alpha_j \leq \alpha_{c(e_0, e_1)}$$

для некоторого  $i = 0, 1$ . Стало быть, для подходящего  $i = 0, 1$  соблюдается  $\beta_0 \circ \varphi_{e_0} = \beta_i \circ \varphi_{e_i} \leq \alpha_{c(e_0, e_1)}$  и, следовательно, требование  $R_{c(e_0, e_1)}$  выполнено. Если же существуют числа  $y$  и  $k_i, n_i, x_i$ , где  $i = 0, 1$ , удовлетворяющие на некотором шаге  $s+1 = 2c(e_0, e_1, t) + 2$  (где  $s \geq y, k_i, n_i, x_i$ )

условиям (i) и (ii), то проверки (2), (3) и присваивания (4), (5) обеспечивают, что  $\beta_i(\varphi_{e_i}(y)) = \delta(z_i)$  для каждого  $i = 0, 1$ , причем  $z_0 \neq z_1$ . Поскольку нумерация  $\delta$  фридбергова, будем иметь

$$\beta_0(\varphi_{e_0}(y)) = \delta(z_0) \neq \delta(z_1) = \beta_1(\varphi_{e_1}(y)).$$

Отсюда следует, что левая часть импликации в требовании  $R_{c(e_0, e_1)}$  не соблюдается. Из полученного противоречия вытекает, что требование  $R_{c(e_0, e_1)}$  выполнено. Этим завершается доказательство теоремы.  $\square$

Чтобы получить искомое достаточное условие существования точных пар, нам понадобится следующее определение. Назовем семейств р.п. множеств  $\mathcal{A}$  *конечно-аппроксимируемым*, если существует такая бинарная частично рекурсивная функция  $\psi$ , что для всех  $n, m$  и  $e$  справедливы следующие импликации:

$$D_n \subseteq W_e \ \& \ W_e \in \mathcal{A} \Rightarrow \psi(n, e) \downarrow \ \& \ D_n \subseteq W_{\psi(n, e)} \subseteq W_e \ \& \ W_{\psi(n, e)} \in \mathcal{A}, \quad (6)$$

$$\psi(n, e) \downarrow \Rightarrow W_{\psi(n, e)} \in \mathcal{A}, \quad (7)$$

$$D_n \subseteq D_m \ \& \ \psi(n, e) \downarrow \ \& \ \psi(m, e) \downarrow \Rightarrow W_{\psi(n, e)} \subseteq W_{\psi(m, e)}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что семейства  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{L}$  конечно-аппроксимируемы. Поскольку любой случайный по Мартин-Лефу элемент  $2^\omega$  невычислим и остается таковым после любого изменения его префикса, семейство  $\mathcal{R}$  также конечно-аппроксимируемо.

Из следующей теоремы вытекает, что любой  $\Sigma_3^0$ -идеал полурешетки Роджерса вычислимого конечно-аппроксимируемого семейства является вычислимо порожденным.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — конечно-аппроксимируемое семейство р.п. множеств и  $\mathcal{C}$  — непустой класс его вычисляемых нумераций с  $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$ . Тогда существует вычисляемая последовательность  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  нумераций  $\mathcal{A}$ , такая, что идеал  $\mathbf{I}(\mathcal{C})$  порождается множеством классов эквивалентности всех ее элементов.

*Доказательство.* Пусть  $\psi$  — бинарная частично рекурсивная функция, которая вместе с семейством  $\mathcal{A}$  удовлетворяет условиям (6)–(8) для всех  $n, m$  и  $e$ . Поскольку  $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$ , существует рекурсивное тернарное отношение  $R$ , такое, что

$$e \in S(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \exists^\infty s [R(e, t, s)]$$

для всех  $e$ . Для каждого  $s$  определим конечное множество  $B_s$ , положив

$$B_s = \{c(e, t) \leq s : e, t \in \mathbb{N} \ \& \ R(e, t, s)\}.$$

Таким образом,  $\{B_s\}_{s \in \mathbb{N}}$  является сильно вычисляемой последовательностью и для всех  $e$  имеет место равносильность

$$e \in S(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \exists^\infty s [c(e, t) \in B_s].$$

Зафиксируем общерекурсивные функции  $f$  и  $g$ , такие, что

$$W_{f(e, x)} = \nu_e(x), \quad D_{g(e, s)} = W_{e, s}$$

для всех  $e$ ,  $x$  и  $s$ . (Напомним, что  $W_{e,0} = \emptyset$  для всех  $e$ .)

Теперь определим вычислимую последовательность  $\{\alpha_e^t\}_{t,e \in \mathbb{N}}$  нумераций подсемейств  $\mathcal{A}$ , такую, что каждая из нумераций класса  $\mathcal{C}$  эквивалентна одному из ее элементов и для каждой пары  $t, e$ , либо  $\alpha_e^t$  нумерует конечное подсемейство  $\mathcal{A}$ , либо она эквивалентна некоторой нумерации, принадлежащей  $\mathcal{C}$ . С этой целью зафиксируем некоторое множество  $X \in \mathcal{A}$ . Выберем произвольные  $e, t, u, x$  и определим

$$\alpha_e^t(c(u, x)) = X,$$

если  $\psi_u(0, f(e, x)) \uparrow$ , где  $\psi_u$  — часть функции  $\psi$ , определенная на аргументах  $y, z$ , для которых  $c(y, z) < u$ , за  $u$  шагов работы заранее фиксированной вычисляющей ее машины Тьюринга. Если же  $\psi_u(0, f(e, x)) \downarrow$ , то полагаем  $\alpha_e^t(c(u, x))$  равным множеству

$$\bigcup \left( \{W_{\psi(g(f(e,x),s),f(e,x))} : c(e,t) \in B_s \& s \geq x \& \psi(g(f(e,x),s),f(e,x)) \downarrow\} \cup \{W_{\psi(0,f(e,x))}\} \right).$$

(Отметим, что  $D_0 = \emptyset$ ).

Покажем, что последовательность  $\{\alpha_e^t\}_{t,e \in \mathbb{N}}$  является искомой. Для этого выберем произвольные  $e$  и  $t$ , такие, что  $\exists^\infty s [c(e,t) \in B_s]$ . Тогда  $e \in S(\mathcal{C})$  и, следовательно,  $W_{f(e,x)} \in \mathcal{A}$  для всех  $x$ . Стало быть,  $\psi(g(f(e,x),v),f(e,x)) \downarrow$  и

$$W_{f(e,x),v} \subseteq W_{\psi(g(f(e,x),v),f(e,x))} \subseteq W_{f(e,x)}$$

для всех  $x$  и  $v$ . Таким образом, для всех  $u$  и  $x$  выполняется

$$\begin{aligned} \psi_u(0, f(e, x)) \downarrow &\Rightarrow \alpha_e^t(c(u, x)) = \bigcup_v W_{\psi(g(f(e,x),v),f(e,x))} = \\ &= \bigcup_v W_{f(e,x),v} = W_{f(e,x)} = \nu_e(x), \\ \psi_u(0, f(e, x)) \uparrow &\Rightarrow \alpha_e^t(c(u, x)) = X. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $\alpha_e^t \equiv \nu_e$ .

Если  $\forall^\infty s [c(e,t) \notin B_s]$ , то конъюнкт “ $s \geq x$ ” в определении множества  $\alpha_e^t(c(u, x))$  при  $\psi_u(0, f(e, x)) \downarrow$  обеспечивает, что, начиная с некоторого  $x$ , будем иметь  $\alpha_e^t(x) = W_{\psi(0,f(e,x))}$ . Значит,  $\alpha_e^t$  нумерует конечное подсемейство семейства  $\mathcal{A}$ .

Теперь выберем какую-нибудь нумерацию  $\alpha \in \mathcal{C}$  и для всех  $n$  положим

$$\alpha_n = \alpha_{r(n)}^{l(n)} \oplus \alpha.$$

Как показано выше, для всех  $e$  и  $t$  либо  $\alpha_e^t \equiv \nu_e$ , либо  $\alpha_e^t$  нумерует конечное подсемейство  $\mathcal{A}$  и тогда  $\alpha \oplus \alpha_e^t \equiv \alpha$ . Кроме того, для каждого  $e \in S(\mathcal{C})$  существует  $t$ , для которого  $\alpha_e^t \equiv \nu_e$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  удовлетворяет заключению теоремы.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $\mathcal{A}$  — одно из семейств  $\mathcal{P}_1, \mathcal{E}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$  и пусть  $\mathcal{C}$  — непустой класс его вычислимых нумераций с  $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$ . Тогда идеал  $\mathbf{I}(\mathcal{C})$  имеет точную пару.

*Доказательство.* По теореме 2 существует вычислимая последовательность  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  нумераций семейства  $\mathcal{A}$ , такая, что идеал  $\mathbf{I}(\mathcal{C})$  порождается множеством классов эквивалентности всех ее элементов. Для каждого  $n$  определим вычислимую нумерацию  $\alpha_n$  семейства  $\mathcal{A}$ , положив

$$\alpha_n = \bigoplus_{m \leq n} \gamma_m.$$

Пусть  $\beta_0, \beta_1$  — вычислимые нумерации семейства  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющие вместе с последовательностью

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$$

условиям (a) и (b) формулировки теоремы 1. Тогда пара  $[\beta_0], [\beta_1]$  будет точной для идеала  $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ .  $\square$

**Следствие 2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — одно из семейств  $\mathcal{P}_1, \mathcal{E}$  и пусть  $\mathcal{D}$  —  $\emptyset''$ -р.п. класс вычислимых нумераций его подсемейств, не содержащий его главных нумераций. Тогда  $\mathcal{A}$  обладает такой вычислимой неглавной нумерацией  $\beta$ , что  $\alpha \leq \beta$  для всех  $\alpha \in \mathcal{D}$ .

*Доказательство.* Зафиксируем произвольную вычислимую неглавную нумерацию  $\alpha$  семейства  $\mathcal{A}$  и рассмотрим класс

$$\mathcal{C} = \{\alpha \oplus \beta : \beta \in \mathcal{D}\}.$$

Поскольку никакая главная нумерация семейства  $\mathcal{A}$  не эквивалентна прямой сумме вычислимых нумераций, не являющихся главными нумерациями  $\mathcal{A}$ , получаем, что класс  $\mathcal{C}$  не содержит его главных нумераций. Таким образом  $\mathbf{I}(\mathcal{C})$  является собственным идеалом полурешетки Роджерса  $\mathcal{A}$ . Ввиду того, что  $\mathcal{D}$  является  $\emptyset''$ -р.п., имеем  $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$ . Стало быть, идеал  $\mathbf{I}(\mathcal{C})$  обладает точной парой, в которой по крайней мере один элемент не является классом эквивалентности главной нумерации  $\mathcal{A}$ . Отсюда следует, что  $\mathcal{A}$  обладает нумерацией  $\beta$ , удовлетворяющей заключению теоремы.  $\square$

Следствие 2 может уже не быть верным в случае  $S(\mathcal{D}) \in \Pi_3^0$ . В самом деле, согласно теореме А.Б. Хуторецкого [14] для любой вычислимой неглавной нумерации  $\alpha$  произвольного семейства  $\mathcal{B}$  существует его вычислимая неглавная нумерация  $\gamma > \alpha$ . Отсюда следует, что если класс  $\mathcal{D}$  состоит из всевозможных неглавных вычислимых нумераций подсемейств семейства  $\mathcal{P}_1$  или  $\mathcal{E}$  (нетрудно видеть, что тогда  $S(\mathcal{D}) \in \Pi_3^0$ ), то он не имеет вычислимых неглавных верхних границ.

## References

- [1] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, Moscow, 1977. MR0506676
- [2] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, in Griffor, Edward R. (ed.), *Handbook of computability theory*, Elsevier. Stud. Logic Found. Math., **140**, Elsevier, Amsterdam, 1999, 473–503. Zbl 0948.03040
- [3] J.S. Royer, *A connotational theory of program structure*, Springer, Berlin etc., 1987. Zbl 0625.68018
- [4] A.H. Lachlan, *A note on universal sets*, J. Symb. Log., **31**:4 (1966), 573–574. Zbl 0239.02021
- [5] A.B. Khutoretskii, *On nonprincipal enumerations*, Algebra Logic, **8**:6 (1969), 412–415. Zbl 0259.02030
- [6] R.I. Soare, *Turing computability. Theory and applications*, Springer, Berlin, 2016. Zbl 1350.03001
- [7] R.G. Downey, D.R. Hirschfeldt, *Algorithmic randomness and complexity*, Springer, New York, 2010. Zbl 1221.68005
- [8] A. Shen, V.A. Uspensky, N.K. Vereshchagin, *Kolmogorov complexity and algorithmic randomness*, AMS, Providence, 2017. Zbl 1435.68015
- [9] F. Stephan, J. Teutsch, *Things that can be made into themselves*, Inf. Comput., **237** (2014), 174–186. Zbl 1336.03049
- [10] R.M. Friedberg, *Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication*, J. Symb. Log., **23**:3 (1959), 309–316. Zbl 0088.01601
- [11] P. Brodhead, B. Kjos-Hanssen, *Numberings and randomness*, in Ambos-Spies (ed.) et al., *Mathematical theory and computational practice*, CiE 2009, Lecture notes in computer science, **5635**, Springer, Berlin, 2009, 49–58. Zbl 1268.03057
- [12] I. Herbert, S. Jain, S. Lempp, M. Mustafa, F. Stephan, *Reductions between types of numberings*, Ann. Pure App. Logic, **170**:12 (2019), Article ID 102716. Zbl 1439.03077
- [13] M.Kh. Faizrahmanov, Z.K. Shchedrikova, *Effectively infinite classes of numberings and computable families of reals*, Computability, **12**:4 (2023), 339–350. Zbl 1543.03072
- [14] A.B. Khutoretskii, *On the cardinality of the upper semilattice of computable enumerations*, Algebra Logic, **10**:5 (1971), 348–352. Zbl 0298.02035

ZLATA KONSTANTINOVNA SHCHEDRIKOVA  
KAZAN (VOLGA REGION) FEDERAL UNIVERSITY,  
18, KREMLYOVSKAYA STR.,  
420008 KAZAN, RUSSIA  
Email address: [zlata.shchedrikova@yandex.ru](mailto:zlata.shchedrikova@yandex.ru)