

ТОЧНЫЕ ПАРЫ ДЛЯ АРИФМЕТИЧЕСКИХ
ИДЕАЛОВ ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСАЗ.К. ЩЕДРИКОВА *Представлено П.П. ПЕТРОВЫМ*

Abstract: In this paper we study the question of the existence of exact pairs for ideals in upper semilattices of computable numberings and prove that all proper Σ_3^0 -ideals in the semilattices of computable numberings of the families of all partial recursive functions, r.e. sets, left-r.e. reals, and Martin-Löf random left-r.e. reals have exact pairs.

Keywords: computable numbering, Rogers semilattice, ideal, exact pair, left-r.e. real.

1 Введение

В статье изучается вопрос о существовании точных пар для идеалов полурешеток Роджерса (верхних полурешеток вычислимых нумераций) семейств рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств и частично рекурсивных функций, т.е. таких пар их элементов \mathbf{a} , \mathbf{b} , что идеал состоит в точности из элементов \mathbf{x} , для которых $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}$ и $\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ (все используемые в статье сведения из теории нумераций содержатся в монографии Ю.Л. Ершова [1] и его статье [2]). Эти исследования мотивированы

SHCHEDRIKOVA, Z.K., EXACT PAIRS FOR ARITHMETICAL IDEALS IN THE ROGERS SEMILATTICES.

© 2026 ЩЕДРИКОВА З.К..

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00227.

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

вопросом, сформулированным в [3, §2.2]: верно ли, что всякий \emptyset'' -р.п. класс вычислимых нумераций подсемейств семейства \mathcal{P}_1 всех унарных частично рекурсивных функций, не содержащий его главной нумерации, имеет неглавную верхнюю границу (относительно сводимости нумераций).

Согласно результату работы [4], если сочленение $A \oplus B$ р.п. множеств A и B креативно, то одно из этих множеств само является креативным. Из результатов работ [1, 5] следует, что подобное утверждение справедливо также для вычислимых нумераций семейств \mathcal{P}_1 всех унарных частично рекурсивных функций и \mathcal{E} всех р.п. множеств: если прямая сумма $\alpha \oplus \beta$ их нумераций α и β главная, то одна из этих нумераций сама является главной. В работе [3] был получен бесконечный аналог этого результата. А именно, в теореме 2.1.7 процитированной работы было установлено, что всякий \emptyset' -р.п. класс вычислимых нумераций подсемейств семейства \mathcal{P}_1 , не содержащий его главной нумерации, имеет неглавную верхнюю границу.

В настоящей статье устанавливается, что всякий собственный Σ_3^0 -идеал полурешетки Роджерса каждого из семейств \mathcal{P}_1 и \mathcal{E} обладает точной парой. Отсюда, в частности, следует, что заключение теоремы 2.1.7 [3] остается справедливым и для \emptyset'' -р.п. классов вычислимых нумераций (см. следствие 2). Помимо этого устанавливается, что собственные Σ_3^0 -идеалы полурешеток Роджерса семейств \mathcal{L} и \mathcal{R} , состоящих из всех р.п. снизу и всех случайных по Мартин-Лефу р.п. снизу вещественных чисел соответственно, обладают точными парами.

В обозначениях и терминологии теории рекурсии мы в основном придерживаемся монографии Р.И. Соара [6]. Так через φ_e и W_e мы обозначаем частично рекурсивную функцию и р.п. множество с геделевскими номерами e соответственно. Через $\varphi_{e,s}$ будем обозначать частичную функцию, определенную только на аргументах меньших s за s шагов работы вычисляющей ее машины Тьюринга. Для произвольной частичной функции ψ область ее определения обозначается как $\text{dom } \psi$, а область ее значений — как $\text{ran } \psi$. Для натурального x пишем $\psi(x) \downarrow$, если $x \in \text{dom } \psi$, и $\psi(x) \uparrow$ в противном случае. Положим $W_{e,s} = \text{dom } \varphi_{e,s}$.

Через $c(x, y)$ будем обозначать стандартную общерекурсивную биекцию $2^x(2y + 1) - 1$, отображающую $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на \mathbb{N} . Вместо $c(c(x, y), z)$ будем просто писать $c(x, y, z)$. Пусть l и r — общерекурсивные функции, такие, что $l(c(x, y)) = x$ и $r(c(x, y)) = y$ для всех x и y .

Через D_e будем обозначать конечное множество с каноническим индексом e . Последовательность конечных множеств назовем *сильно вычислимой*, если канонический индекс каждого ее элемента определяется равномерно по его номеру.

Запись $\exists^\infty x [\dots]$ означает “существует бесконечно много x , таких, что”. Двойственный квантор “для почти всех x ”, т.е. $\exists x_0 \forall x \geq x_0 [\dots]$, обозначается через $\forall^\infty x [\dots]$.

Множество всех конечных и бесконечных строк, состоящих из 0 и 1, будем обозначать через $2^{<\omega}$ и 2^ω соответственно. Для строк $\sigma \in 2^{<\omega}$ и $\tau \in 2^{<\omega} \cup 2^\omega$ будем писать $\sigma \leq_L \tau$, если либо σ является началом τ , либо $\sigma(n) = 0$ и $\tau(n) = 1$, где n — наименьшее число, для которого $\sigma(n) \neq \tau(n)$. Если $\sigma \neq \tau$, то вместо $\sigma \leq_L \tau$ будем писать $\sigma <_L \tau$.

2 Предварительные сведения

Нумерацией непустого не более чем счетного множества S будем называть любую сюръекцию $\nu : \mathbb{N} \rightarrow S$. Скажем, что нумерация μ *сводима* к нумерации ν (в этом случае используется обозначение $\mu \leq \nu$), если существует такая общерекурсивная функция f , что $\mu(x) = \nu(f(x))$ для всех x . Нумерации μ и ν называются *эквивалентными* (в этом случае используется запись $\mu \equiv \nu$), если $\mu \leq \nu$ и $\nu \leq \mu$. Класс \equiv -эквивалентности нумерации ν будем обозначать через $[\nu]$. *Прямой суммой* нумераций ν_0 и ν_1 называется нумерация $\nu_0 \oplus \nu_1$, определенная для всех $x \in \mathbb{N}$ и $i = 0, 1$ следующим образом:

$$(\nu_0 \oplus \nu_1)(2x + i) = \nu_i(x).$$

Нумерацию α семейства р.п. множеств \mathcal{A} назовем *вычислимой*, если множество

$$G_\alpha = \{c(x, y) : y \in \alpha(x)\}$$

р.п. Семейства, обладающие вычислимыми нумерациями, также будем называть *вычислимыми*. Назовем вычислимой нумерацию ν семейства \mathcal{A} *главной*, если к ней сводима любая его вычисляемая нумерация. Будем говорить, что нумерация β семейства унарных частично рекурсивных функций \mathcal{B} *вычислима*, если нумерация $x \mapsto \Gamma_{\beta_x}$, где

$$\Gamma_\psi = \{c(x, y) : \psi(x) \downarrow = y\}$$

для произвольной частичной функции $\psi \in \mathcal{P}_1$, вычислима как нумерация семейства р.п. множеств. В дальнейшем будем отождествлять элементы $\psi \in \mathcal{P}_1$ с р.п. множествами Γ_ψ . Для каждого натурального e через ν_e будем обозначать вычислимую нумерацию

$$\nu_e : x \mapsto \{y : c(x, y) \in W_e\}.$$

Очевидно, что для каждой вычислимой нумерации α существует такое e , что $\alpha = \nu_e$.

Для произвольного множества X класс \mathcal{C} вычисляемых нумераций называется *X-р.н.*, если существует такая функция $f \leq_T X$, что

$$\mathcal{C} = \{\nu_{f(e)} : e \in \mathbb{N}\}.$$

Через $S(\mathcal{C})$ будем обозначать *индексное множество* класса \mathcal{C} , т.е. множество

$$S(\mathcal{C}) = \{e : \nu_e \in \mathcal{C}\}.$$

Последовательность вычислимых нумераций $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ назовем *вычислимой*, если существует такая общерекурсивная функция f , что

$$\alpha_n = \nu_{f(n)}$$

для всех n .

Множество классов эквивалентности вычислимых нумераций вычислимого семейства \mathcal{A} относительно порядка, заданного отношением сводимости нумераций, образует верхнюю полурешетку, называемую *полурешеткой Роджерса* семейства \mathcal{A} . В этой полурешетке наименьшей верхней гранью классов эквивалентности двух нумераций семейства \mathcal{A} является класс эквивалентности их прямой суммы. Очевидно, что класс эквивалентности главной нумерации \mathcal{A} является наибольшим элементом его полурешетки Роджерса.

Для класса \mathcal{C} вычислимых нумераций семейства \mathcal{A} через $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ будем обозначать идеал его полурешетки Роджерса, порожденный классами эквивалентности нумераций, принадлежащих \mathcal{C} .

Рекурсивно перечислимым снизу числом назовем всякий элемент $\rho \in 2^\omega$, для которого множество

$$\{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \rho\}$$

р.п. Через \mathcal{L} будем обозначать семейство всех р.п. снизу чисел, а через \mathcal{R} — семейство всех случайных по Мартин-Лефу (см., например, [7, 8]) р.п. снизу чисел. Следуя [9], назовем нумерацию α подсемейства \mathcal{L} *вычислимой*, если нумерация

$$x \mapsto \{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \alpha(x)\}$$

вычислима как нумерация семейства р.п. множеств (при произвольном заранее фиксированном эффективном взаимно однозначном соответствии между элементами $2^{<\omega}$ и натуральными числами). В дальнейшем будем отождествлять подсемейства \mathcal{B} семейства \mathcal{L} с семействами

$$\{\{\sigma \in 2^{<\omega} : \sigma <_L \tau\} : \tau \in \mathcal{B}\}.$$

Назовем нумерацию ν *фридберговой*, если $\nu(x) \neq \nu(y)$ для любых различных x и y . Из результатов работы [10] вытекает, что семейства \mathcal{P}_1 и \mathcal{E} обладают фридберговыми вычислимыми нумерациями, а из результатов работы [11] — что фридберговыми вычислимыми нумерациями обладают семейства \mathcal{L} и \mathcal{R} (см. также [12, 13]).

3 Результаты

Следующая теорема позволяет получить достаточное условие существования точных пар для идеалов вида $\mathbf{I}(\mathcal{C})$, где \mathcal{C} — класс вычислимых нумераций с $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$.

Теорема 1. *Пусть \mathcal{A} — семейство р.п. множеств, такое, что для любого $X \in \mathcal{A}$ и для любого конечного $F \subseteq X$ существует бесконечно много $Y \in \mathcal{A}$, для которых $F \subseteq Y$. Тогда если \mathcal{A} обладает фридберговой*

вычислимой нумерацией, то для любой вычислимой последовательности его нумераций

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$$

существуют его вычислимые нумерации β_0 и β_1 , удовлетворяющие следующим двум условиям:

(а) $\alpha_n \leq \beta_0$ и $\alpha_n \leq \beta_1$ для всех n ,

(б) для любой вычислимой нумерации γ , такой, что $\gamma \leq \beta_0$ и $\gamma \leq \beta_1$, существует n , для которого $\gamma \leq \alpha_n$.

Доказательство. Зафиксируем фридбергову вычислимую нумерацию δ семейства \mathcal{A} и построим его вычислимые нумерации β_0 и β_1 , удовлетворяющие для всех n , e_0 и e_1 следующим требованиям:

$$\begin{aligned} Q_n : \exists k \forall x [\beta_0(c(k, n, x)) = \beta_1(c(k, n, x)) = \alpha_n(x)], \\ R_{c(e_0, e_1)} : (\varphi_{e_0} \text{ и } \varphi_{e_1} \text{ всюду определены}) \& \beta_0 \circ \varphi_{e_0} = \beta_1 \circ \varphi_{e_1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists m [\beta_0 \circ \varphi_{e_0} \leq \alpha_m]. \end{aligned}$$

Очевидно, что тогда нумерации β_0 , β_1 будут искомыми.

Построение

Шаг 0. Полагаем $\beta_{0,0}(x) = \beta_{1,0}(x) = \emptyset$ для всех x и $\psi_{0,0} = \psi_{1,0} = \emptyset$. Частичные функции ψ_0 и ψ_1 будут использоваться в построении для выполнения требований $R_{c(e_0, e_1)}$, при этом будет обеспечено, что на каждом его шаге $s+1$ они определяются лишь на конечном числе элементов. На каждом последующем шаге $u > 0$ будем считать, что $\psi_{0,u} = \psi_{0,u-1}$ и $\psi_{1,u} = \psi_{1,u-1}$, если явно не указано обратное. Зафиксируем сильно вычислимые последовательности конечных множеств $\{\alpha_{n,s}(x)\}_{n,x,s \in \mathbb{N}}$ и $\{\delta_s(x)\}_{s,x \in \mathbb{N}}$, такие, что

$$\begin{aligned} \alpha_{n,s}(x) \subseteq \alpha_{n,s+1}(x), \quad \delta_s(x) \subseteq \delta_{s+1}(x), \\ \alpha_n(x) = \bigcup_t \alpha_{n,t}(x), \quad \delta(x) = \bigcup_t \delta_t(x) \end{aligned}$$

для всех n , s и x .

Шаг $s+1 = 2t+1$. На этих шагах выполняем требования Q_n , $n \in \mathbb{N}$. Для всех $i = 0, 1$ и $k, n, x \in \mathbb{N}$, таких, что $c(k, n, x) \notin \text{ran}(l \circ \psi_{i,s})$, полагаем

$$\beta_{i,s+1}(c(k, n, x)) = \alpha_{n,s+1}(x). \quad (1)$$

Шаг $s+1 = 2c(e_0, e_1, t)+2$. На этих шагах выполняем требование $R_{c(e_0, e_1)}$. Если $\psi_{0,s}(e_0, e_1) \uparrow$, $\psi_{1,s}(e_0, e_1) \uparrow$ и существуют числа $y, k_i, n_i, x_i \leq s$, где $i = 0, 1$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (i) $n_i > c(e_0, e_1)$,
- (ii) $\varphi_{e_i, s}(y) \downarrow = c(k_i, n_i, x_i)$,

(поскольку области определения частичных функций $\psi_{i,s}$ и $\varphi_{e_i,s}$ конечны, эти условия проверяются рекурсивно), то зафиксируем один из таких наборов y, k_i, n_i, x_i и выберем такие числа z_0, z_1 и u , что $z_0 \neq z_1$ и

$$\beta_{i,s}(c(k_i, n_i, x_i)) \subseteq \delta_u(z_i), \quad (2)$$

$$z_i \notin \text{ran}(r \circ \psi_{0,s}) \cup \text{ran}(r \circ \psi_{1,s}), \quad (3)$$

(из условий теоремы непосредственно вытекает, что подходящие z_0, z_1 и u существуют) и определим

$$\psi_{i,s+1}(e_0, e_1) = \begin{cases} c(c(k_i, n_i, x_i), z_i), & \text{если } c(k_i, n_i, x_i) \notin \text{ran}(l \circ \psi_{i,s}), \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (4)$$

Если же либо одно из значений $\psi_{0,s}(e_0, e_1), \psi_{1,s}(e_0, e_1)$ определено, либо не существует чисел $y, k_i, n_i, x_i \leq s$, где $i = 0, 1$, удовлетворяющих условиям (i) и (ii), то полагаем $\psi_{i,s+1} = \psi_{i,s}$.

Для всех $i = 0, 1$ и $d_0, d_1 \in \mathbb{N}$, для которых $\psi_{i,s}(d_0, d_1) \downarrow$, полагаем

$$\beta_{i,s+1}(l(\psi_{i,s}(d_0, d_1))) = \beta_{i,s}(l(\psi_{i,s}(d_0, d_1))) \cup \delta_s(r(\psi_{i,s}(d_0, d_1))). \quad (5)$$

В конце построения для всех $i = 0, 1$ и $x \in \mathbb{N}$ полагаем $\beta_i(x) = \bigcup_s \beta_{i,s}(x)$.

Покажем, что для каждого n существует лишь конечное число пар k, x , таких, что $\beta_i(c(k, n, x)) \neq \alpha_n(x)$ для некоторого $i = 0, 1$. Зафиксируем произвольные числа e_0, e_1 . Проверки (i) и присваивания (4) в построении обеспечивают, что существует лишь конечное число пар k, x , таких, что значения $\beta_i(c(k, n, x))$ при $n = c(e_0, e_1)$ определяются присваиваниями (5). Значит для всех, за исключением конечного числа, пар k, x значения $\beta_i(c(k, n, x))$ определяются присваиваниями (1) и, следовательно, совпадают с $\alpha_n(x)$. Отсюда следует, что для каждого n требование Q_n выполнено.

Зафиксируем произвольные e_0, e_1 и покажем, что требование $R_{c(e_0, e_1)}$ также выполнено. Предположим, что соблюдается левая часть импликации в требовании $R_{c(e_0, e_1)}$. Если не существует чисел y и k_i, n_i и x_i , где $i = 0, 1$, для которых

$$n_i > c(e_0, e_1) \ \& \ \varphi_{e_i}(y) \downarrow = c(k_i, n_i, x_i),$$

то, поскольку для любого n существует лишь конечное число пар k, x , таких, что $\beta_i(c(k, n, x)) \neq \alpha_n(x)$ для некоторого $i = 0, 1$, имеем

$$\beta_i \circ \varphi_{e_i} \leq \bigoplus_{j=0}^{c(e_0, e_1)} \alpha_j \leq \alpha_{c(e_0, e_1)}$$

для некоторого $i = 0, 1$. Стало быть, для подходящего $i = 0, 1$ соблюдается $\beta_0 \circ \varphi_{e_0} = \beta_i \circ \varphi_{e_i} \leq \alpha_{c(e_0, e_1)}$ и, следовательно, требование $R_{c(e_0, e_1)}$ выполнено. Если же существуют числа y и k_i, n_i, x_i , где $i = 0, 1$, удовлетворяющие на некотором шаге $s+1 = 2c(e_0, e_1, t) + 2$ (где $s \geq y, k_i, n_i, x_i$)

условиям (i) и (ii), то проверки (2), (3) и присваивания (4), (5) обеспечивают, что $\beta_i(\varphi_{e_i}(y)) = \delta(z_i)$ для каждого $i = 0, 1$, причем $z_0 \neq z_1$. Поскольку нумерация δ фридбергова, будем иметь

$$\beta_0(\varphi_{e_0}(y)) = \delta(z_0) \neq \delta(z_1) = \beta_1(\varphi_{e_1}(y)).$$

Отсюда следует, что левая часть импликации в требовании $R_{c(e_0, e_1)}$ не соблюдается. Из полученного противоречия вытекает, что требование $R_{c(e_0, e_1)}$ выполнено. Этим завершается доказательство теоремы. \square

Чтобы получить искомое достаточное условие существования точных пар, нам понадобится следующее определение. Назовем семейств р.п. множеств \mathcal{A} *конечно-аппроксимируемым*, если существует такая бинарная частично рекурсивная функция ψ , что для всех n, m и e справедливы следующие импликации:

$$D_n \subseteq W_e \ \& \ W_e \in \mathcal{A} \Rightarrow \psi(n, e) \downarrow \ \& \ D_n \subseteq W_{\psi(n, e)} \subseteq W_e \ \& \ W_{\psi(n, e)} \in \mathcal{A}, \quad (6)$$

$$\psi(n, e) \downarrow \Rightarrow W_{\psi(n, e)} \in \mathcal{A}, \quad (7)$$

$$D_n \subseteq D_m \ \& \ \psi(n, e) \downarrow \ \& \ \psi(m, e) \downarrow \Rightarrow W_{\psi(n, e)} \subseteq W_{\psi(m, e)}. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что семейства \mathcal{P}_1 , \mathcal{E} и \mathcal{L} конечно-аппроксимируемы. Поскольку любой случайный по Мартин-Лефу элемент 2^ω невычислим и остается таковым после любого изменения его префикса, семейство \mathcal{R} также конечно-аппроксимируемо.

Из следующей теоремы вытекает, что любой Σ_3^0 -идеал полурешетки Роджерса вычислимого конечно-аппроксимируемого семейства является вычислимо порожденным.

Теорема 2. Пусть \mathcal{A} — конечно-аппроксимируемое семейство р.п. множеств и \mathcal{C} — непустой класс его вычисляемых нумераций с $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$. Тогда существует вычисляемая последовательность $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ нумераций \mathcal{A} , такая, что идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ порождается множеством классов эквивалентности всех ее элементов.

Доказательство. Пусть ψ — бинарная частично рекурсивная функция, которая вместе с семейством \mathcal{A} удовлетворяет условиям (6)–(8) для всех n, m и e . Поскольку $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$, существует рекурсивное тернарное отношение R , такое, что

$$e \in S(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \exists^\infty s [R(e, t, s)]$$

для всех e . Для каждого s определим конечное множество B_s , положив

$$B_s = \{c(e, t) \leq s : e, t \in \mathbb{N} \ \& \ R(e, t, s)\}.$$

Таким образом, $\{B_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ является сильно вычисляемой последовательностью и для всех e имеет место равносильность

$$e \in S(\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists t \exists^\infty s [c(e, t) \in B_s].$$

Зафиксируем общерекурсивные функции f и g , такие, что

$$W_{f(e, x)} = \nu_e(x), \quad D_{g(e, s)} = W_{e, s}$$

для всех e , x и s . (Напомним, что $W_{e,0} = \emptyset$ для всех e .)

Теперь определим вычислимую последовательность $\{\alpha_e^t\}_{t,e \in \mathbb{N}}$ нумераций подсемейств \mathcal{A} , такую, что каждая из нумераций класса \mathcal{C} эквивалентна одному из ее элементов и для каждой пары t, e , либо α_e^t нумерует конечное подсемейство \mathcal{A} , либо она эквивалентна некоторой нумерации, принадлежащей \mathcal{C} . С этой целью зафиксируем некоторое множество $X \in \mathcal{A}$. Выберем произвольные e, t, u, x и определим

$$\alpha_e^t(c(u, x)) = X,$$

если $\psi_u(0, f(e, x)) \uparrow$, где ψ_u — часть функции ψ , определенная на аргументах y, z , для которых $c(y, z) < u$, за u шагов работы заранее фиксированной вычисляющей ее машины Тьюринга. Если же $\psi_u(0, f(e, x)) \downarrow$, то полагаем $\alpha_e^t(c(u, x))$ равным множеству

$$\bigcup \left(\{W_{\psi(g(f(e,x),s),f(e,x))} : c(e,t) \in B_s \& s \geq x \& \psi(g(f(e,x),s),f(e,x)) \downarrow\} \cup \{W_{\psi(0,f(e,x))}\} \right).$$

(Отметим, что $D_0 = \emptyset$).

Покажем, что последовательность $\{\alpha_e^t\}_{t,e \in \mathbb{N}}$ является искомой. Для этого выберем произвольные e и t , такие, что $\exists^\infty s [c(e,t) \in B_s]$. Тогда $e \in S(\mathcal{C})$ и, следовательно, $W_{f(e,x)} \in \mathcal{A}$ для всех x . Стало быть, $\psi(g(f(e,x),v),f(e,x)) \downarrow$ и

$$W_{f(e,x),v} \subseteq W_{\psi(g(f(e,x),v),f(e,x))} \subseteq W_{f(e,x)}$$

для всех x и v . Таким образом, для всех u и x выполняется

$$\begin{aligned} \psi_u(0, f(e, x)) \downarrow &\Rightarrow \alpha_e^t(c(u, x)) = \bigcup_v W_{\psi(g(f(e,x),v),f(e,x))} = \\ &= \bigcup_v W_{f(e,x),v} = W_{f(e,x)} = \nu_e(x), \\ \psi_u(0, f(e, x)) \uparrow &\Rightarrow \alpha_e^t(c(u, x)) = X. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\alpha_e^t \equiv \nu_e$.

Если $\forall^\infty s [c(e,t) \notin B_s]$, то конъюнкт “ $s \geq x$ ” в определении множества $\alpha_e^t(c(u, x))$ при $\psi_u(0, f(e, x)) \downarrow$ обеспечивает, что, начиная с некоторого x , будем иметь $\alpha_e^t(x) = W_{\psi(0,f(e,x))}$. Значит α_e^t нумерует конечное подсемейство семейства \mathcal{A} .

Теперь выберем какую-нибудь нумерацию $\alpha \in \mathcal{C}$ и для всех n положим

$$\alpha_n = \alpha_{r(n)}^{l(n)} \oplus \alpha.$$

Как показано выше, для всех e и t либо $\alpha_e^t \equiv \nu_e$, либо α_e^t нумерует конечное подсемейство \mathcal{A} и тогда $\alpha \oplus \alpha_e^t \equiv \alpha$. Кроме того, для каждого $e \in S(\mathcal{C})$ существует t , для которого $\alpha_e^t \equiv \nu_e$. Отсюда следует, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет заключению теоремы. \square

Следствие 1. Пусть \mathcal{A} — одно из семейств $\mathcal{P}_1, \mathcal{E}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ и пусть \mathcal{C} — непустой класс его вычислимых нумераций с $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$. Тогда идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ имеет точную пару.

Доказательство. По теореме 2 существует вычислимая последовательность $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ нумераций семейства \mathcal{A} , такая, что идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ порождается множеством классов эквивалентности всех ее элементов. Для каждого n определим вычислимую нумерацию α_n семейства \mathcal{A} , положив

$$\alpha_n = \bigoplus_{m \leq n} \gamma_m.$$

Пусть β_0, β_1 — вычислимые нумерации семейства \mathcal{A} , удовлетворяющие вместе с последовательностью

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$$

условиям (а) и (б) формулировки теоремы 1. Тогда пара $[\beta_0], [\beta_1]$ будет точной для идеала $\mathbf{I}(\mathcal{C})$. \square

Следствие 2. Пусть \mathcal{A} — одно из семейств $\mathcal{P}_1, \mathcal{E}$ и пусть \mathcal{D} — \emptyset'' -р.п. класс вычислимых нумераций его подсемейств, не содержащий его главных нумераций. Тогда \mathcal{A} обладает такой вычислимой неглавной нумерацией β , что $\alpha \leq \beta$ для всех $\alpha \in \mathcal{D}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную вычислимую неглавную нумерацию α семейства \mathcal{A} и рассмотрим класс

$$\mathcal{C} = \{\alpha \oplus \beta : \beta \in \mathcal{D}\}.$$

Поскольку никакая главная нумерация семейства \mathcal{A} не эквивалентна прямой сумме вычислимых нумераций, не являющихся главными нумерациями \mathcal{A} , получаем, что класс \mathcal{C} не содержит его главных нумераций. Таким образом $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ является собственным идеалом полурешетки Роджерса \mathcal{A} . Ввиду того, что \mathcal{D} является \emptyset'' -р.п., имеем $S(\mathcal{C}) \in \Sigma_3^0$. Стало быть, идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ обладает точной парой, в которой по крайней мере один элемент не является классом эквивалентности главной нумерации \mathcal{A} . Отсюда следует, что \mathcal{A} обладает нумерацией β , удовлетворяющей заключению теоремы. \square

Следствие 2 может уже не быть верным в случае $S(\mathcal{D}) \in \Pi_3^0$. В самом деле, согласно теореме А.Б. Хуторецкого [14] для любой вычислимой неглавной нумерации α произвольного семейства \mathcal{B} существует его вычислимая неглавная нумерация $\gamma > \alpha$. Отсюда следует, что если класс \mathcal{D} состоит из всевозможных неглавных вычислимых нумераций подсемейств семейства \mathcal{P}_1 или \mathcal{E} (нетрудно видеть, что тогда $S(\mathcal{D}) \in \Pi_3^0$), то он не имеет вычислимых неглавных верхних границ.

References

- [1] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, Nauka, Moscow, 1977.
- [2] Yu.L. Ershov, *Theory of numberings*, in Griffor, Edward R. (ed.), *Handbook of computability theory*, Elsevier. Stud. Logic Found. Math., 140, Elsevier, Amsterdam, 1999, 473–503. Zbl 0948.03040.
- [3] J.S. Royer, *A connotational theory of program structure*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1987. Zbl 0625.68018 .
- [4] A.H. Lachlan, *A note on universal sets*, J. Symb. Log., **31**:4 (1966), 573–574. Zbl 0239.02021.
- [5] A.B. Khutoretskii, *On nonprincipal enumerations*, Algebra Logic, **8**:6 (1969), 412–415. Zbl 0259.02030.
- [6] R.I. Soare, *Turing computability. Theory and applications*, Springer, Berlin, 2016. Zbl 1350.03001.
- [7] R.G. Downey, D.R. Hirschfeldt, *Algorithmic randomness and complexity*, Springer, New York, 2010. Zbl 1221.68005.
- [8] A. Shen, V.A. Uspensky, N.K. Vereshchagin. *Kolmogorov complexity and algorithmic randomness*, American Mathematical Society, 2017.
- [9] F. Stephan, J. Teutsch, *Things that can be made into themselves*, Inf. Comput., **237** (2014), 174–186. Zbl 1336.03049.
- [10] R.M. Friedberg, *Three theorems on recursive enumeration. I. Decomposition. II. Maximal set. III. Enumeration without duplication*, J. Symb. Log., **23**:3 (1958), 309–316. Zbl 0088.01601.
- [11] P. Brodhead, B. Kjos-Hanssen, *Numberings and randomness*, in Ambos-Spies, K., Löwe, B., Merkle, W. (eds) *Mathematical Theory and Computational Practice. CiE 2009. Lecture notes in computer science*, vol 5635, pages 49–58, Springer, Berlin, Heidelberg, 2009. Zbl 1268.03057.
- [12] I. Herbert, S. Jain, S. Lempp, M. Mustafa, F. Stephan, *Reductions between types of numberings*, Ann. Pure App. Logic, **170**:12 (2019), 102716. Zbl 1439.03077.
- [13] M.Kh. Faizrahmanov, Z.K. Shchedrikova, *Effectively infinite classes of numberings and computable families of reals*, Computability, **12**:4 (2023), 339–350. Zbl 1543.03072.
- [14] A.B. Khutoretskii, *On the cardinality of the upper semilattice of computable enumerations*, Algebra Logic, **10**:5 (1971), 348–352. Zbl 0298.02035.

ZLATA KONSTANTINOVNA SHCHEDRIKOVA
 INNOPOLIS UNIVERSITY,
 1, UNIVERSITETSKAYA STR.,
 420500 INNOPOLIS, RUSSIA
 Email address: zlata.shchedrikova@yandex.ru