РЕЦЕНЗИЯ
на статью «Точные пары для арифметических идеалов полурешеток Роджерса»

Рецензируемая работа посвящена исследованию полурешёток Роджерса. Такая полурешётка представляет собой множество классов эквивалентности нумераций некоторого семейства рекурсивно перечислимых (р. п.) множеств или частично рекурсивных функций, упорядоченных отношением сводимости $\leqslant$. Теория нумераций является одним из основных разделов теории вычислимости, получено большое количество результатов о строении таких полурешёток. Например, известно, что в классе всех р. п. множеств существуют главные нумерации, что в общем случае полурешётка Роджерса не является нижней полурешёткой и т. п. Значительный интерес представляет исследование строения идеалов полурешёток Роджерса. Простейшим типом идеалов являются главные идеалы, состоящие из всех элементов x таких, что $x \leqslant a$ для некоторого фиксированного a. Это понятие допускает обобщение: пара a, b называется точной для идеала I, если I состоит в точности из тех элементов x полурешётки, для которых одновременно $x \leqslant a$ и $x \leqslant b$. В рецензируемой работе найден широкий класс идеалов, для которых существуют точные пары.

Работа состоит из аннотации, трёх основных разделов и списка литературы, насчитывающего 14 наименований. Общий объём работы составляет 10 страниц.

Во введении обосновывается актуальность исследуемой задачи и приводятся некоторые обозначения. В разделе 2 приводятся основные определения и обозначения. Раздел 3 содержит новые результаты. В теореме 1 установлено, что при некоторых ограничениях для любой последовательности нумераций $\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \dots$ существует пара нумераций β_0 и β_1, являющаяся аналогом точной пары. В теореме 2 установлено, что если индексное множество некоторого класса $\mathcal{C}$ вычислимых нумераций конечно-аппроксимируемого семейства р. п. множеств принадлежит Σ^0_3, то порождёнными соответствующими классами идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$ порождается и некоторой вычислимой последовательностью нумераций. В качестве следствия установлено, что для некоторых «естественных» классов множеств идеалы с индексными множествами из Σ^3_0 имеют точную пару, а $\varnothing''$-р. п. класс нумераций, не содержащий главных нумераций, имеет неглавную верхнюю границу.

Таким образом, статья З. К. Щедриковой содержит интересные и актуальные результаты. Однако доказательства содержат некоторые неточности, а в нескольких местах не вполне ясно, как выполняются логические переходы. Перечислим основные замечания.

Страница 3.

1. Во второй выключной формуле написано ν вместо α.

Страница 5.

2. В случае чётного $s+1$ не написано, что нужно делать, если искомые числа y, k_i, n_i, x_i не существуют. По-видимому, в этом случае $\psi_{i,s+1} = \psi_{i,s}$.

3. На шаге (ii) проверяются условия $\psi_{0,s}(e_0, e_1)\uparrow$, $\psi_{1,s}(e_0, e_1)\uparrow$. В общем случае эти условия нерекурсивны. Следует явно отметить, что функции $\psi_{i,s}$ на каждом шаге имеют конечные области определения.

4. На шаге (ii) используется обозначение $\varphi_{e_i,s}$. Но до этого использовалось только обозначение φ_e с одним индексом. Кроме того, проверяется нерекурсивное условие $\varphi_{e_i,s}(y)\downarrow= c(k_i,n_i,x_i)$. По-видимому, под $\varphi_{e_i,s}$ понимается какой-то «конечный фрагмент» функции φ_{e_i}.

5. В формуле (2) используются функции $\psi_{0,s}$ и $\psi_{1,s}$. Однако s нечётно, поэтому на s-м шаге эти функции не строились. По-видимому, предполагается, что $\psi_{i,s} = \psi_{i,s-1}$ для нечётных s.

Страница 6.

6. В строке 1 написано $\psi_{i,s}$. Нужно проверить, не должно ли быть написано $\psi_{i,s+1}$.

7. В формуле (4) написано ψ_i вместо $\psi_{i,s}$ или $\psi_{i,s+1}$.

8. В строке после формулы (4) определяются «предельные» функции ψ_i, которые нигде далее не используются. Обозначение ψ_i используется только в предыдущей строке ещё до определения.

9. Во втором абзаце написано, что проверки (i) обеспечивают существование лишь конечного числа некоторых пар и как следствие выполнение условий Q_n. Следует пояснить, как получаются эти заключения.

10. В третьем абзаце написано, что $\beta_0 \circ \varphi_{e_0} \leqslant \alpha_m$. Следует пояснить, как это получается.

11. Следует пояснить, как найти такой y, что $\beta_0(\varphi_{e_0}(y)) \neq \beta_1(\varphi_{e_1}(y))$.

12. В доказательстве следует явно сказать, где используется тот факт, что нумерация δ является фридберговой.

Страница 7.

13. В первой выключной формуле используются конечные множества B_s. Известный результат состоит в том, что любое множество из Σ^0_3 определяется как $\exists t \exists^\infty s R(s,t,e)$, где R — рекурсивное отношение. Следует пояснить, почему можно выбрать отношение R вида $c(e,t) \in B_s$.

14. Во второй выключной формуле используется обозначение $W_{e,s}$. Но выше определялось только обозначение W_e с одним индексом. По-видимому, $W_{e,s}$ — это тоже какой-то «конечный фрагмент» множества W_e.

15. В строке после третьей выключной формулой используется обозначение ψ_u, которое не определялось ранее.

16. Нужно пояснить, почему в пятой выключной формуле получится равенство, а не строгое включение $\alpha^t_e(c(u,x)) \subsetneq W_{f(e,x)}$.

17. В предпоследнем абзаце нужно пояснить, почему α^t_e нумерует конечное подсемейство. Объединение содержит элемент $W_{\psi(0,f(e,x))}$, а также, возможно, конечное число множеств, содержащихся между $W_{f(e,x),s}$ и $W_{f(e,x)}$, о мощности которых ничего не сказано.

18. Следует пояснить, почему последовательность α_n порождает идеал $\mathbf{I}(\mathcal{C})$.

Отметим также несколько незначительных опечаток.

1. На стр. 2 с строке 3 снизу пропущена запятая после «0 и 1».

2. На стр. 4 в разделе 3, строке 2 написано «–» вместо «—».

3. На стр. 9 в источнике [11] написано «BjГёrn» вместо «Bjørn».

Таким образом, автору следует исправить отмеченные неточности, а также несколько детализировать доказательства.