S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 510.5
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 03D45

ТОЧНЫЕ ПАРЫ ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ИДЕАЛОВ ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСА

З.К. Щедрикова

Представлено П.П. Петровым

Abstract: In this paper we study the question of the existence of exact pairs for ideals in upper semilattices of computable numberings and prove that all proper Σ^0_3-ideals in the semilattices of computable numberings of the families of all partial recursive functions, r.e. sets, left-r.e. reals, and Martin-Löf random left-r.e. reals have exact pairs.

Keywords: computable numbering, Rogers semilattice, ideal, exact pair, left-r.e. real.

1 Введение

В статье изучается вопрос о существовании точных пар для идеалов полурешеток Роджерса (верхних полурешеток вычислимых нумераций) семейств рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств и частично рекурсивных функций, т.е. таких пар их элементов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, что идеал состоит в точности из элементов $\mathbf{x}$, для которых $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{a}$ и $\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$ (все используемые в статье сведения из теории нумераций содержатся в монографии Ю.Л. Ершова [1] и его статье [2]). Эти исследования мотивированы

Shchedrikova, Z.K., Exact pairs for arithmetical ideals in the Rogers semilattices.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00227.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

вопросом, сформулированным в [3, § 2.2]: верно ли, что всякий $\varnothing''$-р.п. класс вычислимых нумераций подсемейств семейства $\mathcal{P}_1$ всех унарных частично рекурсивных функций, не содержащий его главной нумерации, имеет неглавную верхнюю границу (относительно сводимости нумераций).

Согласно результату работы [4], если сочленение $A \oplus B$ р.п. множеств A и B креативно, то одно из этих множеств само является креативным. Из результатов работ [1, 5] следует, что подобное утверждение справедливо также для вычислимых нумераций семейств $\mathcal{P}_1$ всех унарных частично рекурсивных функций и $\mathcal{E}$ всех р.п. множеств: если прямая сумма $\alpha \oplus \beta$ их нумераций α и β главная, то одна из этих нумераций сама является главной. В работе [3] был получен бесконечный аналог этого результата. А именно, в теореме 2.1.7 процитированной работы было установлено, что всякий $\varnothing'$-р.п. класс вычислимых нумераций подсемейств семейства $\mathcal{P}_1$, не содержащий его главной нумерации, имеет неглавную верхнюю границу.

В настоящей статье устанавливается, что всякий собственный Σ^0_3-идеал полурешетки Роджерса каждого из семейств $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{E}$ обладает точной парой. Отсюда, в частности, следует, что заключение теоремы 2.1.7 [3] остается справедливым и для $\varnothing''$-р.п. классов вычислимых нумераций (см. следствие 2). Помимо этого устанавливается, что собственные Σ^0_3-идеалы полурешеток Роджерса семейств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$, состоящих из всех р.п. снизу и всех случайных по Мартин-Лефу р.п. снизу вещественных чисел соответственно, обладают точными парами.

В обозначениях и терминологии теории рекурсии мы в основном придерживаемся монографии Р.И. Соара [6]. Так через φ_e и W_e мы обозначаем частично рекурсивную функцию и р.п. множество с геделевскими номерами e соответственно. Через $\varphi_{e,s}$ будем обозначать частичную функцию, определенную только на аргументах меньших s за s шагов работы вычисляющей ее машины Тьюринга. Для произвольной частичной функции ψ область ее определения обозначается как $\operatorname{dom}\psi$, а область ее значений — как $\operatorname{ran}\psi$. Для натурального x пишем $\psi(x)\downarrow$, если $x \in \operatorname{dom}\psi$, и $\psi(x)\uparrow$ в противном случае. Положим $W_{e,s} = \operatorname{dom}\varphi_{e,s}$.

Через $c(x, y)$ будем обозначать стандартную общерекурсивную биекцию $2^x(2y+1)-1$, отображающую $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$. Вместо $c(c(x, y), z)$ будем просто писать $c(x, y, z)$. Пусть l и r — общерекурсивные функции, такие, что $l(c(x, y)) = x$ и $r(c(x, y)) = y$ для всех x и y.

Через D_e будем обозначать конечное множество с каноническим индексом e. Последовательность конечных множеств назовем *сильно вычислимой*, если канонический индекс каждого ее элемента определяется равномерно по его номеру.

Запись $\exists^\infty x\,[\dots]$ означает “существует бесконечно много x, таких, что”. Двойственный квантор “для почти всех x”, т.е. $\exists x_0 \forall x \geqslant x_0\,[\dots]$, обозначается через $\forall^\infty x\,[\dots]$.

Множество всех конечных и бесконечных строк, состоящих из 0 и 1, будем обозначать через $2^{<\omega}$ и 2^{ω} соответственно. Для строк $\sigma \in 2^{<\omega}$ и $\tau \in 2^{<\omega} \cup 2^{\omega}$ будем писать $\sigma \leqslant_L \tau$, если либо σ является началом τ, либо $\sigma(n) = 0$ и $\tau(n) = 1$, где n — наименьшее число, для которого $\sigma(n) \neq \tau(n)$. Если $\sigma \neq \tau$, то вместо $\sigma \leqslant_L \tau$ будем писать $\sigma <_L \tau$.

2 Предварительные сведения

Нумерацией непустого не более чем счетного множества S будем называть любую сюръекцию $\nu : \mathbb{N} \to S$. Скажем, что нумерация μ *сводима* к нумерации ν (в этом случае используется обозначение $\mu \leqslant \nu$), если существует такая общерекурсивная функция f, что $\mu(x) = \nu(f(x))$ для всех x. Нумерации μ и ν называются *эквивалентными* (в этом случае используется запись $\mu \equiv \nu$), если $\mu \leqslant \nu$ и $\nu \leqslant \mu$. Класс $\equiv$-эквивалентности нумерации ν будем обозначать через $[\nu]$. *Прямой суммой* нумераций ν_0 и ν_1 называется нумерация $\nu_0 \oplus \nu_1$, определенная для всех $x \in \mathbb{N}$ и $i = 0, 1$ следующим образом:

$$(\nu_0 \oplus \nu_1)(2x + i) = \nu_i(x).$$

Нумерацию α семейства р.п. множеств $\mathcal{A}$ назовем *вычислимой*, если множество

$$G_\alpha = \{c(x, y) : y \in \alpha(x)\}$$

р.п. Семейства, обладающие вычислимыми нумерациями, также будем называть *вычислимыми*. Назовем вычислимую нумерацию ν семейства $\mathcal{A}$ *главной*, если к ней сводима любая его вычислимая нумерация. Будем говорить, что нумерация β семейства унарных частично рекурсивных функций $\mathcal{B}$ *вычислима*, если нумерация $x \mapsto \Gamma_{\beta_x}$, где

$$\Gamma_\psi = \{c(x, y) : \psi(x) \downarrow= y\}$$

для произвольной частичной функции $\psi \in \mathcal{P}_1$, вычислима как нумерация семейства р.п. множеств. В дальнейшем будем отождествлять элементы $\psi \in \mathcal{P}_1$ с р.п. множествами Γ_ψ. Для каждого натурального e через ν_e будем обозначать вычислимую нумерацию

$$\nu_e : x \mapsto \{y : c(x, y) \in W_e\}.$$

Очевидно, что для каждой вычислимой нумерации α существует такое e, что $\alpha = \nu_e$.

Для произвольного множества X класс $\mathcal{C}$ вычислимых нумераций называется *X-р.п.*, если существует такая функция $f \leqslant_T X$, что

$$\mathcal{C} = \{\nu_{f(e)} : e \in \mathbb{N}\}.$$

Через $\mathrm{S}(\mathcal{C})$ будем обозначать *индексное множество* класса $\mathcal{C}$, т.е. множество

$$\mathrm{S}(\mathcal{C}) = \{e : \nu_e \in \mathcal{C}\}.$$

Последовательность вычислимых нумераций $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ назовем *вычислимой*, если существует такая общерекурсивная функция f, что

$$\alpha_n = \nu_{f(n)}$$

для всех n.

Множество классов эквивалентности вычислимых нумераций вычислимого семейства $\mathcal{A}$ относительно порядка, заданного отношением сводимости нумераций, образует верхнюю полурешетку, называемую *полурешеткой Роджерса* семейства $\mathcal{A}$. В этой полурешетке наименьшей верхней гранью классов эквивалентности двух нумераций семейства $\mathcal{A}$ является класс эквивалентности их прямой суммы. Очевидно, что класс эквивалентности главной нумерации $\mathcal{A}$ является наибольшим элементом его полурешетки Роджерса.

Для класса $\mathcal{C}$ вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$ через $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ будем обозначать идеал его полурешетки Роджерса, порожденный классами эквивалентности нумераций, принадлежащих $\mathcal{C}$.

Рекурсивно перечислимым снизу числом назовем всякий элемент $\rho \in 2^\omega$, для которого множество

$$\{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \rho\}$$

р.п. Через $\mathcal{L}$ будем обозначать семейство всех р.п. снизу чисел, а через $\mathcal{R}$ — семейство всех случайных по Мартин-Лефу (см., например, [7, 8]) р.п. снизу чисел. Следуя [9], назовем нумерацию α подсемейства $\mathcal{L}$ *вычислимой*, если нумерация

$$x \mapsto \{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \alpha(x)\}$$

вычислима как нумерация семейства р.п. множеств (при произвольном заранее фиксированном эффективном взаимно однозначном соответствии между элементами $2^{<\omega}$ и натуральными числами). В дальнейшем будем отождествлять подсемейства $\mathcal{B}$ семейства $\mathcal{L}$ с семействами

$$\{\{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \tau\} : \tau \in \mathcal{B}\}.$$

Назовем нумерацию ν *фридберговой*, если $\nu(x) \neq \nu(y)$ для любых различных x и y. Из результатов работы [10] вытекает, что семейства $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{E}$ обладают фридберговыми вычислимыми нумерациями, а из результатов работы [11] — что фридберговыми вычислимыми нумерациями обладают семейства $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ (см. также [12, 13]).

3 Результаты

Следующая теорема позволяет получить достаточное условие существования точных пар для идеалов вида $\mathbf{I}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C}$ — класс вычислимых нумераций с $\mathrm{S}(\mathcal{C}) \in \Sigma^0_3$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — семейство р.п. множеств, такое, что для любого $X \in \mathcal{A}$ и для любого конечного $F \subseteq X$ существует бесконечно много $Y \in \mathcal{A}$, для которых $F \subseteq Y$. Тогда если $\mathcal{A}$ обладает фридберговой* *вычислимой нумерацией, то для любой вычислимой последовательности его нумераций*

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots$$

существуют его вычислимые нумерации β_0 и β_1, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(a) $\alpha_n \leqslant \beta_0$ и $\alpha_n \leqslant \beta_1$ для всех n,

(b) для любой вычислимой нумерации γ, такой, что $\gamma \leqslant \beta_0$ и $\gamma \leqslant \beta_1$, существует n, для которого $\gamma \leqslant \alpha_n$.

Доказательство. Зафиксируем фридбергову вычислимую нумерацию δ семейства $\mathcal{A}$ и построим его вычислимые нумерации β_0 и β_1, удовлетворяющие для всех n, e_0 и e_1 следующим требованиям:

$$Q_n : \exists k \forall x\, [\beta_0(c(k,n,x)) = \beta_1(c(k,n,x)) = \alpha_n(x)],$$

$$R_{c(e_0,e_1)} : (\varphi_{e_0} \text{ и } \varphi_{e_1} \text{ всюду определены})\,\&\,\beta_0 \circ \varphi_{e_0} = \beta_1 \circ \varphi_{e_1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists m\, [\beta_0 \circ \varphi_{e_0} \leqslant \alpha_m].$$

Очевидно, что тогда нумерации β_0, β_1 будут искомыми.

Построение

Шаг 0. Полагаем $\beta_{0,0}(x) = \beta_{1,0}(x) = \varnothing$ для всех x и $\psi_{0,0} = \psi_{1,0} = \varnothing$. Частичные функции $\psi_{0,s}$ и $\psi_{1,s}$, $s \in \mathbb{N}$, будут использоваться в построении для выполнения требований $R_{c(e_0,e_1)}$, при этом будет обеспечено, что на каждом его шаге $s+1$ они определяются лишь на конечном числе элементов. На каждом последующем шаге $u > 0$ будем считать, что $\psi_{0,u} = \psi_{0,u-1}$ и $\psi_{1,u} = \psi_{1,u-1}$, если явно не указано обратное. Зафиксируем сильно вычислимые последовательности конечных множеств $\{\alpha_{n,s}(x)\}_{n,x,s\in\mathbb{N}}$ и $\{\delta_s(x)\}_{s,x\in\mathbb{N}}$, такие, что

$$\alpha_{n,s}(x) \subseteq \alpha_{n,s+1}(x),\ \ \delta_s(x) \subseteq \delta_{s+1}(x),$$

$$\alpha_n(x) = \bigcup_t \alpha_{n,t}(x),\ \ \delta(x) = \bigcup_t \delta_t(x)$$

для всех n, s и x.

Шаг $s+1 = 2t+1$. На этих шагах выполняем требования Q_n, $n \in \mathbb{N}$. Для всех $i = 0,1$ и $k,n,x \in \mathbb{N}$, таких, что $c(k,n,x) \notin \operatorname{ran}(l \circ \psi_{i,s})$, полагаем

$$\beta_{i,s+1}(c(k,n,x)) = \alpha_{n,s+1}(x). \tag{1}$$

Шаг $s+1 = 2c(e_0,e_1,t)+2$. На этих шагах выполняем требование $R_{c(e_0,e_1)}$. Если $\psi_{0,s}(e_0,e_1)\uparrow$, $\psi_{1,s}(e_0,e_1)\uparrow$ и существуют числа $y, k_i, n_i, x_i \leqslant s$, где $i = 0,1$, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $n_i > c(e_0,e_1)$,

(ii) $\varphi_{e_i,s}(y)\downarrow = c(k_i,n_i,x_i)$, (поскольку области определения частичных функций $\psi_{i,s}$ и $\varphi_{e_i,s}$ конечны, эти условия проверяются рекурсивно), то зафиксируем один из таких наборов y, k_i, n_i, x_i и выберем такие числа z_0, z_1 и u, что $z_0 \neq z_1$ и

$$\beta_{i,s}(c(k_i, n_i, x_i)) \subseteq \delta_u(z_i), \tag{2}$$

$$z_i \notin \operatorname{ran}(r \circ \psi_{0,s}) \cup \operatorname{ran}(r \circ \psi_{1,s}), \tag{3}$$

(из условий теоремы непосредственно вытекает, что подходящие z_0, z_1 и u существуют) и определим

$$\psi_{i,s+1}(e_0, e_1) = \begin{cases} c(c(k_i, n_i, x_i), z_i), & \text{если } c(k_i, n_i, x_i) \notin \operatorname{ran}(l \circ \psi_{i,s}), \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4}$$

Если же либо одно из значений $\psi_{0,s}(e_0, e_1)$, $\psi_{1,s}(e_0, e_1)$ определено, либо не существует чисел $y, k_i, n_i, x_i \leqslant s$, где $i = 0, 1$, удовлетворяющих условиям (i) и (ii), то полагаем $\psi_{i,s+1} = \psi_{i,s}$.

Для всех $i = 0, 1$ и $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$, для которых $\psi_{i,s}(d_0, d_1)\downarrow$, полагаем

$$\beta_{i,s+1}(l(\psi_{i,s}(d_0, d_1))) = \beta_{i,s}(l(\psi_{i,s}(d_0, d_1))) \cup \delta_s(r(\psi_{i,s}(d_0, d_1))). \tag{5}$$

В конце построения для всех $i = 0, 1$ и $x \in \mathbb{N}$ полагаем $\beta_i(x) = \bigcup_s \beta_{i,s}(x)$.

Покажем, что для каждого n существует лишь конечное число пар k, x, таких, что $\beta_i(c(k, n, x)) \neq \alpha_n(x)$ для некоторого $i = 0, 1$. Зафиксируем произвольные числа e_0, e_1. Проверки (i) и присваивания (4) в построении обеспечивают, что существует лишь конечное число пар k, x, таких, что значения $\beta_i(c(k, n, x))$ при $n = c(e_0, e_1)$ определяются присваиваниями (5). Значит, для всех, за исключением конечного числа, пар k, x значения $\beta_i(c(k, n, x))$ определяются присваиваниями (1) и, следовательно, совпадают с $\alpha_n(x)$. Отсюда следует, что для каждого n требование Q_n выполнено.

Зафиксируем произвольные e_0, e_1 и покажем, что требование $R_{c(e_0,e_1)}$ также выполнено. Предположим, что соблюдается левая часть импликации в требовании $R_{c(e_0,e_1)}$. Если не существует чисел y и k_i, n_i и x_i, где $i = 0, 1$, для которых

$$n_i > c(e_0, e_1) \,\&\, \varphi_{e_i}(y)\downarrow= c(k_i, n_i, x_i),$$

то, поскольку для любого n существует лишь конечное число пар k, x, таких, что $\beta_i(c(k, n, x)) \neq \alpha_n(x)$ для некоторого $i = 0, 1$, имеем

$$\beta_i \circ \varphi_{e_i} \leqslant \bigoplus_{j=0}^{c(e_0,e_1)} \alpha_j \leqslant \alpha_{c(e_0,e_1)}$$

для некоторого $i = 0, 1$. Стало быть, для подходящего $i = 0, 1$ соблюдается $\beta_0 \circ \varphi_{e_0} = \beta_i \circ \varphi_{e_i} \leqslant \alpha_{c(e_0,e_1)}$ и, следовательно, требование $R_{c(e_0,e_1)}$ выполнено. Если же существуют числа y и k_i, n_i, x_i, где $i = 0, 1$, удовлетворяющие на некотором шаге $s + 1 = 2c(e_0, e_1, t) + 2$ (где $s \geqslant y, k_i, n_i, x_i$)

условиям (i) и (ii), то проверки (2), (3) и присваивания (4), (5) обеспечивают, что $\beta_i(\varphi_{e_i}(y)) = \delta(z_i)$ для каждого $i = 0, 1$, причем $z_0 \neq z_1$. Поскольку нумерация δ фридбергова, будем иметь

$$\beta_0(\varphi_{e_0}(y)) = \delta(z_0) \neq \delta(z_1) = \beta_1(\varphi_{e_1}(y)).$$

Отсюда следует, что левая часть импликации в требовании $R_{c(e_0,e_1)}$ не соблюдается. Из полученного противоречия вытекает, что требование $R_{c(e_0,e_1)}$ выполнено. Этим завершается доказательство теоремы. □

Чтобы получить искомое достаточное условие существования точных пар, нам понадобится следующее определение. Назовем семейств р.п. множеств $\mathcal{A}$ *конечно-аппроксимируемым*, если существует такая бинарная частично рекурсивная функция ψ, что для всех n, m и e справедливы следующие импликации:

$$D_n \subseteq W_e \,\&\, W_e \in \mathcal{A} \Rightarrow \psi(n,e)\downarrow \,\&\, D_n \subseteq W_{\psi(n,e)} \subseteq W_e \,\&\, W_{\psi(n,e)} \in \mathcal{A}, \quad (6)$$

$$\psi(n,e)\downarrow \Rightarrow W_{\psi(n,e)} \in \mathcal{A}, \quad (7)$$

$$D_n \subseteq D_m \,\&\, \psi(n,e)\downarrow \,\&\, \psi(m,e)\downarrow \Rightarrow W_{\psi(n,e)} \subseteq W_{\psi(m,e)}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что семейства $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{L}$ конечно-аппроксимируемы. Поскольку любой случайный по Мартин-Лефу элемент 2^ω невычислим и остается таковым после любого изменения его префикса, семейство $\mathcal{R}$ также конечно-аппроксимируемо.

Из следующей теоремы вытекает, что любой Σ^0_3-идеал полурешетки Роджерса вычислимого конечно-аппроксимируемого семейства является вычислимо порожденным.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечно-аппроксимируемое семейство р.п. множеств и $\mathcal{C}$ — непустой класс его вычислимых нумераций с $\mathrm{S}(\mathcal{C}) \in \Sigma^0_3$. Тогда существует вычислимая последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нумераций $\mathcal{A}$, такая, что идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ порождается множеством классов эквивалентности всех ее элементов.*

Доказательство. Пусть ψ — бинарная частично рекурсивная функция, которая вместе с семейством $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям (6)–(8) для всех n, m и e. Поскольку $\mathrm{S}(\mathcal{C}) \in \Sigma^0_3$, существует рекурсивное тернарное отношение R, такое, что

$$e \in \mathrm{S}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \exists^\infty s\, [R(e,t,s)]$$

для всех e. Для каждого s определим конечное множество B_s, положив

$$B_s = \{c(e,t) \leqslant s : e, t \in \mathbb{N} \,\&\, R(e,t,s)\}.$$

Таким образом, $\{B_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ является сильно вычислимой последовательностью и для всех e имеет место равносильность

$$e \in \mathrm{S}(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \exists^\infty s\, [c(e,t) \in B_s].$$

Зафиксируем общерекурсивные функции f и g, такие, что

$$W_{f(e,x)} = \nu_e(x), \;\; D_{g(e,s)} = W_{e,s}$$

для всех e, x и s. (Напомним, что $W_{e,0} = \varnothing$ для всех e.)

Теперь определим вычислимую последовательность $\{\alpha_e^t\}_{t,e\in\mathbb{N}}$ нумераций подсемейств $\mathcal{A}$, такую, что каждая из нумераций класса $\mathcal{C}$ эквивалентна одному из ее элементов и для каждой пары t, e, либо α_e^t нумерует конечное подсемейство $\mathcal{A}$, либо она эквивалентна некоторой нумерации, принадлежащей $\mathcal{C}$. С этой целью зафиксируем некоторое множество $X \in \mathcal{A}$. Выберем произвольные e, t, u, x и определим

$$\alpha_e^t(c(u,x)) = X,$$

если $\psi_u(0, f(e,x))\uparrow$, где ψ_u — часть функции ψ, определенная на аргументах y, z, для которых $c(y,z) < u$, за u шагов работы заранее фиксированной вычисляющей ее машины Тьюринга. Если же $\psi_u(0, f(e,x))\downarrow$, то полагаем $\alpha_e^t(c(u,x))$ равным множеству

$$\bigcup\Big(\{W_{\psi(g(f(e,x),s),f(e,x))} : c(e,t) \in B_s \,\&\, s \geqslant x \,\&\, \psi(g(f(e,x),s), f(e,x))\downarrow\}\cup \\ \cup\{W_{\psi(0,f(e,x))}\}\Big).$$

(Отметим, что $D_0 = \varnothing$).

Покажем, что последовательность $\{\alpha_e^t\}_{t,e\in\mathbb{N}}$ является искомой. Для этого выберем произвольные e и t, такие, что $\exists^\infty s\,[c(e,t) \in B_s]$. Тогда $e \in \mathrm{S}(\mathcal{C})$ и, следовательно, $W_{f(e,x)} \in \mathcal{A}$ для всех x. Стало быть, $\psi(g(f(e,x),v), f(e,x))\downarrow$ и

$$W_{f(e,x),v} \subseteq W_{\psi(g(f(e,x),v),f(e,x))} \subseteq W_{f(e,x)}$$

для всех x и v. Таким образом, для всех u и x выполняется

$$\psi_u(0, f(e,x))\downarrow \Rightarrow \alpha_e^t(c(u,x)) = \bigcup_v W_{\psi(g(f(e,x),v),f(e,x))} =$$
$$= \bigcup_v W_{f(e,x),v} = W_{f(e,x)} = \nu_e(x),$$
$$\psi_u(0, f(e,x))\uparrow \Rightarrow \alpha_e^t(c(u,x)) = X.$$

Отсюда следует, что $\alpha_e^t \equiv \nu_e$.

Если $\forall^\infty s\,[c(e,t) \notin B_s]$, то конъюнкт “$s \geqslant x$” в определении множества $\alpha_e^t(c(u,x))$ при $\psi_u(0, f(e,x))\downarrow$ обеспечивает, что, начиная с некоторого x, будем иметь $\alpha_e^t(x) = W_{\psi(0,f(e,x))}$. Значит α_e^t нумерует конечное подсемейство семейства $\mathcal{A}$.

Теперь выберем какую-нибудь нумерацию $\alpha \in \mathcal{C}$ и для всех n положим

$$\alpha_n = \alpha_{r(n)}^{l(n)} \oplus \alpha.$$

Как показано выше, для всех e и t либо $\alpha_e^t \equiv \nu_e$, либо α_e^t нумерует конечное подсемейство $\mathcal{A}$ и тогда $\alpha \oplus \alpha_e^t \equiv \alpha$. Кроме того, для каждого $e \in \mathrm{S}(\mathcal{C})$ существует t, для которого $\alpha_e^t \equiv \nu_e$. Отсюда следует, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет заключению теоремы. $\square$

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — одно из семейств $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ и пусть $\mathcal{C}$ — непустой класс его вычислимых нумераций с $\mathrm{S}(\mathcal{C}) \in \Sigma^0_3$. Тогда идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ имеет точную пару.*

Доказательство. По теореме 2 существует вычислимая последовательность $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ нумераций семейства $\mathcal{A}$, такая, что идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ порождается множеством классов эквивалентности всех ее элементов. Для каждого n определим вычислимую нумерацию α_n семейства $\mathcal{A}$, положив

$$\alpha_n = \bigoplus_{m\leqslant n} \gamma_m.$$

Пусть β_0, β_1 — вычислимые нумерации семейства $\mathcal{A}$, удовлетворяющие вместе с последовательностью

$$\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots$$

условиям (a) и (b) формулировки теоремы 1. Тогда пара $[\beta_0]$, $[\beta_1]$ будет точной для идеала $\mathbf{I}(\mathcal{C})$. □

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — одно из семейств $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{E}$ и пусть $\mathcal{D}$ — $\varnothing''$-р.п. класс вычислимых нумераций его подсемейств, не содержащий его главных нумераций. Тогда $\mathcal{A}$ обладает такой вычислимой неглавной нумерацией β, что $\alpha \leqslant \beta$ для всех $\alpha \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную вычислимую неглавную нумерацию α семейства $\mathcal{A}$ и рассмотрим класс

$$\mathcal{C} = \{\alpha \oplus \beta : \beta \in \mathcal{D}\}.$$

Поскольку никакая главная нумерация семейства $\mathcal{A}$ не эквивалентна прямой сумме вычислимых нумераций, не являющихся главными нумерациями $\mathcal{A}$, получаем, что класс $\mathcal{C}$ не содержит его главных нумераций. Таким образом $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ является собственным идеалом полурешетки Роджерса $\mathcal{A}$. Ввиду того, что $\mathcal{D}$ является $\varnothing''$-р.п., имеем $\mathrm{S}(\mathcal{C}) \in \Sigma^0_3$. Стало быть, идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ обладает точной парой, в которой по крайней мере один элемент не является классом эквивалентности главной нумерации $\mathcal{A}$. Отсюда следует, что $\mathcal{A}$ обладает нумерацией β, удовлетворяющей заключению теоремы. □

Следствие 2 может уже не быть верным в случае $\mathrm{S}(\mathcal{D}) \in \Pi^0_3$. В самом деле, согласно теореме А.Б. Хуторецкого [14] для любой вычислимой неглавной нумерации α произвольного семейства $\mathcal{B}$ существует его вычислимая неглавная нумерация $\gamma > \alpha$. Отсюда следует, что если класс $\mathcal{D}$ состоит из всевозможных неглавных вычислимых нумераций подсемейств семейства $\mathcal{P}_1$ или $\mathcal{E}$ (нетрудно видеть, что тогда $\mathrm{S}(\mathcal{D}) \in \Pi^0_3$), то он не имеет вычислимых неглавных верхних границ.

References

[1] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, Moscow, 1977.

[2] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, in Griffor, Edward R. (ed.), *Handbook of computability theory*, Elsevier. Stud. Logic Found. Math., 140, Elsevier, Amsterdam, 1999, 473–503. Zbl 0948.03040.

[3] J.S. Royer, *A connotational theory of program structure*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1987. Zbl 0625.68018 .

[4] A.H. Lachlan, *A note on universal sets*, J. Symb. Log., **31**:4 (1966), 573–574. Zbl 0239.02021.

[5] A.B. Khutoretskii, *On nonprincipal enumerations*, Algebra Logic, **8**:6 (1969), 412–415. Zbl 0259.02030.

[6] R.I. Soare, *Turing computability. Theory and applications*, Springer, Berlin, 2016. Zbl 1350.03001.

[7] R.G. Downey, D.R. Hirschfeldt, *Algorithmic randomness and complexity*, Springer, New York, 2010. Zbl 1221.68005.

[8] A. Shen, V.A. Uspensky, N.K. Vereshchagin. *Kolmogorov complexity and algorithmic randomness*, American Mathematical Society, 2017.

[9] F. Stephan, J. Teutsch, *Things that can be made into themselves*, Inf. Comput., **237** (2014), 174–186. Zbl 1336.03049.

[10] R.M. Friedberg, *Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication*, J. Symb. Log., **23**:3 (1958), 309–316. Zbl 0088.01601.

[11] P. Brodhead, B. Kjos-Hanssen, *Numberings and randomness*, in Ambos-Spies, K., Löwe, B., Merkle, W. (eds) Mathematical Theory and Computational Practice. CiE 2009. *Lecture notes in computer science*, vol 5635, pages 49–58, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. Zbl 1268.03057.

[12] I. Herbert, S. Jain, S. Lempp, M. Mustafa, F. Stephan, *Reductions between types of numberings*, Ann. Pure App. Logic, **170**:12 (2019), 102716. Zbl 1439.03077.

[13] M.Kh. Faizrahmanov, Z.K. Shchedrikova, *Effectively infinite classes of numberings and computable families of reals*, Computability, **12**:4 (2023), 339–350. Zbl 1543.03072.

[14] A.B. Khutoretskii, *On the cardinality of the upper semilattice of computable enumerations*, Algebra Logic, **10**:5 (1971), 348–352. Zbl 0298.02035.

Zlata Konstantinovna Shchedrikova
Innopolis University,
1, Universitetskaya Str.,
420500 Innopolis, Russia
Email address: zlata.shchedrikova@yandex.ru