# Рецензия на работу Н.Р. Карцева и А.Н. Рыбалова «Эквивалентность трёх моделей вычислимости в алгебраических системах» для журнала «Сибирские электронные математические известия»

В работе рассматриваются три популярных подхода к вычислимости над произвольными структурами: вычислимость по Московакису, вычислимость в списочной надстройке по Ашаеву, Беляеву и Мясникову и $\Sigma$–определимость в наследственно–конечной надстройке. В ней анонсирован результат об эквивалентности этих трёх подходов. К сожалению, при чтении работы возникает много вопросов, и я пока что не могу сказать, что анонсированный результат полностью доказан в данной работе. Думаю, что очень многие интуитивно чувствуют, что такой результат (при соответствующих уточнениях) верен, но опубликованных подробных его доказательств я пока что не видел, и поэтому появление подобной работы было бы весьма желательно. И я желаю авторам довести начатое до конца.

Приведу некоторые замечания и комментарии.

1. *С. 3, последний абзац.*

   Введённое понятие характеристики множества $\varphi$ нигде не использовано, и, по–моему, его стоит убрать.

2. *С. 4. В абзаце посредине, начинающемся с "Теперь функция ..."*

   Здесь наверное стоит упомянуть, что функции получаются из функций, содержащихся в $\varphi$, иначе определение непонятно.

3. *С. 4, строка 6 снизу (доопределение для $P_i$).*

   Судя по тому, что $P_i$ может принимать значение 0, авторы предполагают, что предикаты являются функциями в какое–то множество значений истинности, в котором судя по всему 0 обозначает "ложь" (а что берётся в качестве значения "истина"? 1 ?). Используемую трактовку понятия предиката как функции хорошо бы явно сформулировать и в дальнейшем придерживаться её.

4. *С. 5, в самом начале.*

   Может быть стоит для большей чёткости уточнить: “в схеме 1” заменить на “в схеме 1 в правой части” и то же самое сделать для схемы 2?

   Кроме того, в этом абзаце упомянуты только функции. Означает ли это, что предикаты не играют никакой роли в определениях (что, судя по всему, не так)?

5. *С. 5, первый абзац.*

   Согласно определению на с. 4, схема (2) $f(\bar{x}) = c$ никак не ограничивает выбор $c \in A^*$, а с другой стороны на с. 5. в первом абзаце авторы пишут: “Условимся, также, что в схеме 2 элемент $c$ берётся из констант сигнатуры $\sigma$ или равным 0”. Получается, что мы на ходу меняем уже сформулированное определение функций, вычислимых по Московакису?

   Здесь необходимо внести ясность.

6. *С. 6, определение базисных функций.*

   В п. (3), до тех пор пока не будет объявлено, что мы отождествляем предикаты с их характеристическими функциями, этот пункт не вполне понятен.

7. *С. 6, определение схемы примитивной рекурсии.*

   Здесь быть может стоит добавить стандартное замечание о том, что эта схема — это не просто два равенства, а некоторое обозначение для последовательности вычислений: сначала мы вычисляем значения для элементов из $A$ и **nil**, потом для более сложных списков и т.д. Хорошо известно, что при разных трактовках мы получаем разные результаты применения этой схемы.

8. *С. 6, определение $\mu_y$ в самом низу.*

   Это определение вызывает вопросы. Пусть $\mathcal{N} = \langle \omega; +, \times, <, 0, 1 \rangle$. Видимо, все вычислимые над $\mathrm{HL}(\mathcal{N})$ функции из $\omega$ в $\omega$ должны быть частично рекурсивными, иначе объявленный в работе результат становится неверным для $A = \mathcal{N}$. Если считать уже известным, что все примитивно рекурсивные функции над $\mathrm{HL}(\mathcal{N})$ вычислимы над списочной надстройкой, то определение оператора $\mu_y$, так, как оно приведено в работе, выведет нас за класс частично рекурсивных функций. Действительно, как хорошо известно, любое непустое вычислимо перечислимое множество можно перечислить примитивно рекурсивной функцией. Пусть $h : \omega \to \omega$ — примитивно рекурсивная функция с невычислимой областью значений. Определим примитивно рекурсивную функцию

   $$g(x, y) = \operatorname{sg} y \cdot \left( \operatorname{sg} \prod_{i=0}^{y} |h(i) - x| \right).$$

Функция $\mu_y g(x,y)$ уже не будет частично рекурсивной. Действительно из определения функции $g$ следует, что для любого $x$ справедливо $g(x,0)=0$, и существует $y>0$ со свойством $g(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$. Значение $\mu_y g(x,y)$ определено тогда и только тогда, когда $g(x,y)$ принимает значение 0 ровно один раз, т.е. тогда и только тогда, когда $x \notin A$. Отсюда следует, что область определения функции $\mu_y g(x,y)$ совпадает с неперечислимым множеством $\omega \setminus A$, и следовательно сама эта функция не частично рекурсивна.

9. *С. 7, формулировка Леммы 1.*

   Предлагаю сделать формулировку насчёт эффективности более аккуратной, примерно в таком стиле: “Тогда по любому определению этой функции в смысле Московакиса можно эффективно найти определение для ...”. Это же относится и к последующим формулировкам.

10. *С. 7, начало доказательства Леммы 1.*

    Не вполне понятно сведение доказательства к примитивно вычислимым функциям: дело в том, что в теореме Московакиса о нормальной форме участвует оператор $\nu$, который может выдать и не одно, а несколько значений (во всяком случае про единственность в Вашей работе ничего не сказано) и, видимо, результат не будет зависеть от того, какое из этих значений будет использовано, в то время как в определении вычислимости в списочной надстройке оператор $\mu$ выдаст значение только в случае если подобное значение единственное. Здесь необходимы пояснения.

11. *С. 7, пункт (1).*

    Почему здесь рассмотрено только предположение $f^*(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})$? В оригинальном п. (1) у $f$ есть ещё переменные.

12. *С. 11, определение HF.*

    Это определение некорректно. Действительно, заметим, что согласно этому определению элементы из $A$ (т.е. праэлементы) могут лежать только во множестве $\mathrm{HF}_0(A) = A$, а не–праэлементы — только в множествах вида $\mathrm{HF}_n(A)$, $n > 0$. Пусть $a \in A$. Элемент $\{a, \{a\}\} \in \mathrm{HF}(A)$ принадлежит какому–то из множеств $\mathrm{HF}_{n+1}(A)$. Из определения, данного в работе, следует, что $a, \{a\} \in \mathrm{HF}_n(A)$. Отсюда получаем, что одновременно должны выполняться условия $n = 0$ и $n > 0$. Противоречие.

    Исправить это можно, например, заменив вторую формулу определения на
    $$\mathrm{HF}_{n+1}(A) = \mathcal{P}_\omega(\mathrm{HF}_n(A)) \cup \mathrm{HF}_n(A).$$

13. *С. 11, в середине* говорится о RQ–формулах, а потом сразу о $\Delta_0$–формулах. RQ–формулы далее нигде не используются.

14. *С. 12, середина страницы.*

    Определение $\Phi_{\{,\}}(x, y, z)$ приводимое авторами, неверно, т.к. ему удовлетворяют, например $x$, $y$ и $z = \{x\}$.

15. *С. 12,* далее снова упоминаются RQ–формулы, про которые я уже писал.

16. *С. 13, 10 строка, отдельная формула.*

    $\Phi_U(x)$ ранее не определялось. Кроме того, скобку перед кванторами нужно сдвинуть вправо до $\Phi$.

    *[Далее участок текста до конца с. 14 я не проверял.]*

17. *С. 15, 11 и 12 снизу строки.*

    Использован не определённый ранее знак $\equiv_s$.

18. *С. 16, последняя строка.*

    Данное определение $\chi_\Phi(\bar{y})$ даст нам функцию, значение которой вполне может оказаться отличным от 0 и 1, так как она выдаёт $x$, удовлетворяющий некоторому условию.

19. *По поводу Леммы 5 на с. 15* у меня возник вопрос.

    Возможно, я что–то недопонял в определениях, но мне кажется, что тут возникло противоречие.

    Из формулировки следует, что любой $\Sigma$–предикат на $\mathrm{HF}(\mathcal{N})$, где $\mathcal{N} = \langle \omega; +, \times, <, 0, 1\rangle$, вычислим по Московакису. Пусть $A \subseteq \omega$ — вычислимо перечислимое невычислимое множество. Оно будет также $\Sigma$—предикатом на $\mathrm{HF}(\mathcal{N})$. Из леммы следует, что $A$ вычислимо по Московакису. По тезису Чёрча оно вроде бы должно быть вычислимым. Противоречие.

20. Формулировки результатов работы не предполагают наличие параметров, которые при изучении определимости над произвольными структурами играют важную роль и отсутствие которых существенно обедняет классы “вычислимых” функций. Например, из определения, используемого автором, в котором параметры в определении функций не предусмотрены, формально следует, что даже постоянные функции на бесконечной структуре пустой сигнатуры, не являются $\Sigma$–функциями над HF. Хотелось бы, чтобы авторы как–то прокомментировали это.

21. Меня заинтересовала процитированная авторами работа Хэммерлинга [4], но ни эту работу в содержании журнала Math. Logic Quart. с указанными координатами ни вообще эту работу в интернете я не нашёл. Ссылку хорошо было бы уточнить.

Считаю, что статью надо переработать и после заново рецензировать.

С уважением,
Рецензент