


## ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Н.Р. КАРАЦЕВ, А.Н. РЫБАЛОВ 

**Abstract:** In this paper, we study two models of computability over an arbitrary algebraic structure: list-superstructure computability by Ashaev, Belyaev and Myasnikov, and computability of Moschovakis. We prove equivalence of these models for the classes of primitive computable functions. Also we expand the notion of partial computable function in the list-superstructure computability to prove its equivalence to the notion of computable function in the Moschovakis model.

**Keywords:** generalized computability, list-superstructure, Moschovakis model.

### 1 Введение

В классической теории сложности вычислений основной моделью является машина Тьюринга. Эта модель, с одной стороны, позволяет адекватно изучать такие важные понятия как время работы алгоритма и используемую в процессе вычисления память. С другой стороны, машина Тьюринга очень неудобна для самого процесса программирования конкретных алгоритмов, так как является языком программирования очень

---

KARATSEV, N.R., RYBALOV, A.N., EQUIVALENCE OF TWO MODELS OF COMPUTATIONS IN ALGEBRAIC STRUCTURES.

© 2026 КАРАЦЕВ Н.Р..

© 2026 РЫБАЛОВ А.Н..

Поступила 14 января 2026 г., опубликована 30 июня 2026 г.

низкого уровня, вроде ассемблера или языка машинных команд. В то же время при разработке конкретных алгоритмов в качестве элементарных шагов используются более высокоуровневые операции, привычные для данной предметной области. Например, теоретико-числовые алгоритмы формулируются в терминах стандартных арифметических операций с целыми числами: сложение, вычитание, умножение, деление с остатком. Алгоритмы линейной алгебры используют стандартные операции с векторами, матрицами и т.д. При этом понятия временной и пространственной сложности таких алгоритмов также могут изучаться на таком более высоком уровне.

В общем случае алгоритм в качестве элементарных шагов использует операции и предикаты из языка (сигнатуры) некоторой алгебраической системы. Также для облегчения программирования вводятся некоторые надстройки над основным множеством алгебраической системы: строки, списки, и т.п. Такой подход берет свое начало с работы Блум, Шуба и Смейла [2], в которой была развита теория вычислимости и сложности вычислений над кольцами и полями вещественных и комплексных чисел. Авторы рассмотрели аналог машин Тьюринга для работы со строками вещественных чисел, на их основе определили аналоги классических полиномиальных классов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{NP}$ , а также развили теорию  $\mathbf{NP}$ -полноты.

В дальнейшем были предложены несколько подходов к понятию алгоритмического процесса над произвольными областями и структурами:  $\Sigma$ -определимость Ю. Л. Ершова [4], вычислимость над списочной надстройкой И. В. Ашаева, В. Я. Беляева и А. Г. Мясникова [1], подход Я. Московакиса к вычислимости над любыми множествами [6],  $S$ -вычислимость А. Хеммерлинга [5]. Естественной задачей является доказательство эквивалентности этих подходов. Действительно, несмотря на существенные отличия, во многих из них вводится некоторая надстройка над рассматриваемой областью, которая позволяет работать с ее элементами как и в случае натуральных чисел, а именно: составлять кортежи, матрицы, сравнивать созданные объекты на предмет равенства, принадлежности и т.д. Это может быть семейство наследственно конечных множеств в [4], списочная надстройка из [1] или некоторая структура, замкнутая относительно взятия упорядоченной пары [6]. Обычно, надстройка должна содержать натуральные числа и моделировать вычислимость на них — это является подтверждением естественности данного подхода. Другой аргумент в пользу принятия рассматриваемых подходов как формального аналога понятия алгоритма над неконструктивными областями — это как раз доказательство их эквивалентности. Эквивалентность  $\Sigma$ -определимости и подхода Московакиса была доказана в [3].

В данной работе доказывается эквивалентность вычислимости над списочной надстройкой И. В. Ашаева, В. Я. Беляева и А. Г. Мясникова

[1], и вычислимости по Московакису [6] для классов примитивно вычислимых функций. Частично рекурсивные функции над списочной надстройкой, определенные в [1] являются однозначными, в то время, как вычислимые функции по Московакису могут быть многозначными (то есть отношениями). Поэтому формально класс частично вычислимых функций над списочной надстройкой, может быть уже класса вычислимых функций по Московакису. В данной статье вводится понятие вычислимого отношения над списочной надстройкой и доказывается, что оно совпадает с понятием отношения, вычислимого по Московакису. На протяжении всей статьи  $S = \langle A, \sigma \rangle$  — произвольная алгебраическая система с непустым основным множеством  $A$  и конечной сигнатурой  $\sigma$ .

## 2 Вычислимость по Московакису

Дополним  $A$  некоторым элементом  $0$ , не лежащим в  $A$ . Обозначим

$$A^0 = A \cup \{0\}.$$

Далее определим надстройку  $A^*$  по индукции

$$\begin{aligned} \text{если } x \in A^0 \text{ тогда } x \in A^*, \\ \text{если } x, y \in A^* \text{ тогда } (x, y) \in A^*. \end{aligned}$$

Здесь  $(x, y)$  — упорядоченная пара элементов  $x$  и  $y$ . Таким образом, для каждого  $z \in A^*$  либо  $z \in A^0$ , либо существуют некоторые однозначно определенные элементы  $x, y \in A^*$  такие, что  $z = (x, y)$ .

В структуре  $A^*$  можно определить натуральные числа посредством индукции

$$0 = 0, \quad n + 1 = (n, 0).$$

Определим для любого  $z \in A^*$  функции-компоненты  $\pi z$  и  $\delta z$  следующим образом

$$\pi 0 = \delta 0 = 0,$$

$$\pi z = \delta z = 1, \text{ если } z \in A,$$

$$\pi z = x, \quad \delta z = y, \text{ если } z = (x, y).$$

Московакис рассматривает функции из  $A^*$  в  $A^*$ . Определим несколько функций, которые пригодятся для дальнейшего. Положим

$$s_0(x) = (x, 0), \quad s_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, s_n(x_1, \dots, x_{n+1})),$$

и

$$(x)_0 = \pi x, \quad (x)_{i+1} = (\delta x)_i.$$

Легко видеть, что если

$$x = s_n(x_0, \dots, x_n),$$

тогда для  $i = 0, \dots, n$

$$(x)_i = x_i.$$

Наконец, положим

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = s_n(n, x_1, \dots, x_n).$$

Аналогично,

$$\text{если } x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \text{ тогда для } i = 1, \dots, n \ (x)_i = x_i.$$

Перейдем теперь непосредственно к определению функций, вычисляемых по Москвакису. Пусть  $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$  — конечный список функций из  $A^*$  в  $A^*$ , соответственно  $n_1, \dots, n_l$  аргументов. Рассмотрим следующие схемы:

- (1)  $f(y_1, \dots, y_{n_i}, \bar{x}) = \varphi_i(y_1, \dots, y_{n_i})$ .
- (2)  $f(\bar{x}) = c, \ c \in A^*$ .
- (3)  $f(y, \bar{x}) = y$ .
- (4)  $f(s, t, \bar{x}) = (s, t)$ .
- (5)  $f(y, \bar{x}) = \pi y$ .
- (6)  $f(y, \bar{x}) = \delta y$ .
- (7)  $f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}), \bar{x})$ .
- (8)  $\begin{cases} f(y, \bar{x}) = g(y, \bar{x}), \text{ если } y \in A^0, \\ f((s, t), \bar{x}) = h(f(s, \bar{x}), f(t, \bar{x}), s, t, \bar{x}). \end{cases}$
- (9)  $f(\bar{x}) = g(x_{j+1}, x_1, \dots, x_j, x_{j+2}, \dots, x_n)$ .
- (10)  $f(\bar{x}) = \nu y \{g(y, \bar{x}) \rightarrow 0\}$ .

Эти схемы нужны для того, чтобы из одних, уже полученных функций получать другие. Схемы 1–6 задают некоторые базисные функции, схема 7 — суперпозиция, схема 8 напоминает примитивную рекурсию, в схеме 10 запись

$$\nu y \{g(y, \bar{x}) \rightarrow 0\}$$

означает

$$\text{все } y \text{ такие, что } g(y, \bar{x}) = 0,$$

то есть некоторый аналог оператора минимизации в обычной теории вычислимости, но, в отличие от него, данный оператор может давать и многозначные функции, так как элементов  $y$  с таким свойством может быть более одного.

Теперь функция  $f : A^{*k} \rightarrow A^*$  называется *примитивно вычисляемой по Москвакису*, если она получена из функций  $\varphi$  по схемам 1–9, и *вычисляемой по Москвакису*, если получена из функций  $\varphi$  с помощью схем 1–10.

Легко заметить, что если функции  $\varphi_i$  однозначны (в дальнейшем так и будет), то все примитивно и просто вычисляемые функции однозначные, так как схемы 1–9 по однозначным функциям дают однозначные. Класс же вычисляемых функций может содержать и неоднозначные функции из-за неоднозначности применения схемы 10. В этом случае можно говорить об отношении (предикате), задаваемом схемами 1–10.

Расширим функции и предикаты из  $\sigma$  на все  $A^*$ , положив их значения равными 0 в случае, если не все их аргументы принадлежат  $A$ . Заметим,

что в модели Московакиса предикаты мы рассматриваем как их характеристические функции из некоторой области определения в множество значений  $\{0, 1\}$ , где  $1 \in A^*$  означает «истина», а  $0 \in A^*$  – «ложь».

Пусть  $\chi_=(a, b)$  – характеристическая функция предиката равенства, т.е.

$$\chi_=(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим  $\varphi = \{\text{функции и предикаты из } \sigma, \chi_=\}$  – список из определения функций, вычислимых по Московакису. Таким он останется до конца статьи и при любом упоминании вычислимых по Московакису функций будет подразумеваться, что в схеме 1 в правой части использовались функции (в том числе и предикаты из  $\sigma$ , рассматриваемые как функции) только из множества  $\varphi$ . Условимся также, что в схеме 2 в правой части элемент  $c$  берется из констант сигнатуры  $\sigma$ , или равным 0.

В [6] доказано, что если  $f(\bar{x})$  – примитивно вычислима по Московакису, то и  $g(\bar{y}, \bar{x}) = f(\bar{x})$  тоже примитивно вычислима. Разбор случаев также не выводит за пределы класса примитивно вычисляемых функций, то есть функция

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}), & \text{если } g(\bar{x}) = 1, \\ f_2(\bar{x}), & \text{иначе.} \end{cases}$$

примитивно вычислима, если таковыми являются функции  $f_1, f_2, g$ .

### 3 Вычислимость над списочной надстройкой

Построим следующие множества

$$HL_0(A) = A,$$

$$HL_{n+1}(A) = HL_n(A) \cup L(HL_n(A)),$$

где  $L(M)$  – множество конечных списков с элементами из  $M$ . Теперь списочное расширение основного множества  $A$  – это

$$HL(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} HL_n(A).$$

Элементы множества  $A$  называются *праэлементами*, остальные – *списками*. Расширяем сигнатуру до

$$\sigma^* = \sigma \cup \{\mathbf{nil}, \mathbf{head}^{(1)}, \mathbf{tail}^{(1)}, \mathbf{cons}^{(2)}\} \cup HL(A)$$

добавлением всех элементов  $HL(A)$  в качестве констант, а также новыми функциями для работы со списками. Здесь  $\mathbf{nil}$  – пустой список, а функции определяются следующим образом: если  $a$  – праэлемент,

$\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in HL(A)$ , то

$$\mathbf{head}(\mathbf{nil}) = \mathbf{head}(a) = \mathbf{nil},$$

$$\mathbf{head}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle) = \alpha_1;$$

$$\mathbf{tail}(\mathbf{nil}) = \mathbf{tail}(a) = \mathbf{nil},$$

$$\mathbf{tail}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle) = \langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle;$$

$$\mathbf{cons}(a, \alpha) = \mathbf{nil},$$

$$\mathbf{cons}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle, \alpha) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha \rangle.$$

Таким образом, **head** — взятие первого элемента списка, **tail** — отбрасывание первого элемента, **cons** — добавление одного списка в конец второго. Доопределим функции и предикаты исходной сигнатуры  $\sigma$  на списках как равные **nil**. В итоге получаем новую алгебраическую систему

$$HL(S) = \langle HL(A), \sigma^* \rangle,$$

которая называется *списочной надстройкой* исходной алгебраической системы  $S$ .

Определим натуральные числа  $\mathbb{N}_{HL}$  по индукции

$$0 = \mathbf{nil}, \quad n + 1 = \langle 0, 1, \dots, n \rangle = \mathbf{cons}(n, n).$$

*Базисными функциями* называются

$$(1) f(\bar{x}), \text{ где } f \text{ — функция из } \sigma^*,$$

$$(2) f(\bar{x}) = c, \text{ где } c \text{ — любая константа из } \sigma^*,$$

$$(3) P(\bar{x}) \text{ — предикат из } \sigma, \text{ который мы будем отождествлять с его характеристической функцией со значениями в } \{0, 1\}.$$

$$(4) \epsilon(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

$$(5) I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m.$$

Функция  $F$  получена *суперпозицией* из функций  $f, f_1, \dots, f_m$ , если

$$F(\bar{x}) = f(f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})).$$

Функция  $f(\bar{x}, y)$  получена из функций  $g(\bar{x}, y)$  и  $h(\bar{x}, y, z)$  *примитивной рекурсией*, если

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y), \text{ для } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\},$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle) = h(\bar{x}, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)).$$

Эта схема определяет последовательность вычислений: сначала вычисляются значения для элементов из  $A$  и **nil**, потом для более сложных списков и т.д.

Функция  $f : HL(A)^k \rightarrow HL(A)$  называется *примитивно рекурсивной над списочной надстройкой*, если она получена из базисных конечным числом применений операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Наряду с примитивной рекурсией рассматривают более общую рекурсию, а именно говорят, что функция  $f(\bar{x}, y)$  получена общей рекурсией из  $g(\bar{x}, y)$ ,  $h(\bar{x}, y, z, u, t)$ , если

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y), \text{ для } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\},$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle) = h(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle, \alpha_k, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)).$$

В [1] показано, что такая рекурсия не выводит за пределы класса примитивно вычислимых функций.

Функция  $f(\bar{x})$  получена из функции  $g(\bar{x}, y)$  с помощью *минимизации*, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = y \Leftrightarrow$$

- (1)  $y \in \mathbb{N}_{HL}$ ,
- (2)  $g(x_1, \dots, x_n, k)$  определено для всех  $k = 0, \dots, y$ ,
- (3)  $g(x_1, \dots, x_n, k) \neq 0$  для всех  $k = 0, \dots, y - 1$ ,
- (4)  $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$ .

Функция  $f : HL(A)^k \rightarrow HL(A)$  называется *частично рекурсивной над списочной надстройкой*, если она получена из базисных конечным числом применений операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Заметим, что частично рекурсивные функции над списочной надстройкой являются однозначными, в то время, как вычислимые функции по Московакису могут быть многозначными (то есть отношениями). Поэтому формально класс частично вычислимых функций над списочной надстройкой может быть уже класса вычислимых функций по Московакису. Для устранения этой проблемы введем понятие вычислимого отношения над списочной надстройкой, которое будет определяться с помощью более общей операции минимизации, которая может давать многозначные функции (отношения).

Многозначная функция  $f(\bar{x})$  получена из многозначной функции  $g(\bar{x}, y)$  с помощью *общей минимизации*, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = \text{все } y \text{ такие, что } g(x_1, \dots, x_n, y) = 0.$$

Многозначная функция (отношение)  $f : HL(A)^k \rightarrow HL(A)$  называется *вычислимой над списочной надстройкой*, если она получена из базисных конечным числом применений операций суперпозиции, примитивной рекурсии и общей минимизации.

## 4 Основные результаты

Введенное ранее множество  $A^*$  естественным образом вкладывается в  $HL(A)$ , то есть его можно считать подмножеством в  $HL(A)$ , состоящим из всех списков длины 2 на каждом уровне. Обозначим это подмножество  $HL_2(A)$ . Будем также далее отождествлять  $\mathbf{nil}$  с 0.

**Теорема 1.** Пусть функция  $f^* : A^{*n} \rightarrow A^*$  — примитивно вычислимая по Московакису. Тогда по любому определению этой функции в смысле

Московакиса можно эффективно найти определение примитивно рекурсивной функции над списочной надстройкой  $f : HL(A)^n \rightarrow HL(A)$  такой, что ограничение  $f$  на  $A^{*n}$  совпадает с  $f^*$ .

*Доказательство.* Пусть  $f^* : A^{*n} \rightarrow A^*$  — примитивно вычислимая по Московакису функция, то есть она построена с использованием схем 1–9. Докажем утверждение теоремы индукцией по построению  $f^*$ .

- (1) Пусть  $f^*(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_i(\bar{x})$ . Если  $\varphi_i$  — функция или предикат из  $\sigma$ , то соответствующая функция  $f$  будет той же самой, а потому примитивно вычислимой. Если же  $\varphi_i(x, y) = \chi_{=(x, y)}$ , то  $f(x, y) = \epsilon(x, y)$ .
- (2)  $f^*(\bar{x}) = c$ , где  $c$  — константа из  $\sigma$ , то  $c$  является базисной, поэтому  $f(\bar{x}) = c$ . Если  $f^*(\bar{x}) = 0$ , то  $f(\bar{x}) = \mathbf{nil}$ .
- (3)  $f^*(\bar{x}, y) = y$ . Тогда  $f(\bar{x}, y) = y = I_{m+1}^{m+1}(\bar{x}, y)$ , где  $m$  — длина кортежа  $\bar{x}$ .
- (4)  $f^*(s, t, \bar{x}) = (s, t) \Rightarrow f(s, t, \bar{x}) = \mathbf{cons}(\mathbf{cons}(\mathbf{nil}, s), t)$ .
- (5)  $f^*(y, \bar{x}) = \pi y$ , тогда

$$f(y, \bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ — праэлемент,} \\ \mathbf{head}(y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта функция примитивно вычислима, так как ее можно задать общей рекурсией:

$$\begin{aligned} f(y, \bar{x}) &= \epsilon(\mathbf{nil}, \epsilon(y, \mathbf{nil})), \text{ если } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\}, \\ f(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle, \bar{x}) &= \mathbf{head}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle). \end{aligned}$$

- (6)  $f^*(y, \bar{x}) = \delta y \Rightarrow$

$$f(y, \bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ — праэлемент,} \\ \mathbf{tail}(y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Примитивная вычислимость доказывается аналогично (5).

- (7) Пусть  $f^*(\bar{x}) = g^*(h^*(\bar{x}), \bar{x})$ , где  $g^*, h^*$  — примитивно вычисляемые и для них уже построены соответствующие примитивно вычисляемые функции  $g, h$  такие, что  $g^*$  (соответственно  $h^*$ ) — ограничение на  $A^*$  функции  $g$  (соответственно  $h$ ). Теперь с помощью суперпозиции получаем

$$f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}), \bar{x}).$$

Очевидно, что  $f^*$  — ограничение  $f$  на  $A^*$ .

- (8) Пусть

$$\begin{aligned} f^*(y, \bar{x}) &= g^*(y, \bar{x}), \text{ если } y \in A^0, \\ f^*((s, t), \bar{x}) &= h^*(f^*(s, \bar{x}), f^*(t, \bar{x}), s, t, \bar{x}) \end{aligned}$$

и для функций  $g^*, h^*$  уже построены соответствующие  $g, h$ . Определим  $f$  посредством общей рекурсии

$$\begin{aligned} f(y, \bar{x}) &= g(y, \bar{x}), \text{ если } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\}, \\ f(\langle s, t \rangle, \bar{x}) &= h(f(s, \bar{x}), f(t, \bar{x}), s, t, \bar{x}), \end{aligned}$$

а так как общая рекурсия не выводит за пределы примитивно вычислимых функций, то  $f$  — примитивно вычислима.

(9) Пусть

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = g^*(x_{j+1}, x_1, \dots, x_j, x_{j+2}, \dots, x_n),$$

причем для  $g^*$  уже найдена нужная функция  $g$ . Теперь

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(I_{j+1}^n(\bar{x}), I_1^n(\bar{x}), \dots, I_j^n(\bar{x}), I_{j+2}^n(\bar{x}), \dots, I_n^n(\bar{x})).$$

□

**Теорема 2.** Пусть многозначная функция  $f^* : A^{*n} \rightarrow A^*$  — вычисляемая по Московакису. Тогда по любому определению этой функции в смысле Московакиса можно эффективно найти определение вычислимой многозначной функции над списочной надстройкой  $f : HL(A)^n \rightarrow HL(A)$  такой, что ограничение  $f$  на  $A^{*n}$  совпадает с  $f^*$ .

*Доказательство.* Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с учетом того, что все функции могут быть многозначными, а также того, что схеме 10 в определении вычислимой по Московакису функции

$$\nu y \{g(y, \bar{x}) \rightarrow 0\}$$

соответствует операция общей минимизации, примененная к функции

$$e(g(y, \bar{x}), s(y)),$$

где функция

$$e(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, y = 1, \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а функция  $s$  — характеристическая функция подмножества  $HL_2(A)$  списков длины 2 на каждом уровне. При этом функции  $e$  и  $s$  являются примитивно рекурсивными над списочной надстройкой [1]. □

Чтобы установить эквивалентность в другую сторону определим отображение  $\alpha : HL(A) \rightarrow A^*$

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= a, \text{ если } a \in A, \\ \alpha(\mathbf{nil}) &= 0, \\ \alpha(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) &= s_n(\alpha(a_n), \dots, \alpha(a_1)). \end{aligned}$$

Если вспомнить, как определялись функции  $s_n$ , то можно сказать, что элементы списка, начиная с первого, отображение  $\alpha$  складывает в стек, причем на самом дне стека лежит 0, который служит для распознавания начала списка.

**Теорема 3.** Пусть  $f : HL(A)^n \rightarrow HL(A)$  — примитивно рекурсивная над списочной надстройкой функция. Тогда по любому определению этой функции как примитивно рекурсивной над списочной надстройкой можно эффективно найти определение примитивно вычислимой в смысле Московакиса функции  $f^* : A^{*k} \rightarrow A^*$  такой, что

$$\alpha^{-1} f^* \alpha = f.$$

*Доказательство.* Докажем это утверждение индукцией по построению примитивно рекурсивной функции  $f$ .

- (1)  $f(\bar{x})$  — функция или предикат  $\sigma$ . Тогда  $f^* = f$ , так как в этом случае если  $\bar{x} \in A^n$ , то и  $f(\bar{x}) \in A$ , иначе  $f(\bar{x}) = 0$ , поэтому

$$\alpha^{-1}f^*\alpha = f^* = f.$$

- (2)  $f(\bar{x}) = c$  — константа из  $\sigma^*$ . Тогда  $f^*(\bar{x}) = \alpha(c)$ .

- (3)  $f(x) = \mathbf{head}(x)$ , тогда  $f^*$  задается схемой примитивной рекурсии:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= 0, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*((s, t)) &= g(s, t, f^*(t)), \end{aligned}$$

где функция  $g$  определяется следующим образом

$$g(s, t, h) = \begin{cases} h, & \text{если } t \neq 0, \\ s, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

а потому, согласно [6], является примитивно вычислимой. Для того чтобы понять, что полученная функция  $f^*$  является аналогом **head**, достаточно вспомнить, как отображение  $\alpha$  кодирует списки, и заметить, что  $g(s, t, h)$  определяет, является ли  $s$  первым элементом в списке.

- (4)  $f(x) = \mathbf{tail}(x)$ , тогда  $f^*$  можно задать по схеме примитивной рекурсии 8:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= 0, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*((s, t)) &= g(s, t, f^*(t)), \end{aligned}$$

где функция  $g$  определяется следующим образом:

$$g(s, t, x) = \begin{cases} (s, x), & \text{если } t \neq 0, \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

- (5) Пусть  $f(x, y) = \mathbf{cons}(x, y)$ . Очевидно тогда, что

$$\begin{aligned} f^*(x, y) &= \begin{cases} (y, 0), & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*(x, y) &= (y, x), \text{ иначе.} \end{aligned}$$

Эта функция построена по схеме примитивной рекурсии.

- (6)  $f(x, y) = \epsilon(x, y)$ , тогда  $f^*(x, y) = \chi_=(x, y)$ .

- (7)  $f(\bar{x}) = I_m^n(\bar{x}) = x_m$ ,  $f^*$  легко получается с помощью схемы 3 и схемы примитивной рекурсии 8.

- (8) Пусть  $F(\bar{x}) = f(f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ , а для функций  $f, f_i$  уже построены соответствующие функции  $f^*, f_i^*$ . Без ограничения общности можно считать  $n = m$  (так как добавление фиктивных переменных не выводит за пределы класса примитивно вычисляемых функций, то, если  $n > m$ , добавляем  $n - m$  фиктивных переменных в  $f$ , а если  $n < m$ , то в  $f_i$ ). Для простоты разберем случай  $n = 2$ . Случай  $n > 2$  рассматривается аналогично, но более громоздко. Итак, пусть

$$F(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)),$$

и построены функции  $f^*, f_1^*, f_2^*$ . Положим

$$\begin{aligned}\bar{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f^*(x_1, x_2), \\ \bar{f}_1(x_1, x_2, x_3) &= f_1^*(x_2, x_3).\end{aligned}$$

По схеме суперпозиции получаем функцию

$$g(x_1, x_2, x_3) = \bar{f}(\bar{f}_1(x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3).$$

Еще раз применив суперпозицию, получим

$$\begin{aligned}F^*(x_1, x_2) &= g(f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) = \\ &= \bar{f}(\bar{f}_1(f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) = \\ &= \bar{f}(f_1^*(x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) = \\ &= f^*(f_1^*(x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2)).\end{aligned}$$

(9) Пусть

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y), \text{ для } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\}$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle) = h(\bar{x}, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)),$$

а для  $g, h$  уже найдены нужные  $g^*, h^*$ . Определим  $f^*$  примитивной рекурсией (учитываем, что при кодировании списка его последний элемент «лежит сверху», т.е. если  $\alpha(a_1, \dots, a_k) = (s, t)$ , то  $s = \alpha(a_k)$ , а  $t = \alpha(a_1, \dots, a_{k-1})$ ):

$$\begin{aligned}f^*(\bar{x}, y) &= g^*(\bar{x}, y), \text{ если } y \in A^0, \\ f^*(\bar{x}, (s, t)) &= h^*(\bar{x}, t, f^*(\bar{x}, t), f^*(\bar{x}, s)).\end{aligned}$$

Здесь функция  $\bar{h}^*$  — это

$$\bar{h}^*(\bar{x}, t, f_1, f_2) = \begin{cases} f_2, & \text{если } t = 0, \\ h^*(\bar{x}, f_1, f_2), & \text{если } t \neq 0. \end{cases}$$

Функция  $\bar{h}^*$  нужна, чтобы контролировать конец списка (при этом  $t = 0$ ) и обрывать рекурсивный спуск.

□

**Теорема 4.** Пусть  $f : HL(A)^n \rightarrow HL(A)$  — вычисляемая над списочной надстройкой многозначная функция. Тогда по любому определению этой функции как вычисляемой над списочной надстройкой можно эффективно найти определение вычисляемой в смысле Московакиса функции  $f^* : A^{*k} \rightarrow A^*$  такой, что

$$\alpha^{-1} f^* \alpha = f.$$

*Доказательство.* Доказательство также аналогично доказательству теоремы 3. При этом применению операции общей минимизации к функции  $g(y, \bar{x})$  соответствует схема 10, примененная к функции

$$e(g(y, \bar{x}), s(y)),$$

где функция

$$e(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, y = 1, \\ 1, & \text{иначе,} \end{cases}$$

а функция  $s$  – характеристическая функция подмножества  $\alpha(HL(A))$ . При этом функции  $e$  и  $s$  являются примитивно вычислимыми по Московакису [3, 6].  $\square$

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения по улучшению текста статьи.

## References

- [1] I.V. Ashaev, V.Ya. Belyaev, A.G. Myasnikov, *Toward a generalized computability theory*, Algebra and Logic, **32:4** (1993), 183–205.
- [2] L. Blum, M. Shub, S. Smale, *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines*, Bull. Amer. Math. Soc., **21** (1989), 1–46.
- [3] C.E. Gordon, *Comparisons between some generalizations of recursion theory*, Compositio Mathematica, **22:3** (1970), 333–346.
- [4] Yu.L. Ershov, *Definability and Computability*, Springer New York, NY, 1996.
- [5] A. Hemmerling, *Computability and Complexity over structures*, Math. Logic Quart., 44:1 (1998), 1–44.
- [6] Y.N. Moschovakis, *Abstract first order computability*, Trans. Amer. Math. Soc., **138** (1969), 427–464.

NIKITA RUSLANOVICH KARATSEV  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
PEVTSOVA 13,  
OMSK, 644099, RUSSIA  
*Email address:* [nikita.karatsev@gmail.com](mailto:nikita.karatsev@gmail.com)

ALEXANDER NIKOLAEVICH RYBALOV  
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,  
PEVTSOVA 13,  
OMSK, 644099, RUSSIA  
*Email address:* [alexander.rybalov@gmail.com](mailto:alexander.rybalov@gmail.com)