


СРАВНЕНИЕ ТРЕХ МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ В
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХН.Р. КАРАЦЕВ, А.Н. РЫБАЛОВ 

Abstract: In this paper, we study three models of computability over an arbitrary algebraic structure: Σ -definability by Ershov, list-superstructure computability by Ashaev, Belyaev and Myasnikov, and computability of Moschovakis. We prove equivalence of Moschovakis model and list-superstructure computability for primitive computable functions. Also we prove that functions computable in Moschovakis model are Σ -definable.

Keywords: generalized computability, Sigma-definability, list-superstructure, Moschovakis model.

1 Введение

В классической теории сложности вычислений основной моделью является машина Тьюринга. Эта модель, с одной стороны, позволяет адекватно изучать такие важные понятия как время работы алгоритма и используемую в процессе вычисления память. С другой стороны, машина Тьюринга очень неудобна для самого процесса программирования конкретных алгоритмов, так как является языком программирования очень низкого уровня, вроде ассемблера или языка машинных команд. В то

KARATSEV, N.R., RYBALOV, A.N., A COMPARISON OF THREE MODELS OF COMPUTATIONS IN ALGEBRAIC STRUCTURES.

© 2026 КАРАЦЕВ Н.Р..

© 2026 РЫБАЛОВ А.Н..

Поступила 14 января 2026 г., опубликована 30 июня 2026 г.

же время при разработке конкретных алгоритмов в качестве элементарных шагов используются более высокоуровневые операции, привычные для данной предметной области. Например, теоретико-числовые алгоритмы формулируются в терминах стандартных арифметических операций с целыми числами: сложение, вычитание, умножение, деление с остатком. Алгоритмы линейной алгебры используют стандартные операции с векторами, матрицами и т.д. При этом понятия временной и пространственной сложности таких алгоритмов также могут изучаться на таком более высоком уровне.

В общем случае алгоритм в качестве элементарных шагов использует операции и предикаты из языка (сигнатуры) некоторой алгебраической системы. Также для облегчения программирования вводятся некоторые надстройки над основным множеством алгебраической системы: строки, списки, и т.п. Такой подход берет свое начало с работы Блюм, Шуба и Смейла [2], в которой была развита теория вычислимости и сложности вычислений над кольцами и полями вещественных и комплексных чисел. Авторы рассмотрели аналог машин Тьюринга для работы со строками вещественных чисел, на их основе определили аналоги классических полиномиальных классов \mathbf{P} и \mathbf{NP} , а также развили теорию \mathbf{NP} -полноты.

В дальнейшем были предложены несколько подходов к понятию алгоритмического процесса над произвольными областями и структурами: Σ -определимость Ю. Л. Ершова [3], вычислимость над списочной надстройкой И. В. Ашаева, В. Я. Беляева и А. Г. Мясникова [1], подход Я. Московакиса к вычислимости над любыми множествами [5], S -вычислимость А. Хеммерлинга [4]. Естественной задачей является доказательство эквивалентности этих подходов. Действительно, несмотря на существенные отличия, во многих из них вводится некоторая надстройка над рассматриваемой областью, которая позволяет работать с ее элементами как и в случае натуральных чисел, а именно: составлять кортежи, матрицы, сравнивать созданные объекты на предмет равенства, принадлежности и т.д. Это может быть семейство наследственно конечных множеств в [3], списочная надстройка из [1] или некоторая структура, замкнутая относительно взятия упорядоченной пары [5]. Обычно, надстройка должна содержать натуральные числа и моделировать вычислимость на них — это является подтверждением естественности данного подхода. Другой аргумент в пользу принятия рассматриваемых подходов как формального аналога понятия алгоритма над неконструктивными областями — это как раз доказательство их эквивалентности.

В данной работе изучаются связи между тремя подходами к обобщенной вычислимости над произвольными алгебраическими системами: Σ -определимость над допустимыми множествами Ю. Л. Ершова [3], вычислимость по Московакису [5] и вычислимость над списочной надстройкой И. В. Ашаева, В. Я. Беляева и А. Г. Мясникова [1]. Доказывается эквивалентность классов примитивно вычислимых функций по Московакису

и примитивно рекурсивных функций над списочной надстройкой. Также доказывается, что функции, вычисляемые по Московакису являются Σ -определимыми по Ершову. На протяжении всей статьи $S = \langle A, \sigma \rangle$ — произвольная алгебраическая система с непустым основным множеством A и конечной сигнатурой σ .

2 Вычислимость по Московакису

Дополним A некоторым элементом 0 , не лежащим в A . Обозначим

$$A^0 = A \cup \{0\}.$$

Далее определим надстройку A^* по индукции

$$\begin{aligned} \text{если } x \in A^0 \text{ тогда } x \in A^*, \\ \text{если } x, y \in A^* \text{ тогда } (x, y) \in A^*. \end{aligned}$$

Здесь (x, y) — упорядоченная пара элементов x и y . Таким образом, для каждого $z \in A^*$ либо $z \in A^0$, либо существуют некоторые однозначно определенные элементы $x, y \in A^*$ такие, что $z = (x, y)$.

В структуре A^* можно определить натуральные числа посредством индукции

$$0 = 0, \quad n + 1 = (n, 0).$$

Определим для любого $z \in A^*$ функции-компоненты πz и δz следующим образом

$$\pi 0 = \delta 0 = 0,$$

$$\pi z = \delta z = 1, \quad \text{если } z \in A,$$

$$\pi z = x, \quad \delta z = y, \quad \text{если } z = (x, y).$$

Московакис рассматривает функции из A^* в A^* . Определим несколько функций, которые пригодятся для дальнейшего. Положим

$$s_0(x) = (x, 0), \quad s_{n+1}(x_0, \dots, x_{n+1}) = (x_0, s_n(x_1, \dots, x_{n+1})),$$

и

$$(x)_0 = \pi x, \quad (x)_{i+1} = (\delta x)_i.$$

Легко видеть, что если

$$x = s_n(x_0, \dots, x_n),$$

тогда для $i = 0, \dots, n$

$$(x)_i = x_i.$$

Наконец, положим

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = s_n(n, x_1, \dots, x_n).$$

Аналогично,

$$\text{если } x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle, \text{ тогда для } i = 1, \dots, n \quad (x)_i = x_i.$$

Перейдем теперь непосредственно к определению функций, вычисляемых по Московакису. Пусть $\varphi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$ — конечный список функций из A^* в A^* , соответственно n_1, \dots, n_l аргументов. Рассмотрим следующие схемы:

- (1) $f(y_1, \dots, y_{n_i}, \bar{x}) = \varphi_i(y_1, \dots, y_{n_i})$.
- (2) $f(\bar{x}) = c, c \in A^*$.
- (3) $f(y, \bar{x}) = y$.
- (4) $f(s, t, \bar{x}) = (s, t)$.
- (5) $f(y, \bar{x}) = \pi y$.
- (6) $f(y, \bar{x}) = \delta y$.
- (7) $f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}), \bar{x})$.
- (8) $\begin{cases} f(y, \bar{x}) = g(y, \bar{x}), \text{ если } y \in A^0, \\ f((s, t), \bar{x}) = h(f(s, \bar{x}), f(t, \bar{x}), s, t, \bar{x}). \end{cases}$
- (9) $f(\bar{x}) = g(x_{j+1}, x_1, \dots, x_j, x_{j+2}, \dots, x_n)$.
- (10) $f(\bar{x}) = \nu y \{g(y, \bar{x}) \rightarrow 0\}$.

Эти схемы нужны для того, чтобы из одних, уже полученных функций получать другие. Схемы 1–6 задают некоторые базисные функции, схема 7 — суперпозиция, схема 8 напоминает примитивную рекурсию, в схеме 10 запись

$$\nu y \{g(y, \bar{x}) \rightarrow 0\}$$

означает

$$\text{все } y \text{ такие, что } g(y, \bar{x}) = 0,$$

то есть некоторый аналог оператора минимизации в обычной теории вычислимости, но, в отличие от него, данный оператор может давать и многозначные функции, так как элементов y с таким свойством может быть более одного.

Теперь функция $f : A^{*k} \rightarrow A^*$ называется *примитивно вычисляемой по Московакису*, если она получена из функций φ по схемам 1–9, и *вычисляемой по Московакису*, если получена из функций φ с помощью схем 1–10.

Легко заметить, что если функции φ_i однозначны (в дальнейшем так и будет), то все примитивно и просто вычисляемые функции однозначны, так как схемы 1–9 по однозначным функциям дают однозначные. Класс же вычисляемых функций может содержать и неоднозначные функции из-за неоднозначности применения схемы 10. В этом случае можно говорить об отношении (предикате), задаваемом схемами 1–10.

Доопределим функции и предикаты из σ на A^* следующим образом

$$f_i(\bar{x}) = \begin{cases} f_i(\bar{x}), & \text{если все компоненты } \bar{x} \in A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$P_i(\bar{x}) = \begin{cases} P_i(\bar{x}), & \text{если все компоненты } \bar{x} \in A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что в модели Московакиса предикаты мы рассматриваем как их характеристические функции из некоторой области определения в

множество значений $\{0, 1\}$, где $1 \in A^*$ означает «истина», а $0 \in A^*$ — «ложь».

Пусть $\chi_=(a, b)$ — характеристическая функция предиката равенства, т.е.

$$\chi_=(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = b, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $\varphi = \{\text{функции и предикаты из } \sigma, \chi_=\}$ — список из определения функций, вычислимых по Московакису. Таким он останется до конца статьи и при любом упоминании вычислимых по Московакису функций будет подразумеваться, что в схеме 1 в правой части использовались функции (в том числе и предикаты из σ , рассматриваемые как функции) только из множества φ . Условимся также, что в схеме 2 в правой части элемент c берется из констант сигнатуры σ , или равным 0.

Для последующего важна теорема о нормальной форме вычислимой по Московакису функции, доказанная в [5].

Теорема 1. *Для любой вычислимой по Московакису функции $f : A^{*k} \rightarrow A^*$ существуют примитивно вычислимые функции $g, h : A^{*k+1} \rightarrow A^*$ такие, что*

$$f(\bar{x}) = g(\bar{x}, \nu y \{h(\bar{x}, y) \rightarrow 0\}).$$

Там же доказано, что если $f(\bar{x})$ — примитивно вычислима по Московакису, то и $f(\bar{y}, \bar{x}) = f(\bar{x})$ тоже примитивно вычислима. Разбор случаев также не выводит за пределы класса примитивно вычислимых функций, то есть функция

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}), & \text{если } g(\bar{x}) = 1, \\ f_2(\bar{x}), & \text{иначе.} \end{cases}$$

примитивно вычислима, если таковыми являются функции f_1, f_2, g .

3 Примитивно рекурсивные функции над списочной надстройкой

Построим следующие множества

$$HL_0(A) = A,$$

$$HL_{n+1}(A) = HL_n(A) \cup L(HL_n(A)),$$

где $L(M)$ — множество конечных списков с элементами из M . Теперь списочное расширение основного множества A — это

$$HL(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} HL_n(A).$$

Элементы множества A называются *праэлементами*, остальные — *списками*. Расширяем сигнатуру до

$$\sigma^* = \sigma \cup \{\mathbf{nil}, \mathbf{head}^{(1)}, \mathbf{tail}^{(1)}, \mathbf{cons}^{(2)}\} \cup HL(A)$$

добавлением всех элементов $HL(A)$ в качестве констант, а также новыми функциями для работы со списками. Здесь **nil** — пустой список, а функции определяются следующим образом: если a — праэлемент, $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in HL(A)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{head}(\mathbf{nil}) &= \mathbf{head}(a) = \mathbf{nil}, \\ \mathbf{head}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle) &= \alpha_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{tail}(\mathbf{nil}) &= \mathbf{tail}(a) = \mathbf{nil}, \\ \mathbf{tail}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle) &= \langle \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{cons}(a, \alpha) &= \mathbf{nil}, \\ \mathbf{cons}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle, \alpha) &= \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, **head** — взятие первого элемента списка, **tail** — отбрасывание первого элемента, **cons** — добавление одного списка в конец второго. Доопределим функции и предикаты исходной сигнатуры σ на списках как равные **nil**. В итоге получаем новую алгебраическую систему

$$HL(S) = \langle HL(A), \sigma^* \rangle,$$

которая называется *списочной надстройкой* исходной алгебраической системы S .

Определим натуральные числа по индукции

$$0 = \mathbf{nil}, \quad n + 1 = \langle 0, 1, \dots, n \rangle = \mathbf{cons}(n, n).$$

Базисными функциями называются

- (1) $f(\bar{x})$, где f — функция из σ^* ,
- (2) $f(\bar{x}) = c$, где c — любая константа из σ^* ,
- (3) $P(\bar{x})$ — предикат из σ , который мы будем отождествлять с его характеристической функцией со значениями в $\{0, 1\}$.
- (4) $\epsilon(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$
- (5) $I_m^n(x_1, \dots, x_n) = x_m$.

Функция F получена *суперпозицией* из функций f, f_1, \dots, f_m , если

$$F(\bar{x}) = f(f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x})).$$

Функция $f(\bar{x}, y)$ получена из функций $g(\bar{x}, y)$ и $h(\bar{x}, y, z)$ *примитивной рекурсией*, если

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y), \quad \text{для } y \in A, y = \mathbf{nil},$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle) = h(\bar{x}, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)).$$

Эта схема определяет последовательность вычислений: сначала вычисляются значения для элементов из A и **nil**, потом для более сложных списков и т.д.

Функция $f : HL(A)^k \rightarrow HL(A)$ называется *примитивно рекурсивной над списочной надстройкой*, если она получена из базисных конечным числом применений операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Наряду с примитивной рекурсией рассматривают более общую рекурсию, а именно говорят, что функция $f(\bar{x}, y)$ получена общей рекурсией из $g(\bar{x}, y)$, $h(\bar{x}, y, z, u, t)$, если

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y), \text{ для } y \in A, y = \mathbf{nil},$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle) = h(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle, \alpha_k, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)).$$

В [1] показано, что такая рекурсия не выводит за пределы класса примитивно вычислимых функций.

4 Примитивная рекурсивность над списочной надстройкой и примитивная вычислимость по Московакису

Введенное ранее множество A^* естественным образом вкладывается в $HL(A)$, то есть его можно считать подмножеством $HL(A)$, состоящим из всех списков длины 2 на каждом уровне. Удобно далее отождествлять \mathbf{nil} с 0.

Теорема 2. Пусть функция $f^* : A^{*n} \rightarrow A^*$ — примитивно вычисляемая по Московакису. Тогда по любому определению этой функции в смысле Московакиса можно эффективно найти определение примитивно рекурсивной функции над списочной надстройкой $f : HL(A)^n \rightarrow HL(A)$ такой, что ограничение f на A^{*n} совпадает с f^* .

Доказательство. Пусть $f^* : A^{*n} \rightarrow A^*$ — примитивно вычисляемая по Московакису функция, то есть она построена с использованием схем 1–9. Докажем утверждение теоремы индукцией по построению f^* .

- (1) Пусть $f^*(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi_i(\bar{x})$. Если φ_i — функция или предикат из σ , то соответствующая функция f будет той же самой, а потому примитивно вычислимой. Если же $\varphi_i(x, y) = \chi_{=(x, y)}$, то $f(x, y) = \epsilon(x, y)$.
- (2) $f^*(\bar{x}) = c$, где c — константа из σ , то c является базисной, поэтому $f(\bar{x}) = c$. Если $f^*(\bar{x}) = 0$, то $f(\bar{x}) = \mathbf{nil}$.
- (3) $f^*(\bar{x}, y) = y$. Тогда $f(\bar{x}, y) = y = I_{n+1}^{n+1}(\bar{x}, y)$, так как $\bar{x} = x_1 \dots x_n$.
- (4) $f^*(s, t, \bar{x}) = (s, t) \Rightarrow f(s, t, \bar{x}) = \mathbf{cons}(\mathbf{cons}(\mathbf{nil}, s), t)$.
- (5) $f^*(y, \bar{x}) = \pi y$, тогда

$$f(y, \bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ — праэлемент,} \\ \mathbf{head}(y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта функция примитивно вычислима, так как ее можно задать общей рекурсией:

$$f(y, \bar{x}) = \epsilon(\mathbf{nil}, \epsilon(y, \mathbf{nil})), \text{ если } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\}, \\ f(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle, \bar{x}) = \mathbf{head}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle).$$

(6) $f^*(y, \bar{x}) = \delta y \Rightarrow$

$$f(y, \bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \text{ — праэлемент,} \\ \mathbf{tail}(y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

(7) Пусть $f^*(\bar{x}) = g^*(h^*(\bar{x}), \bar{x})$, где g^*, h^* — примитивно вычислимые и для них уже построены соответствующие примитивно вычислимые функции g, h такие, что g^* (соответственно h^*) — ограничение на A^* функции g (соответственно h). Теперь с помощью суперпозиции получаем

$$f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}), \bar{x}).$$

Очевидно, что f^* — ограничение f на A^* .

(8) Пусть

$$\begin{aligned} f^*(y, \bar{x}) &= g^*(y, \bar{x}), \text{ если } y \in A^0, \\ f^*(\langle s, t \rangle, \bar{x}) &= h^*(f^*(s, \bar{x}), f^*(t, \bar{x}), s, t, \bar{x}) \end{aligned}$$

и для функций g^*, h^* уже построены соответствующие g, h . Определим f посредством общей рекурсии

$$\begin{aligned} f(y, \bar{x}) &= g(y, \bar{x}), \text{ если } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\}, \\ f(\langle s, t \rangle, \bar{x}) &= h(f(s, \bar{x}), f(t, \bar{x}), s, t, \bar{x}), \end{aligned}$$

а так как общая рекурсия не выводит за пределы примитивно вычислимых функций, то f — примитивно вычислима.

(9) Пусть

$$f^*(x_1, \dots, x_n) = g^*(x_{j+1}, x_1, \dots, x_j, x_{j+2}, \dots, x_n),$$

причем для g^* уже найдена нужная функция g . Теперь

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(I_{j+1}^n(\bar{x}), I_1^n(\bar{x}), \dots, I_j^n(\bar{x}), I_{j+2}^n(\bar{x}), \dots, I_n^n(\bar{x})).$$

□

Чтобы установить эквивалентность в другую сторону определим отображение $\alpha : HL(A) \rightarrow A^*$

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= a, \text{ если } a \in A, \\ \alpha(\mathbf{nil}) &= 0, \\ \alpha(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) &= s_n(\alpha(a_n), \dots, \alpha(a_1)). \end{aligned}$$

Если вспомнить, как определялись функции s_n , то можно сказать, что элементы списка, начиная с первого, отображение α складывает в стек, причем на самом дне стека лежит 0, который служит для распознавания начала списка.

Теорема 3. Пусть $f : HL(A)^n \rightarrow HL(A)$ — примитивно рекурсивная над списочной надстройкой функция. Тогда по любому определению этой функции как примитивно рекурсивной над списочной надстройкой можно эффективно найти определение примитивно вычислимой в смысле Московакиса функции $f^* : A^{*k} \rightarrow A^*$ такой, что

$$\alpha^{-1} f^* \alpha = f.$$

Доказательство. Докажем это утверждение индукцией по построению примитивно рекурсивной функции f .

- (1) $f(\bar{x})$ — функция или предикат σ . Тогда $f^* = f$, так как в этом случае если $\bar{x} \in A^n$, то и $f(\bar{x}) \in A$, иначе $f(\bar{x}) = 0$, поэтому

$$\alpha^{-1}f^*\alpha = f^* = f.$$

- (2) $f(\bar{x}) = c$ — константа из σ^* . Тогда $f^*(\bar{x}) = c$, если $c \in A$ и $f^*(\bar{x}) = 0$, если $c = \mathbf{nil}$.

- (3) $f(x) = \mathbf{head}(x)$, тогда f^* задается схемой примитивной рекурсии:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= 0, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*((s, t)) &= g(s, t, f^*(t)), \end{aligned}$$

где функция g определяется следующим образом

$$g(s, t, h) = \begin{cases} h, & \text{если } t \neq 0, \\ s, & \text{если } t = 0, \end{cases}$$

а потому, согласно [5], является примитивно вычислимой. Для того чтобы понять, что полученная функция f^* является аналогом **head**, достаточно вспомнить, как отображение α кодирует списки, и заметить, что $g(s, t, h)$ определяет, является ли s первым элементом в списке.

- (4) $f(x) = \mathbf{tail}(x)$, тогда f^* можно задать по схеме примитивной рекурсии 8:

$$\begin{aligned} f^*(x) &= 0, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*((s, t)) &= g(s, t, f^*(t)), \end{aligned}$$

где функция g определяется следующим образом:

$$g(s, t, x) = \begin{cases} (s, x), & \text{если } t \neq 0, \\ 0, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

- (5) Пусть $f(x, y) = \mathbf{cons}(x, y)$. Очевидно тогда, что

$$\begin{aligned} f^*(x, y) &= \begin{cases} (y, 0), & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*(x, y) &= (y, x), \text{ иначе.} \end{aligned}$$

Эта функция построена по схеме примитивной рекурсии.

- (6) $f(x, y) = \epsilon(x, y)$, тогда $f^*(x, y) = \chi_=(x, y)$.
- (7) $f(\bar{x}) = I_m^n(\bar{x}) = x_m$, f^* легко получается с помощью схемы 3 и схемы примитивной рекурсии 8.
- (8) Пусть $F(\bar{x}) = f(f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$, а для функций f, f_i уже построены соответствующие функции f^*, f_i^* . Без ограничения общности можно считать $n = m$ (так как добавление фиктивных переменных не выводит за пределы класса примитивно вычисляемых функций, то, если $n > m$, добавляем $n - m$ фиктивных

переменных в f , а если $n < m$, то в f_i). Для простоты разберем случай $n = 2$. Случай $n > 2$ рассматривается аналогично, но более громоздко. Итак, пусть

$$F(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)),$$

и построены функции f^*, f_1^*, f_2^* . Положим

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = f^*(x_1, x_2),$$

$$\bar{f}_1(x_1, x_2, x_3) = f_1^*(x_2, x_3).$$

По схеме суперпозиции получаем функцию

$$g(x_1, x_2, x_3) = \bar{f}(\bar{f}_1(x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3).$$

Еще раз применив суперпозицию, получим

$$\begin{aligned} F^*(x_1, x_2) &= g(f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) = \\ &= \bar{f}(\bar{f}_1(f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) = \\ &= \bar{f}(f_1^*(x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) = \\ &= f^*(f_1^*(x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2)). \end{aligned}$$

(9) Пусть

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y), \text{ для } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\}$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle) = h(\bar{x}, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)),$$

а для g, h уже найдены нужные g^*, h^* . Определим f^* примитивной рекурсией (учитываем, что при кодировании списка его последний элемент «лежит сверху», т.е. если $\alpha(a_1, \dots, a_k) = (s, t)$, то $s = \alpha(a_k)$, а $t = \alpha(a_1, \dots, a_{k-1})$):

$$\begin{aligned} f^*(\bar{x}, y) &= g^*(\bar{x}, y), \text{ если } y \in A^0, \\ f^*(\bar{x}, (s, t)) &= h^*(\bar{x}, t, f^*(\bar{x}, t), f^*(\bar{x}, s)). \end{aligned}$$

Здесь функция \bar{h}^* — это

$$\bar{h}^*(\bar{x}, t, f_1, f_2) = \begin{cases} f_2, & \text{если } t = 0, \\ h^*(\bar{x}, f_1, f_2), & \text{если } t \neq 0. \end{cases}$$

Функция \bar{h}^* нужна, чтобы контролировать конец списка (при этом $t = 0$) и обрывать рекурсивный спуск.

□

5 Сигма-определимые предикаты над $\mathbf{HF}(A)$

Рассмотрим семейство всех наследственно конечных множеств $HF(A)$ над A :

$$\begin{aligned} HF_0(A) &= A, \\ HF_{n+1}(A) &= HF_n(A) \cup \mathcal{P}_\omega(HF_n(A)), \\ HF(A) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} HF_n(A), \end{aligned}$$

здесь $\mathcal{P}_\omega(M)$ — семейство всех конечных множеств с элементами из M . Элементы A называются *праэлементами*, а элементы $HF(A) \setminus A$ — *множествами*. Далее вводится алгебраическая система

$$\mathbf{HF}(A) = \langle HF(A), \sigma_1 \rangle$$

с сигнатурой

$$\sigma_1 = \sigma \cup \{\emptyset, \in^2\} \cup HF(A),$$

в которую в качестве констант добавлены все элементы $HF(A)$, и где \emptyset — константный символ, интерпретируемый как пустое множество, а \in^2 — предикатный символ, интерпретируемый как предикат принадлежности. Причем предикаты старой сигнатуры σ интерпретируются на праэлементах как на обычных элементах A , а на множествах (т.е. если хотя бы один из аргументов — множество) ложью. Аналогично для функций из σ только в этом случае функция считается равной \emptyset .

Класс Δ_0 -формул определим по индукции

- Любая атомарная формула — Δ_0 -формула.
- Если Φ, Ψ — Δ_0 -формулы, то $\neg\Phi$, $\Phi \& \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \rightarrow \Psi$ — Δ_0 -формулы.
- Если Φ — Δ_0 -формула, x — переменная, t — терм, то $\exists x \in t \Phi$, $\forall x \in t \Phi$ — Δ_0 -формулы.

На основе Δ_0 -формул определим класс Σ -формул

- Δ_0 -формулы — Σ -формулы.
- Если Φ, Ψ — Σ -формулы, то $\Phi \& \Psi$, $\Phi \vee \Psi$ — Σ -формулы.
- Если Φ — Σ -формула, x — переменная, t — терм, то $\exists x \in t \Phi$, $\forall x \in t \Phi$, $\exists x \Phi$ — Σ -формулы.

Теперь $P \subseteq HF(A)^k$ Σ -предикат, если существует такая Σ -формула Φ , что

$$P(a_1, \dots, a_k) \Leftrightarrow \mathbf{HF}(A) \models \Phi(a_1, \dots, a_k).$$

Предикат $P \subseteq HF(A)^k$ называется Δ -предикатом, если одновременно P и $HF(A)^k \setminus P$ — Σ -предикаты. Функция $f : HF(A)^k \rightarrow HF(A)$ — Σ -функция, если ее график

$$\Gamma_f = \{(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}) \text{ такие, что } f(a_1, \dots, a_k) = a_{k+1}\}$$

есть Σ -предикат.

Легко заметить, что все элементы-множества образуют Δ -подмножество в $HF(A)$. Действительно, они выделяются следующей Δ_0 -формулой

$$\Phi_S(x) = (x = \emptyset) \vee \exists y \in x (y = y).$$

Аналогично все праэлементы — это элементы $HF(A)$, не являющиеся множествами, поэтому их выделяет Δ_0 -формула

$$\Phi_U(x) = \neg\Phi_S(x).$$

Покажем Σ -определимость некоторых функций, которые пригодятся для последующего изложения. Двуместная функция $\{, \} : x, y \mapsto \{x, y\}$ — неупорядоченная пара определяется следующей Δ_0 -формулой

$$\Phi_{\{, \}}(x, y, z) = (x \in z) \& (y \in z) \& (\forall u \in z (u = x \vee u = y)).$$

Для определения упорядоченной пары обычно применяется прием Мостовского:

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Δ_0 -формула для отношения $\langle x, y \rangle = z$

$$\Phi_{\langle, \rangle}(x, y, z) = \exists u \in z \exists v \in z \Phi_{\{, \}}(u, v, z) \& \Phi_{\{, \}}(x, x, u) \& \Phi_{\{, \}}(x, y, v).$$

Любую формулу можно привести к такому виду, что отрицание будет стоять только перед атомарными подформулами. Подформула P входит в такую формулу $\Phi(\bar{x}, P)$ *позитивно*, если в ней не встречается $\neg P$ и нет импликаций. Свяжем с любой Σ -формулой $\Phi(\bar{x}, P)$ ($P \subseteq HF(A)^k$) оператор

$$\Gamma_{\Phi}^{\mathbf{HF}(A)} : HF(A)^k \rightarrow HF(A)^k,$$

который действует так:

$$\Gamma_{\Phi}^{\mathbf{HF}(A)}(P) = \{(a_1, \dots, a_k) : \langle \mathbf{HF}(A), P \rangle \models \Phi(a_1, \dots, a_k)\}.$$

Подмножество $\Gamma_* \subseteq HF(A)^k$ называется *неподвижной точкой* оператора Γ , если $\Gamma(\Gamma_*) = \Gamma_*$. неподвижная точка — *наименьшая*, если содержится в любой неподвижной точке оператора.

Нам далее понадобится следующая теорема Ганди [3]

Теорема 4. Пусть Φ — Σ -формула, в которую предикат P входит позитивно, тогда наименьшая неподвижная точка оператора $\Gamma_{\Phi}^{\mathbf{HF}(A)}$ является Σ -подмножеством $HF(A)^k$.

Эта теорема является аналогом известной теоремы о рекурсии в классической теории алгоритмов, так как позволяет строить Σ -подмножества при помощи рекурсивных определений.

6 Сигма-определимость вычислимости по Московакису

Введем следующее отображение $\tau : A^* \rightarrow HF(A)$

$$\begin{aligned}\tau(0) &= \emptyset, \\ \tau(a) &= a, \text{ если } a \in A, \\ \tau((a, b)) &= \langle \tau(a), \tau(b) \rangle.\end{aligned}$$

Для краткости далее $\tau(n)$, где n — натуральное число в A^* , будем обозначать просто n .

Лемма 1. *Образ $\tau(A^*)$ Σ -определим в $\mathbf{HF}(A)$.*

Доказательство. Легко видеть, что множество $\tau(A^*)$ является наименьшей неподвижной точкой Σ -оператора $\Gamma_{\Phi_\tau[x]}^{\mathbf{HF}(A)}$, где

$$\Phi_\tau(x) = \Phi_U(x) \vee x = \emptyset \vee \exists u \exists v (\Phi_{\langle \cdot, \cdot \rangle}(u, v) \& P(u) \& P(v)),$$

а значит, по теореме Ганди $\tau(A^*)$ — Σ -подмножество $HL(A)$. \square

Теорема 5. *Пусть $f : A^{*k} \rightarrow A^*$ — вычислимая по Московакису функция. Тогда по любому определению этой функции в смысле Московакиса можно эффективно найти Σ -формулу, задающую отношение $P \subseteq HF(A)^k$, определенное как*

$$P(\tau(x_1), \dots, \tau(x_k), \tau(y)) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_k) = y.$$

Таким образом, P есть Σ -предикат.

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы для примитивно вычислимых функций. Доказывать будем индукцией по построению функции f .

- (1) Пусть $f(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})$. Если φ_i — функция или предикат сигнатуры σ , то P определим Σ -формулой

$$\begin{aligned}\Phi_P(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) &= \left(\Phi_U(x_1) \& \dots \& \Phi_U(x_k) \& \right. \\ &\left. \& \Phi_{\varphi_i}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \right) \vee (x_{k+1} = \emptyset),\end{aligned}$$

где Φ_{φ_i} — предикат, определяющий φ_i , которая лежит в сигнатуре σ . Если же $\varphi_i(x_1, x_2) = \chi_{=}(x_1, x_2)$, то

$$\Phi_P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 = x_2 \& x_3 = 1) \vee (x_1 \neq x_2 \& x_3 = 0).$$

- (2) Пусть $f(\bar{x}) = c$, где c — некоторая константа из σ , тогда P определяется Σ -формулой

$$\Phi_P(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = (x_{k+1} = c).$$

Если же $f(\bar{x}) = 0$, то

$$\Phi_P(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = (x_{k+1} = \emptyset).$$

- (3) Пусть $f(x) = x$, очевидно, что тогда

$$\Phi_P(x_1, x_2) = (x_1 = x_2).$$

(4) Если $f(s, t) = (s, t)$, то

$$\Phi_P(x_1, x_2, x_3) = \Phi_{\langle, \rangle}(x_1, x_2, x_3).$$

(5) Пусть $f(x) = \pi x$, тогда

$$\begin{aligned} \Phi_\pi(x, y) &= (\Phi_U(x) \& y = 1) \vee \\ &\vee (x = \emptyset \& y = 0) \vee \exists u \Phi_{\langle, \rangle}(y, u, x). \end{aligned}$$

(6) Пусть $f(x) = \delta x$, тогда

$$\begin{aligned} \Phi_\delta(x, y) &= (\Phi_U(x) \& y = 1) \vee \\ &\vee (x = \emptyset \& y = 0) \vee \exists u \Phi_{\langle, \rangle}(u, y, x). \end{aligned}$$

(7) Пусть $f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}), \bar{x})$, а для функций g, h уже найдены соответствующие Σ -формулы $\Phi_g(x_1, \bar{x}, y)$, $\Phi_h(\bar{x}, y)$. Тогда P можно определить как

$$\Phi_P(\bar{x}, y) = \exists z \Phi_h(\bar{x}, z) \& \Phi_g(z, \bar{x}, y).$$

(8) Если

$$\begin{aligned} f(y, \bar{x}) &= g(y, \bar{x}), \text{ если } y \in A^0, \\ f((s, t), \bar{x}) &= h(f(s, \bar{x}), f(t, \bar{x}), s, t, \bar{x}) \end{aligned}$$

и функции g, h определяются соответственно формулами $\Phi_g(y, \bar{x}, z)$ и $\Phi_h(x_1, x_2, x_3, x_4, \bar{x}, y)$, то график f является наименьшей неподвижной точкой оператора, определяемого следующей Σ -формулой

$$\begin{aligned} \Phi_P(y, \bar{x}, z) &= (\Phi_U(y) \& \Phi_g(y, \bar{x}, z)) \vee \exists u \exists v \exists s \exists t (\Phi_\pi(y, s) \& \\ &\& \Phi_\delta(y, t) \& P(s, \bar{x}, u) \& P(t, \bar{x}, v) \& \Phi_h(u, v, s, t, \bar{x}, z)), \end{aligned}$$

а значит, по теореме Ганди, соответствующий P — Σ -предикат.

(9) Пусть

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(x_{j+1}, x_1, \dots, x_j, x_{j+2}, \dots, x_k)$$

и функция g определяется Σ -формулой $\Phi_g(\bar{x}, y)$, тогда

$$\Phi_f(x_1, \dots, x_k, y) = \Phi_g(x_{j+1}, x_1, \dots, x_j, x_{j+2}, \dots, x_k, y).$$

Таким образом, мы доказали теорему для примитивно вычислимых функций. Теперь воспользуемся теоремой 1 о нормальной форме функции, вычислимой по Московакису. Согласно ей для любой вычислимой функции $f : A^{*k} \rightarrow A^*$ существуют две примитивно вычислимые функции g, h такие, что

$$f(\bar{x}) = g(\bar{x}, \nu y \{h(\bar{x}, y) \rightarrow 0\}).$$

Как было доказано выше, графики функций g и h определимы некоторыми Σ -формулами $\Phi_g(\bar{x}, y, z)$ и $\Phi_h(\bar{x}, y, z)$, поэтому график функции f определяется следующей Σ -формулой

$$\Phi_f(\bar{x}, y) = \exists z \Phi_h(\bar{x}, z, 0) \& \Phi_g(\bar{x}, z, y).$$

□

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения по улучшению текста статьи.

References

- [1] I.V. Ashaev, V.Ya. Belyaev, A.G. Myasnikov, *Toward a generalized computability theory*, Algebra and Logic, **32:4** (1993), 183–205.
- [2] L. Blum, M. Shub, S. Smale, *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines*, Bull. Amer. Math. Soc., **21** (1989), 1–46.
- [3] Yu.L. Ershov, *Definability and Computability*, Springer New York, NY, 1996.
- [4] A. Hemmerling, *Computability and Complexity over structures*, Math. Logic Quart., 44:1 (1998), 1–44.
- [5] Y.N. Moschovakis, *Abstract first order computability*, Trans. Amer. Math. Soc., **138** (1969), 427–464.

NIKITA RUSLANOVICH KARATSEV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PEVTSOVA 13,
OMSK, 644099, RUSSIA
Email address: nikita.karatsev@gmail.com

ALEXANDER NIKOLAEVICH RYBALOV
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PEVTSOVA 13,
OMSK, 644099, RUSSIA
Email address: alexander.rybalov@gmail.com