

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕ
ПО ДАННЫМ ОБОБЩЕННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
РАДОНА

Д.С. АНИКОНОВ , Э.В. АРБУЗОВ 

Представлено

Abstract: The generalized Radon transform is considered, defined as a set of integrals from a function over all hyperplanes in an n -dimensional Euclidean space. The integrand is the product of a smooth weight function of $2n$ variables and a piecewise continuous function of n variables. The aim of this work is to obtain useful information about the unknown integrand in an even-dimensional Euclidean space. More specifically, the object of the search here is the discontinuity surface of the integral expression, if its generalized Radon transform is known. Such information is valuable for problems of sensing media with physical signals. Possible applications may include X-ray tomography, flaw detection, geology, geophysics, ecology, and others. In this paper, a new algorithm is tested numerically, which was theoretically justified in one of the previous works of the co-author of the article. The essence of the approach used is to define an integro-differential indicator, which is a function that is unbounded only near the desired surface. When visualizing the indicator values, a set of points becomes visible where the indicator values are abnormally large. Thus, the desired surface is

ANIKONOV D.S., ARBUZOV E.V., NUMERICAL STUDY OF AN ALGORITHM FOR SOLVING THE PROBLEM OF AN UNKNOWN BOUNDARY.

© 2026 Аниконов Д.С., Арбузов Э.В.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН. (проект FWNF-2026-0029).

Поступила 27 января 2026 г., опубликована 31 декабря 2026 г.

approximately located. The results obtained allow us to recommend our algorithm for practical use.

Keywords: generalized Radon transform, integral geometry, probing, inhomogeneity indicator, discontinuous functions, numerical experiment.

1 Предварительные сведения

Настоящая статья является продолжением работы [1], содержащей теоретическое исследование проблемы частичного обращения одного из вариантов обобщенного преобразования Радона. Представляется естественным сохранить обозначения и определения, принятые в [1]. В частности используются следующие обозначения: E_n , $n \geq 2$, – n -мерное евклидово пространство, ∂T – граница множества T ; $\rho(x, T)$ – расстояние от точки x до множества T ; Ω – единичная сфера в E_n ; ω – точка сферы Ω ; Δ_x – оператор Лапласа по переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$; ∇_x – градиент.

В пространстве E_n рассматривается ограниченная область G , содержащая подобласти G_i , $i = 1, \dots, l$, так что для объединения G_0 областей G_i верно равенство $\overline{G_0} = \overline{G}$. Каждую границу ∂G_i считаем $(n-1)$ -мерной непрерывной замкнутой поверхностью. Легко видеть, что ∂G_0 совпадает с объединением поверхностей ∂G_i , $i = 1, \dots, l$. На множестве ∂G_0 определяются контактные точки z , для которых выполняются условия: в некоторой окрестности точки z кроме точек множества ∂G_0 содержатся только точки двух областей G_i, G_j , $i, j = 1, \dots, l$, а общая часть границ этих областей в этой окрестности есть гладкая поверхность класса C^2 . Считается, что множество контактных точек плотно в множестве $\partial G_0 \setminus \partial G$. Гиперплоскости в E_n обозначаем $Y(x, \omega) = \{y : y \in E_n, (y-x) \cdot \omega = 0\}$.

Рассматриваются функции $F(x, y)$ и $\lambda(y)$, $x, y \in E_n$, со следующими свойствами. Функция $\lambda(y)$ непрерывна по Гельдеру в каждой области G_i , $i = 1, \dots, l$ и $\lambda(y)$ равна нулю вне области G . Как видно, такие функции могут иметь разрывы в точках множества ∂G_0 . Функция $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по y_i первого порядка и до n – порядка по x_i . Кроме того, предполагается что $|F(x, x)| > 0$, $x \in \overline{G}$.

Рассматривается вариант обобщенного преобразования Радона в форме следующего поверхностного интеграла по гиперплоскости $Y(x, \omega)$

$$[V\lambda](x, \omega) = \int_{(y-x) \cdot \omega = 0} F(x, y) \lambda(y) d_y \sigma, \quad x \in G, \quad \omega \in \Omega. \quad (1)$$

В работе [1] для случая $n = 2m$ определен и исследован интегро-дифференциальный оператор следующего вида

$$Ind(x) = |\nabla_x (\Delta_x)^{m-1} \int_{\Omega} [V\lambda](x, \omega) d\omega|, \quad x \in G_0 \quad (2)$$

Не ставя себе задачу привести подробный обзор теории преобразования Радона, укажем прежде всего отдельные работы основоположников, таких как Р. Курант [2], Ф. Йон [3], И.М. Гельфанд [4]. Упомянем также родственные исследования математической школы М.М. Лаврентьева и В.Г. Романова, посвященные обратным задачам для уравнений математической физики [5, 6]. Вообще, имеется значительное количество исследований, посвященных единственности обращения преобразования Радона при довольно общих предположениях. Однако, известные нам формулы, удобные для построения численных алгоритмов, доказаны только для гладких функций, что несколько снижает их прикладную ценность. Некоторое представление о проведенных исследованиях можно получить из работ, указанных в списке литературы. Приведем краткое описание их содержания. Цитируемые ранее работы И.М. Гельфанда, М.М. Лаврентьева, В.Г. Романова, а также работа А. Магкое [7], посвящены применению преобразования Радона в таких областях, как сейсморазведка, гидролокация, электронная микроскопия, геофизическое картографирование, дефектоскопия и томография. При этом авторы использовали преимущественно численные методы, применяемые и для разрывных функций.

Различные виды обобщений преобразования Радона приведены в публикациях [8, 9, 10]. Многообразие таких обобщений достигается за счет вариаций областей определения, а также благодаря специальным видам преобразования Радона, таким как сферическое и коническое отображения. В работах [11, 12] даны примеры использования преобразования Радона при решении некоторых задач специального вида.

В статьях [13, 14] содержатся многочисленные результаты для определения обратных преобразований Радона, позволяющих восстановить, полностью или частично, подынтегральные функции.

Так в [13] обсуждаются некоторые проблемы сейсморазведки верхней мантии от основания земной коры. Предполагается, что исследуемые среды являются неоднородными и описываются разрывными функциями. Для обработки данных зондирования предлагается использовать так называемое разреженное преобразование Радона. В работе [14] исследуется проблема обращения дискретного преобразования Радона, когда подынтегральная функция имеет разрывы. Предлагаются некоторые способы решения задачи и проводится их проверка численным экспериментом.

В работах [15, 16, 17] была решена близкая нам специальная задача о нахождении поверхностей разрывов функций из области определения интегрального преобразования.

В настоящей работе, как и в [1, 16, 17], не ставится задача о полном определении подынтегрального выражения. Мы ограничиваемся поиском только поверхности его разрыва, что представляет значительную ценность для зондирования.

В работе [1] доказано, что правая часть равенства (2), является сингулярным интегралом и обладает следующими свойствами.

1. Функция $Ind(x)$ ограничена на всяком непустом множестве

$$\{x : x \in G_0, \rho(x, \partial G_0) \geq \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$$

2. Если в контактной точке z , функция $\lambda(x)$ имеет ненулевой разрыв первого рода, то при $|x - z| \rightarrow 0$, $x \in G_0$, функция $Ind(x) \rightarrow \infty$.

3. В случае, когда функция $\lambda(x)$ действительно разрывна в каждой контактной точке z , то вследствие плотности множества точек z в $\partial G_0 \setminus \partial G$ функция $Ind(x) \rightarrow \infty$ при $\rho(x, \partial G_0) \rightarrow 0$.

Перечисленные свойства позволяют назвать функцию $Ind(x)$ индикатором неоднородности среды G . При этом поверхность $\partial G_0 \setminus \partial G$ приближенно определяется как множество точек с аномально большими значениями индикатора.

Отметим, что выражение $Ind(x)$ определено для $x \in G_0$, но при дискретизации задачи определения искомой поверхности может произойти попадание узла сетки аргументов на множество ∂G_0 . Однако такое событие должно считаться маловероятным, которое не может осложнить процесс визуализации неизвестной границы.

Таким образом, алгоритм решения задачи о нахождении поверхности ∂G_0 сводится к использованию формулы (2) для вычисления $Ind(x)$ и к визуализации полученных результатов.

В следующем пункте мы проверяем указанный метод путем численного эксперимента, если $n = 2$. В этом случае формула (2) приобретает более простой вид

$$Ind(x) = |\nabla_x \int_{\Omega} [V\lambda](x, \omega) d\omega|, \quad x \in G_0,$$

где $[V\lambda](x, \omega)$ представляет собой интегралы по прямым, проходящим через точку x перпендикулярно вектору ω .

2 Вычислительные эксперименты

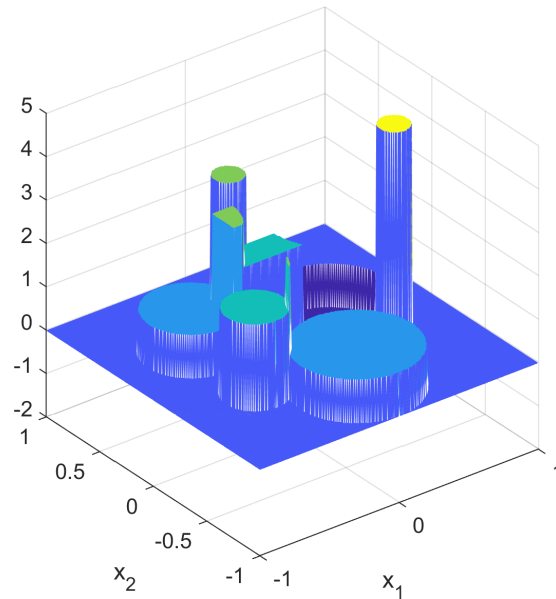
В данном разделе приведены результаты определения разрывов тестовой кусочно-непрерывной функции $\lambda(x)$ по данным обобщенного преобразования Радона (1) с весовой функцией $F(x, y) = e^{-|x-y|^2}$ и направлениями $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, \pi)$ с шагом дискретизации $\pi/180$.

Данные задаются в области $G = \{x = (x_1, x_2) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$, на дискретном множестве точек

$$x_{k,l} = \left(-1 + \frac{2k}{N}, -1 + \frac{2l}{N}\right), \quad k = 0, \dots, N-1, \quad l = 0, \dots, N-1, \quad N = 256.$$

В качестве тестовой функции (рис. 1) рассматривается сумма

$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^6 A_j \text{round}_{R_j}(x - x_j) + A_0 \text{rect}_{a,b}(x - x_0),$$

Рис. 1. Тестовая функция $\lambda(x)$

характеристических функций круга

$$\text{round}_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| > R, \end{cases}$$

и прямоугольника

$$\text{rect}_{a,b}(x) = \text{rect}_a(x_1)\text{rect}_b(x_2), \quad \text{rect}_c(s) = \begin{cases} 1, & |s| \leq c/2, \\ 0, & |s| > c/2, \end{cases},$$

со следующими значениями параметров

$$A_0 = 2, \quad x_0 = (-0.1, 0.2), \quad a = 0.5, \quad b = 0.2, \\ A = (-1, 3, 1, 2, 1, 5), \quad R = (0.4, 0.1, 0.3, 0.2, 0.4, 0.1),$$

$$\{x_j\} = \begin{pmatrix} 0.5, 0.3 \\ 0, 0.6 \\ -0.5, 0.3 \\ -0.5, -0.3 \\ 0, -0.6 \\ 0.5, -0.3 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2 приведен результат вычисления по дискретному аналогу формулы (2) индикатора $Ind(x)$.

В силу выбора весовой функции $F(x, y)$ наблюдается эффект хорошего определения линий разрывов вдоль главной диагонали $x_1 = x_2$ области определения функции $\lambda(x)$, и ослабление результата определения по мере увеличения расстояния от главной диагонали.

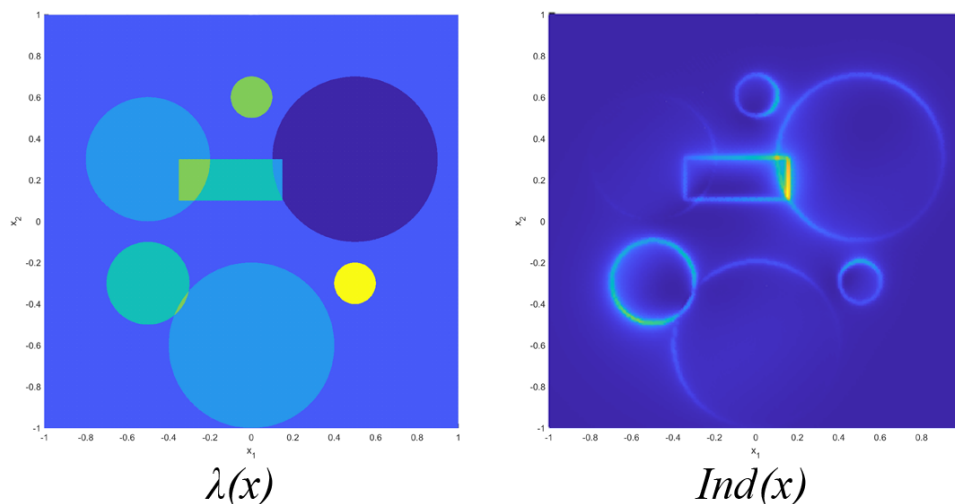


Рис. 2. Визуализация линий разрыва функции $\lambda(x)$ и индикатора $Ind(x)$

На рис. 3 приведены результаты вычисления $Ind(x)$ с внесенным в исходные данные обобщённого преобразования Радона шумом, который моделировался равномерно распределенной псевдослучайной величиной с относительной амплитудой в 1%, 3% и 5%.

3 Обсуждение результатов

В работах [1, 18] приводятся пять доказанных формул обращения классического и обобщённого преобразований Радона в классах разрывных подынтегральных функций. При этом, формулы для классического преобразования Радона в четномерных пространствах оказываются более сложными, чем в нечетномерном случае. Интересно отметить, что если определять только множество точек разрывов, то ситуация - противоположная. В частности, вариант формулы (2), протестированный в этой работе имеет особенный характер. Он самый простой и самый актуальный, например, для проблем рентгеновской томографии.

При тестировании данной формулы рассматривались различные варианты тестовых функций $\lambda(x)$ (с гладкими и кусочно-гладкими границами носителей, с разной величиной скачка на границах) при разных шагах дискретизации как для классического, так и для обобщённого преобразований Радона. В работе использован пример, в котором показаны все эти варианты.

Для вычисления интеграла в правой части формулы (2) мы непосредственно суммировали данные соответствующих проекций, что можно получить также, используя функции, входящие различные пакеты программ (например, в Matlab можно применить функцию `iradon`).

Полученные результаты реконструкции дают достаточно полное представление об элементах, составляющих внутреннюю структуру тестовых функций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для описания неоднородных сред в теории зондирования для обобщенного преобразования Радона естественно использовать разрывные функции. Такой подход направлен на широкое применение результатов и, что особенно важно, он обеспечивает наличие самого предмета поиска. Однако, как уже отмечалось, авторам настоящей работы не удалось обнаружить в работах других авторов подходящих строго доказанных формул типа обращения для таких функций. При этом имеется довольно много успешных численных исследований на эту тему. Наша работа сочетает два таких подхода. Мы используем доказанные свойства индикатора неоднородности и проверяем их численным экспериментом. Достигнутые результаты показали хорошее соответствие теоретического анализа и численного моделирования, что позволяет нам рекомендовать полученные выводы для практического применения.

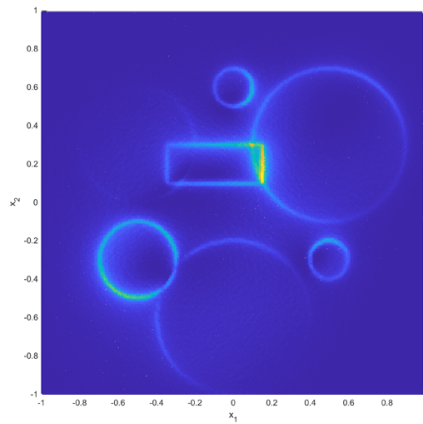
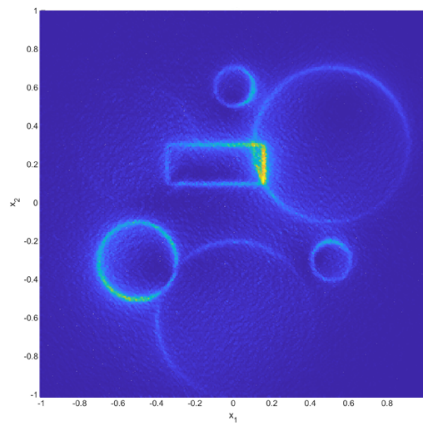
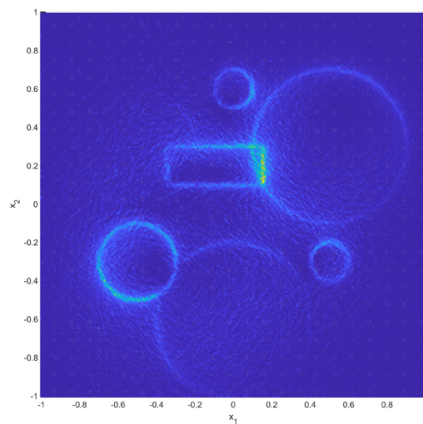
*a**b**c*

Рис. 3. Визуализация значений индикатора $Ind(x)$ для данных Радона с уровнем шума 1%(a), 3%(b) и 5%(c)

References

- [1] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *Stefan type problem for the generalized Radon transform in an even-dimensional space*, Siberian Advances in Mathematics. **34** (2024), 261–267. DOI:10.1134/S1055134424040011.
- [2] R. Courant, *Partial differential equations*, New York: Inc, 1962.
- [3] F. John, *Plane waves and spherical means*, Interscience publications, New York: Inc, 1955.
- [4] I.M. Gelfand, M.I. Graev, N.Ya. Vilenkin, *Integral geometry and related issues of representation theory*, Moscow: Fizmatgiz, 1962.
- [5] M.M. Lavrent'ev, L.Ya. Savel'ev, *Operator theory and ill-posed problems*, Novosibirsk: Izdatel'stvo Instituta Matematiki im. S. L. Soboleva SO RAN, 2010.
- [6] V.G. Romanov, *Stability in inverse problems*, Moscow: Nauchniy Mir, 2004.
- [7] A. Markoe, *Analytic tomography in Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [8] F. Natterer, *The mathematics of computed tomography*, Stuttgart: John Wiley and Sons Ltd and B G Teubner, 1986.
- [9] T.G. Kalnin, D.A. Ivonin, K.N. Abrosimov, E.A. Grachev, N.V. Sorokina, *Analysis of tomographic images of the soil pore space structure by integral geometry methods*, Eurasian Soil Science, **54**:9 (2021), 1400–1409.
- [10] N. Temirgaliev, Sh.K. Abikenova, Sh.U. Azhgaliev, G.E. Taugynbaeva, *The Radon Transform in the Scheme of $C(N)D$ -Investigations and the Quasi-Monte Carlo Theory*, Russ Math. **64** (2020), 87–92.
- [11] A.V. Baev, *Radon Transform for Solving an Inverse Scattering Problem in a Planar Layered Acoustic Medium*, Comput. Math. and Math. Phys. **58** (2018), 537–547.
- [12] E.N. Simonov, A.V. Prokhorov, A.V. Akintseva, *Mathematical modeling of volumetric image reconstruction in X-ray computed tomography using holographic methods*, Vesntik Yuzh.-Ural Univ. Mat. Model. i Progr., **12**:3 (2019), 102–114.
- [13] T. Olugboji, Z. Zhang, S. Carr, et al., *On the Detection of Upper Mantle Discontinuities with Radon-Transformed P_s Receiver Functions (CRISP-RF)*, Geophys. J. Int. **236** (2024), 748–763.
- [14] A. Katsevich, *Analysis of reconstruction from discrete Radon transform data in R^3 when the function has jump discontinuities*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, **52**:4 (2020), 3990–4021.
- [15] D.S. Anikonov, E.Yu. Balakina, D.S. Konovalova, *An inverse problem for generalized Radon transformation*, St. Petersburg Polytechnical State University Journal. Physics and Mathematics, **15**:1 (2022), 41–51.
- [16] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *A Problem of Integral Geometry for a Family of Curves with Incomplete Data*, Doklady Mathematics. **92**:2 (2015), 221–224.
- [17] D.S. Anikonov, S.G. Kazantsev, D.S. Konovalova, *A uniqueness result for the inverse problem of identifying boundaries from weighed Radon transform*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **31**:6 (2023), 959–965.
- [18] D.S. Anikonov, D.S. Konovalova, *New Formulas for the Inversion of the Radon Transform*, Doklady Mathematics, **111**:3 (2025), 163–166.

DMITRY SERGEEVICH ANIKIONOV
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PR. KOPTYUGA, 4,
 630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
 Email address: anik@math.nsc.ru

EDUARD VITALIEVICH ARBUZOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. КОПТУГА, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: arbuzov@math.nsc.ru