S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 510.652
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 11U99

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ТРЕХ МОДЕЛЕЙ ВЫЧИСЛИМОСТИ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Н.Р. Карацев, А.Н. Рыбалов

Abstract: In this paper, we study three models of computability over an arbitrary algebraic structure: Σ-definability by Ershov, list-superstructure computability by Ashaev, Belyaev and Myasnikov, and computability of Moschovakis. We prove equivalence of these models in the sense that any function computable in any one model is also computable in any other model.

Keywords: generalized computability, Sigma-definability, list-superstructure, Moschovakis model.

1 Введение

В классической теории сложности вычислений основной моделью является машина Тьюринга. Эта модель, с одной строны, позволяет адекватно изучать такие важные понятия как время работы алгоритма и используемую в процессе вычисления память. С другой стороны, машина Тьюринга очень неудобна для самого процесса программирования конкретных алгоритмов, так как является языком программирования очень низкого уровня, вроде ассемблера или языка машинных команд. В то

Karatsev, N.R., Rybalov, A.N., Equivalence of three models of computations in algebraic structures.

Поступила 14 января 2026 г., опубликована 30 июня 2026 г.

же время при разработке конкретных алгоритмов в качестве элементарных шагов используются более высокоуровневые операции, привычные для данной предметной области. Например, теоретико-числовые алгоритмы формулируются в терминах стандартных арифметических операций с целыми числами: сложение, вычитание, умножение, деление с остатком. Алгоритмы линейной алгебры используют стандартные операции с векторами, матрицами и т.д. При этом понятия временной и пространственной сложности таких алгоритмов также могут изучаться на таком более высоком уровне.

В общем случае алгоритм в качестве элементарных шагов использует операции и предикаты из языка (сигнатуры) некоторой алгебраической системы. Также для облегчения программирования вводятся некоторые надстройки над основным множеством алгебраической системы: строки, списки, и т.п. Такой подход берет свое начало с работы Блюм, Шуба и Смейла [2], в которой была развита теория вычислимости и сложности вычислений над кольцами и полями вещественных и комплексных чисел. Авторы рассмотрели аналог машин Тьюринга для работы со строками вещественных чисел, на их основе определили аналоги классических полиномиальных классов **P** и **NP**, а также развили теорию NP-полноты.

В дальнейшем были предложены несколько подходов к понятию алгоритмического процесса над произвольными областями и структурами: Σ-определимость Ю. Л. Ершова [3], вычислимость над списочной надстройкой И. В. Ашаева, В. Я. Беляева и А. Г. Мясникова [1], подход Я. Московакиса к вычислимости над любыми множествами [5], S-вычислимость А. Хеммерлинга [4]. Естественной задачей является доказательство эквивалентности этих подходов. Действительно, несмотря на существенные отличия, во многих из них вводится некоторая надстройка над рассматриваемой областью, которая позволяет работать с ее элементами как и в случае натуральных чисел, а именно: составлять кортежи, матрицы, сравнивать созданные объекты на предмет равенства, принадлежности и т.д. Это может быть семейство наследственно конечных множеств в [3], списочная надстройка из [1] или некоторая структура, замкнутая относительно взятия упорядоченной пары [5]. Обычно, надстройка должна содержать натуральные числа и моделировать вычислимость на них — это является подтверждением естественности данного подхода. Другой аргумент в пользу принятия рассматриваемых подходов как формального аналога понятия алгоритма над неконструктивными областями — это как раз доказательство их эквивалентности.

В данной работе устанавливается эквивалентность трех подходов к обобщенной вычислимости над произвольными алгебраическими системами: Σ-определимость над допустимыми множествами Ю. Л. Ершова [3], вычислимость по Московакису [5] и вычислимость над списочной надстройкой И. В. Ашаева, В. Я. Беляева и А. Г. Мясникова [1]. Это означает, что любая функция, вычислимая в одной модели будет вычислима и в любой другой модели. На протяжении всей статьи $S = \langle A, \sigma \rangle$

— произвольная алгебраическая система с непустым основным множеством A и конечной сигнатурой σ.

2 Вычислимость по Московакису

Дополним A некоторым элементом 0, не лежащим в A. Обозначим

$$A^0 = A \cup \{0\}.$$

Далее определим надстройку A^* по индукции

$$\begin{array}{l}\text{если } x \in A^0 \text{ тогда } x \in A^*,\\ \text{если } x, y \in A^* \text{ тогда } (x, y) \in A^*.\end{array}$$

Здесь (x, y) — упорядоченная пара элементов x и y. Таким образом, для каждого $z \in A^*$ либо $z \in A^0$, либо существуют некоторые однозначно определенные элементы $x, y \in A^*$ такие, что $z = (x, y)$.

В структуре A^* можно определить натуральные числа посредством индукции

$$0 = 0,\ n + 1 = (n, 0).$$

Определим для любого $z \in A^*$ функции-компоненты πz и δz следующим образом

$$\pi 0 = \delta 0 = 0,$$

$$\pi z = \delta z = 1,\ \text{если } z \in A,$$

$$\pi z = x,\ \delta z = y,\ \text{если } z = (x, y).$$

Московакис рассматривает функции из A^* в A^*. Определим несколько функций, которые пригодятся для дальнейшего. Положим

$$s_0(x) = (x, 0),\ s_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}) = (x_0, s_n(x_1, \ldots, x_{n+1})),$$

и

$$(x)_0 = \pi x,\ (x)_{i+1} = (\delta x)_i.$$

Легко видеть, что если

$$x = s_n(x_0, \ldots, x_n),$$

тогда для $i = 0, \ldots, n$

$$(x)_i = x_i.$$

Наконец, положим

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = s_n(n, x_1, \ldots, x_n).$$

Аналогично,

$$\text{если } x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle,\ \text{тогда для } i = 1, \ldots, n\ (x)_i = x_i.$$

Перейдем теперь непосредственно к определению функций, вычислимых по Московакису. Пусть $\varphi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_l\}$ — конечный список функций из A^* в A^*, соответственно $n_1, \ldots, n_l$ аргументов. Набор $l, n_1, \ldots, n_l$ назовем *характеристикой* множества φ. Рассмотрим следующие схемы:

(1) $f(y_1, \dots, y_{n_i}, \bar{x}) = \varphi_i(y_1, \dots, y_{n_i})$.
(2) $f(\bar{x}) = c,\ c \in A^*$.
(3) $f(y, \bar{x}) = y$.
(4) $f(s, t, \bar{x}) = (s, t)$.
(5) $f(y, \bar{x}) = \pi y$.
(6) $f(y, \bar{x}) = \delta y$.
(7) $f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}), \bar{x})$.
(8) $\begin{cases} f(y, \bar{x}) = g(y, \bar{x}), \text{ если } y \in A^0, \\ f((s,t), \bar{x}) = h(f(s, \bar{x}), f(t, \bar{x}), s, t, \bar{x}). \end{cases}$
(9) $f(\bar{x}) = g(x_{j+1}, x_1, \dots, x_j, x_{j+2}, \dots, x_n)$.
(10) $f(\bar{x}) = \nu y\{g(y, \bar{x}) \to 0\}$.

Эти схемы нужны для того, чтобы из одних, уже полученных функций получать другие. Схемы 1–6 задают некоторые базисные функции, схема 7 — суперпозиция, схема 8 напоминает примитивную рекурсию, в схеме 10 запись

$$\nu y\{g(y, \bar{x}) \to 0\}$$

означает

$$\text{любое } y \text{ такое, что } g(y, \bar{x}) = 0,$$

то есть некоторый аналог оператора минимизации в обычной теории вычислимости, но, в отличие от него, данный оператор может давать и многозначные функции, так как элементов y с таким свойством может быть более одного.

Теперь функция $f : A^{*k} \to A^*$ называется *примитивно вычислимой по Московакису*, если она получена по схемам 1–9, и *вычислимой по Московакису*, если получена с помощью схем 1–10.

Легко заметить, что если функции φ_i однозначны (в дальнейшем так и будет), то все примитивно и просто вычислимые функции однозначные, так как схемы 1–9 по однозначным функциям дают однозначные. Класс же вычислимых функций может содержать и неоднозначные функции из-за неоднозначности применения схемы 10. В этом случае можно говорить об отношении, задаваемом схемами 1–10.

Доопределим функции и предикаты из σ на A^* следующим образом

$$f_i(\bar{x}) = \begin{cases} f_i(\bar{x}), \text{ если все компоненты } \bar{x} \in A, \\ 0, \text{иначе.} \end{cases}$$

$$P_i(\bar{x}) = \begin{cases} P_i(\bar{x}), \text{ если все компоненты } \bar{x} \in A, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Пусть $\chi_=(a, b)$ — характеристическая функция предиката равенства, т.е.

$$\chi_=(a, b) = \begin{cases} 1, \text{ если } a = b, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Положим $\varphi = \{$функции и предикаты из $\sigma, \chi_=\}$ — список из определения функций, вычислимых по Московакису. Таким он останется до конца статьи и при любом упоминании вычислимых по Московакису функций будет подразумеваться, что в схеме 1 использовались функции только из множества φ. Условимся также, что в схеме 2 элемент c берется из констант сигнатуры σ, или равным 0.

Для последующего важна теорема о нормальной форме вычислимой по Московакису функции, доказанная в [5].

Теорема 1. *Для любой вычислимой по Московакису функции $f : {A^*}^k \to A^*$ существуют примитивно вычислимые функции $g, h : {A^*}^{k+1} \to A^*$ такие, что*

$$f(\bar{x}) = g(\bar{x}, \nu y\{h(\bar{x}, y) \to 0\}).$$

Там же доказано, что если $f(\bar{x})$ — примитивно вычислима по Московакису, то и $f(\bar{y}, \bar{x}) = f(\bar{x})$ тоже примитивно вычислима. Разбор случаев также не выводит за пределы класса примитивно вычислимых функций, то есть функция

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} f_1(\bar{x}), & \text{если } g(\bar{x}) = 1, \\ f_2(\bar{x}), & \text{иначе.} \end{cases}$$

примитивно вычислима, если таковыми являются функции f_1, f_2, g.

3 Вычислимость над списочной надстройкой

Построим следующие множества

$$HL_0(A) = A,$$

$$HL_{n+1}(A) = HL_n(A) \cup L(HL_n(A)),$$

где $L(M)$ — множество конечных списков с элементами из M. Теперь списочное расширение основного множества A — это

$$HL(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} HL_n(A).$$

Элементы множества A называются *праэлементами*, остальные — *списками.* Расширяем сигнатуру до

$$\sigma^* = \sigma \cup \{\mathbf{nil}, \mathbf{head}^{(\mathbf{1})}, \mathbf{tail}^{(\mathbf{1})}, \mathbf{cons}^{(\mathbf{2})}\}.$$

Здесь **nil** — пустой список, а функции определяются следующим образом: если a – праэлемент, $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in HL(A)$, то

$$\begin{array}{l} \mathbf{head}(\mathbf{nil}) = \mathbf{head}(a) = \mathbf{nil}, \\ \mathbf{head}(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle) = \alpha_1; \\ \\ \mathbf{tail}(\mathbf{nil}) = \mathbf{tail}(a) = \mathbf{nil}, \\ \mathbf{tail}(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle) = \langle \alpha_2, \ldots, \alpha_n \rangle; \\ \\ \mathbf{cons}(a, \alpha) = \mathbf{nil}, \\ \mathbf{cons}(\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle, \alpha) = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha \rangle. \end{array}$$

Таким образом, **head** — взятие первого элемента списка, **tail** — отбрасывание первого элемента, **cons** — добавление одного списка в конец второго. Доопределим функции и предикаты исходной сигнатуры σ на списках как равные **nil**. В итоге получаем новую алгебраическую систему

$$HL(S) = \langle HL(A), \sigma^* \rangle,$$

которая называется *списочной надстройкой* исходной алгебраической системы S.

Определим натуральные числа по индукции

$$0 = \mathbf{nil},\ n+1 = \langle 0, 1, \ldots, n\rangle = \mathbf{cons}(n, n).$$

Базисными функциями называются

(1) $f(\bar{x})$, где f — функция из σ^*,
(2) $f(\bar{x}) = c$, где c — любая константа из σ^*,
(3) $P(\bar{x})$ — предикат из σ,
(4) $\epsilon(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$
(5) $I^n_m(x_1, \ldots, x_n) = x_m$.

Функция F получена *суперпозицией* из функций $f, f_1, \ldots, f_m$, если

$$F(\bar{x}) = f(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})).$$

Функция $f(\bar{x}, y)$ получена из функций $g(\bar{x}, y)$ и $h(\bar{x}, y, z)$ *примитивной рекурсией*, если

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y),\ \text{для } y \in A, y = \mathbf{nil},$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k\rangle) = h(\bar{x}, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)).$$

Функция $f : HL(A)^k \to HL(A)$ называется *примитивно вычислимой над списочной надстройкой*, если она получена из базисных конечным числом применений операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Наряду с примитивной рекурсией рассматривают более общую рекурсию, а именно говорят, что функция $f(\bar{x}, y)$ получена общей рекурсией из $g(\bar{x}, y)$, $h(\bar{x}, y, z, u, t)$, если

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y),\ \text{для } y \in A, y = \mathbf{nil},$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k\rangle) = h(\bar{x}, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\rangle, \alpha_k, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)).$$

В [1] показано, что такая рекурсия не выводит за пределы класса примитивно вычислимых функций.

Будем говорить, что функция $f(\bar{x})$ получена из функции $g(\bar{x}, y)$ с помощью *неограниченного поиска*, если

$$f(\bar{x}) = a \Leftrightarrow g(\bar{x}, a) = 0 \text{ и элемент } a \text{ единственный такой, что } g(\bar{x}, a) = 0.$$

В случае, если таких элементов много, или такого элемента не существует, считаем, что функция не определена. Обозначим это как $f(\bar{x}) = \mu_y g(\bar{x}, y)$.

Функция $f : HL(A)^k \to HL(A)$ называется *вычислимой над списочной надстройкой*, если она получена из базисных конечным числом применений операций суперпозиции, примитивной рекурсии и неограниченного поиска.

Имеет место следующая теорема о нормальной форме [1].

Теорема 2. *Для любой вычислимой над списочной надстройкой функции $f : HL(A)^k \to HL(A)$ существуют примитивно вычислимые над списочной надстройкой функции $g, h : HL(A)^{k+1} \to HL(A)$ такие, что*

$$f(\bar{x}) = g(\bar{x}, \mu_y h(\bar{x}, y)).$$

4 Вычислимость над списочной надстройкой и вычислимость по Московакису

Введенное ранее множество A^* естественным образом вкладывается в $HL(A)$, то есть его можно считать подмножеством $HL(A)$, состоящим из всех списков длины 2 на каждом уровне. Удобно далее отождествлять **nil** с 0.

Лемма 1. *Пусть функция $f^* : A^{*n} \to A^*$ — вычислима по Московакису. Тогда можно эффективно найти вычислимую над списочной надстройкой функцию $f : HL(A)^n \to HL(A)$ такую, что ограничение f на A^{*n} совпадает с f^*.*

Доказательство. С учетом теорем о нормальной форме 1 и 2, достаточно доказать утверждение для примитивно вычислимых функций.

Пусть $f^* : A^{*n} \to A^*$ — примитивно вычислимая по Московакису функция, то есть она построена с использованием схем 1–9. Докажем утверждение теоремы индукцией по построению f^*.

(1) Пусть $f^*(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})$. Если φ_i — функция или предикат из σ, то соответствующая функция f будет той же самой, а потому примитивно вычислимой. Если же $\varphi_i(x, y) = \chi_=(x, y)$, то $f(x, y) = \epsilon(x, y)$.

(2) $f^*(\bar{x}) = c$, где c — константа из σ, то c является базисной, поэтому $f(\bar{x}) = c$. Если $f^*(\bar{x}) = 0$, то $f(\bar{x}) = \mathbf{nil}$.

(3) $f^*(\bar{x}, y) = y$. Тогда $f(\bar{x}, y) = y = I^{n+1}_{n+1}(\bar{x}, y)$, так как $\bar{x} = x_1 \dots x_n$.

(4) $f^*(s, t, \bar{x}) = (s, t) \Rightarrow f(s, t, \bar{x}) = \mathbf{cons}(\mathbf{cons}(\mathbf{nil}, s), t)$.

(5) $f^*(y, \bar{x}) = \pi y$, тогда

$$f(y, \bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } y - \text{праэлемент}, \\ \mathbf{head}(y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эта функция примитивно вычислима, так как ее можно задать общей рекурсией:

$$f(y, \bar{x}) = \epsilon(\mathbf{nil}, \epsilon(y, \mathbf{nil})), \text{ если } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\},$$
$$f(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle, \bar{x}) = \mathbf{head}(\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \rangle).$$

(6) $f^*(y,\bar{x}) = \delta y \Rightarrow$

$$f(y,\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } y - \text{праэлемент}, \\ \mathbf{tail}(y), & \text{иначе}. \end{cases}$$

(7) Пусть $f^*(\bar{x}) = g^*(h^*(\bar{x}),\bar{x})$, где g^*, h^* — примитивно вычислимые и для них уже построены соответствующие примитивно вычислимые функции g, h такие, что g^* (соответственно h^*) — ограничение на A^* функции g (соответственно h). Теперь с помощью суперпозиции получаем

$$f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}),\bar{x}).$$

Очевидно, что f^* — ограничение f на A^*.

(8) Пусть

$$\begin{array}{l} f^*(y,\bar{x}) = g^*(y,\bar{x}), \text{ если } y \in A^0, \\ f^*((s,t),\bar{x}) = h^*(f^*(s,\bar{x}), f^*(t,\bar{x}), s, t, \bar{x}) \end{array}$$

и для функций g^*, h^* уже построены соответствующие g, h. Определим f посредством общей рекурсии

$$\begin{array}{l} f(y,\bar{x}) = g(y,\bar{x}), \text{ если } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\}, \\ f(\langle s,t\rangle,\bar{x}) = h(f(s,\bar{x}), f(t,\bar{x}), s, t, \bar{x}), \end{array}$$

а так как общая рекурсия не выводит за пределы примитивно вычислимых функций, то f — примитивно вычислима.

(9) Пусть

$$f^*(x_1,\ldots,x_n) = g^*(x_{j+1}, x_1,\ldots,x_j, x_{j+2},\ldots,x_n),$$

причем для g^* уже найдена нужная функция g. Теперь

$$f(x_1,\ldots,x_n) = g(I^n_{j+1}(\bar{x}), I^n_1(\bar{x}),\ldots,I^n_j(\bar{x}), I^n_{j+2}(\bar{x}),\ldots,I^n_n(\bar{x})).$$

□

Чтобы установить эквивалентность в другую сторону определим отображение $\alpha : HL(A) \to A^*$

$$\begin{array}{l} \alpha(a) = a, \text{ если } a \in A, \\ \alpha(\mathbf{nil}) = 0, \\ \alpha(\langle a_1,\ldots,a_n\rangle) = s_n(\alpha(a_n),\ldots,\alpha(a_1)). \end{array}$$

Если вспомнить, как определялись функции s_n, то можно сказать, что элементы списка, начиная с первого, отображение α складывает в стек, причем на самом дне стека лежит 0, который служит для распознавания начала списка.

Лемма 2. *Пусть $f : HL(A)^n \to HL(A)$ — вычислимая над списочной надстройкой функция. Можно эффективно найти такую вычислимую по Московакису функцию $f^* : A^{*k} \to A^*$, что*

$$\alpha^{-1} f^* \alpha = f.$$

Доказательство. С учетом теорем о нормальной форме 1 и 2, достаточно доказать утверждение для примитивно вычислимых функций. Докажем это индукцией по построению примитивно вычислимой функции f.

(1) $f(\bar{x})$ — функция или предикат σ. Тогда $f^* = f$, так как в этом случае если $\bar{x} \in A^n$, то и $f(\bar{x}) \in A$, иначе $f(\bar{x}) = 0$, поэтому

$$\alpha^{-1} f^* \alpha = f^* = f.$$

(2) $f(\bar{x}) = c$ — константа из σ^*. Тогда $f^*(\bar{x}) = c$, если $c \in A$ и $f^*(\bar{x}) = 0$, если $c = \mathbf{nil}$.

(3) $f(x) = \mathbf{head}(x)$, тогда f^* задается схемой примитивной рекурсии:

$$\begin{array}{l} f^*(x) = 0, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*((s,t)) = g(s,t,f^*(t)), \end{array}$$

где функция g определяется следующим образом

$$g(s,t,h) = \begin{cases} h, \text{ если } t \neq 0, \\ s, \text{ если } t = 0, \end{cases}$$

а потому, согласно [5], является примитивно вычислимой. Для того чтобы понять, что полученная функция f^* является аналогом **head**, достаточно вспомнить, как отображение α кодирует списки, и заметить, что $g(s,t,h)$ определяет, является ли s первым элементом в списке.

(4) $f(x) = \mathbf{tail}(x)$, тогда f^* можно задать по схеме примитивной рекурсии 8:

$$\begin{array}{l} f^*(x) = 0, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*((s,t)) = g(s,t,f^*(t)), \end{array}$$

где функция g определяется следующим образом:

$$g(s,t,x) = \begin{cases} (s,x), \text{ если } t \neq 0, \\ 0, \text{ если } t = 0. \end{cases}$$

(5) Пусть $f(x,y) = \mathbf{cons}(x,y)$. Очевидно тогда, что

$$\begin{array}{l} f^*(x,y) = \begin{cases} (y,0), \ x = 0 \\ 0, \ x \neq 0. \end{cases}, \text{ если } x \in A^0, \\ f^*(x,y) = (y,x), \text{ иначе.} \end{array}$$

Эта функция построена по схеме примитивной рекурсии.

(6) $f(x,y) = \epsilon(x,y)$, тогда $f^*(x,y) = \chi_=(x,y)$.

(7) $f(\bar{x}) = I^n_m(\bar{x}) = x_m$, f^* легко получается с помощью схемы 3 и схемы примитивной рекурсии 8.

(8) Пусть $F(\bar{x}) = f(f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$, а для функций f, f_i уже построены соответствующие функции f^*, f^*_i. Без ограничения общности можно считать $n = m$ (так как добавление фиктивных переменных не выводит за пределы класса примитивно вычислимых функций, то, если $n > m$, добавляем $n - m$ фиктивных

переменных в f, а если $n < m$, то в f_i). Для простоты разберем случай $n = 2$. Случай $n > 2$ рассматривается аналогично, но более громоздко. Итак, пусть

$$F(x_1, x_2) = f(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)),$$

и построены функции f^*, f_1^*, f_2^*. Положим

$$\bar{f}(x_1, x_2, x_3, x_4) = f^*(x_1, x_2),$$

$$\bar{f}_1(x_1, x_2, x_3) = f_1^*(x_2, x_3).$$

По схеме суперпозиции получаем функцию

$$g(x_1, x_2, x_3) = \bar{f}(\bar{f}_1(x_1, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3).$$

Еще раз применив суперпозицию, получим

$$F^*(x_1, x_2) = g(f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) =$$

$$= \bar{f}(\bar{f}_1(f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) =$$

$$= \bar{f}(f_1^*(x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2), x_1, x_2) =$$

$$= f^*(f_1^*(x_1, x_2), f_2^*(x_1, x_2)).$$

(9) Пусть

$$f(\bar{x}, y) = g(\bar{x}, y), \text{ для } y \in A \cup \{\mathbf{nil}\}$$

$$f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle) = h(\bar{x}, f(\bar{x}, \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \rangle), f(\bar{x}, \alpha_k)),$$

а для g, h уже найдены нужные g^*, h^*. Определим f^* примитивной рекурсией (учитываем, что при кодировании списка его последний элемент «лежит сверху», т.е. если $\alpha(a_1, \ldots, a_k) = (s, t)$, то $s = \alpha(a_k)$, а $t = \alpha(a_1, \ldots, a_{k-1})$):

$$\begin{array}{l} f^*(\bar{x}, y) = g^*(\bar{x}, y), \text{ если } y \in A^0, \\ f^*(\bar{x}, (s, t)) = \bar{h}^*(\bar{x}, t, f^*(\bar{x}, t), f^*(\bar{x}, s)). \end{array}$$

Здесь функция $\bar{h}^*$ — это

$$\bar{h}^*(\bar{x}, t, f_1, f_2) = \begin{cases} f_2, \text{ если } t = 0, \\ h^*(\bar{x}, f_1, f_2), \text{ если } t \neq 0. \end{cases}$$

Функция $\bar{h}^*$ нужна, чтобы контролировать конец списка (при этом $t = 0$) и обрывать рекурсивный спуск.

□

Итого из лемм 1 и 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Функция $f : A^k \to A$ вычислима по Московакису тогда и только тогда, когда она вычислима над списочной надстройкой.*

5 Σ-определимые предикаты над HF(A)

Рассмотрим семейство всех наследственно конечных множеств $HF(A)$ над A:

$$HF_0(A) = A,$$
$$HF_{n+1}(A) = \mathcal{P}_\omega(HF_n(A)),$$
$$HF(A) = \bigcup_{n=0}^{\infty} HF_n(A),$$

здесь $\mathcal{P}_\omega(M)$ — семейство всех конечных множеств с элементами из M. Элементы A называются *праэлементами*, а элементы $HF(A) \setminus A$ *множествами*. Далее вводится алгебраическая система

$$\mathbf{HF}(A) = \langle HF(A), \sigma_1 \rangle$$

с сигнатурой

$$\sigma_1 = \sigma \cup \{\emptyset, \in^2\},$$

где $\emptyset$ — константный символ, интерпретируемый как пустое множество, а $\in^2$ — предикатный символ, интерпретируемый как предикат принадлежности. Причем предикаты старой сигнатуры σ интерпретируются на праэлементах как на обычных элементах A, а на множествах (т.е. если хотя бы один из аргументов — множество) ложью. Аналогично для функций из σ только в этом случае функция считается равной $\emptyset$.

RQ-формулы сигнатуры σ_1 — это обычные формулы исчисления предикатов, допускающие использование ограниченных кванторов $\forall x \in t$ и $\exists x \in t$. Класс Δ_0-формул определим по индукции

- Любая атомарная формула — Δ_0-формула.
- Если Φ, Ψ — Δ_0-формулы, то $\neg\Phi$. $\Phi \& \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \to \Psi$ — Δ_0-формулы.
- Если Φ — Δ_0-формула, x — переменная, t — терм, то $\exists x \in t\ \Phi$, $\forall x \in t\ \Phi$ — Δ_0-формулы.

На основе Δ_0-формул определим класс Σ-формул

- Δ_0-формулы — Σ-формулы.
- Если Φ, Ψ — Σ-формулы, то $\Phi \& \Psi$, $\Phi \vee \Psi$ — Σ-формулы.
- Если Φ — Σ-формула, x — переменная, t — терм, то $\exists x \in t\ \Phi$, $\forall x \in t\ \Phi$, $\exists x \Phi$ — Σ-формулы.

Теперь $P \subseteq HF(A)^k$ Σ-*предикат*, если существует такая Σ-формула Φ, что

$$P(a_1, \ldots, a_k) \Leftrightarrow \mathbf{HF}(A) \models \Phi(a_1, \ldots, a_k).$$

Предикат $P \subseteq HF(A)^k$ называется Δ-*предикатом*, если одновременно P и $HF(A)^k \setminus P$ — Σ-предикаты. Функция $f : HF(A)^k \to HF(A)$ — Σ-*функция*, если ее график

$$\Gamma_f = \{(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}) \text{ такие, что } f(a_1, \ldots, a_k) = a_{k+1}\}$$

есть Σ-предикат.

Легко заметить, что все элементы-множества образуют Δ-подмножество в $HF(A)$. Действительно, они выделяются следующей Δ_0-формулой

$$\Phi_S(x) = (x = \emptyset) \vee \exists y \in x(y = y).$$

Аналогично все праэлементы — это элементы $HF(A)$, не являющиеся множествами, поэтому их выделяет Δ_0-формула $\Phi_U(x) = \neg\Phi_S(x)$.

Покажем Σ-определимость некоторых функций, которые пригодятся для последующего изложения. Двуместная функция $\{,\} : x, y \mapsto \{x, y\}$ — неупорядоченная пара определяется следующей Δ_0-формулой

$$\Phi_{\{,\}}(x, y, z) = \forall u \in z(u = x \ \vee \ u = y).$$

Для определения упорядоченной пары обычно применяется прием Мостовского:

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Δ_0-формула для отношения $\langle x, y\rangle = z$

$$\Phi_{\langle,\rangle}(x, y, z) = \exists u \in z \exists v \in z \Phi_{\{,\}}(u, v, z) \& \Phi_{\{,\}}(x, x, u) \& \Phi_{\{,\}}(x, y, v).$$

Любую RQ-формулу можно привести к такому виду, что отрицание будет стоять только перед атомарными подформулами. Подформула P входит в такую RQ-формулу $\Phi(\bar{x}, P)$ *позитивно*, если в ней не встречается $\neg P$ и нет импликаций. Свяжем с любой Σ-формулой $\Phi(\bar{x}, P)$ $(P \subseteq HF(A)^k)$ оператор

$$\Gamma_\Phi^{\mathbf{HF}(A)} : HF(A)^k \to HF(A)^k,$$

который действует так:

$$\Gamma_\Phi^{\mathbf{HF}(A)}(P) = \{(a_1, \ldots, a_k) \ : \ \langle \mathbf{HF}(A), P\rangle \models \Phi(a_1, \ldots, a_k)\}.$$

Подмножество $\Gamma_* \subseteq HF(A)^k$ называется *неподвижной точкой* оператора Γ, если $\Gamma(\Gamma_*) = \Gamma_*$. Неподвижная точка — *наименьшая*, если содержится в любой неподвижной точке оператора.

Нам далее понадобится следующая теорема Ганди [3]

Теорема 4. *Пусть Φ — Σ-формула, в которую предикат P входит позитивно, тогда наименьшая неподвижная точка оператора $\Gamma_\Phi^{\mathbf{HF}(A)}$ является Σ-подмножеством $HF(A)^k$.*

Эта теорема является аналогом известной теоремы о рекурсии в классической теории алгоритмов, так как позволяет строить Σ-подмножества при помощи рекурсивных определений.

6 Σ-определимость и вычислимость по Московакису

Для того чтобы установить эквивалентность вычислимости по Московакису и Σ-определимости, введем следующее отображение $\tau : A^* \to$

$HF(A)$

$$\tau(0) = \emptyset,$$
$$\tau(a) = a, \text{ если } a \in A,$$
$$\tau((a, b)) = \langle \tau(a), \tau(b) \rangle.$$

Для краткости далее $\tau(n)$, где n — натуральное число в A^*, будем обозначать просто n.

Лемма 3. *Образ $\tau(A^*)$ Σ-определим в $\mathbf{HF}(A)$.*

Доказательство. Легко видеть, что множество $\tau(A^*)$ является наименьшей неподвижной точкой Σ-оператора $\Gamma^{\mathbf{HF}(A)}_{\Phi_\tau[x]}$, где

$$\Phi_\tau(x) = \Phi_U(x) \vee x = \emptyset \vee (\exists u \exists v \Phi_{\langle,\rangle}(u, v) \& P(u) \& P(v)),$$

а значит, по теореме Ганди $\tau(A^*)$ — Σ-подмножество $HL(A)$. □

Лемма 4. *Пусть $f : {A^*}^k \to A^*$ — вычислимая по Московакису функция. Тогда отношение $P \subseteq HF(A)^k$, определенное как*

$$P(\tau(x_1), \dots, \tau(x_k), \tau(y)) \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_k) = y,$$

есть Σ-предикат.

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы для примитивно вычислимых функций. Доказывать будем индукцией по построению функции f.

(1) Пусть $f(\bar{x}) = \varphi_i(\bar{x})$. Если φ_i —функция или предикат сигнатуры σ, то P определим Σ-формулой

$$\Phi_P(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = \Big(\Phi_U(x_1) \& \dots \& \Phi_U(x_k) \&$$
$$\& \Phi_{\varphi_i}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})\Big) \vee (x_{k+1} = \emptyset),$$

где Φ_{φ_i} — предикат, определяющий φ_i, которая лежит в сигнатуре σ. Если же $\varphi_i(x_1, x_2) = \chi_=(x_1, x_2)$, то

$$\Phi_P(x_1, x_2, x_3) = (x_1 = x_2 \ \& \ x_3 = 1) \vee (x_1 \neq x_2 \ \& \ x_3 = 0).$$

(2) Пусть $f(\bar{x}) = c$, где c — некоторая константа из σ, тогда P определяется Σ-формулой

$$\Phi_P(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = (x_{k+1} = c).$$

Если же $f(\bar{x}) = 0$, то

$$\Phi_P(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = (x_{k+1} = \emptyset).$$

(3) Пусть $f(x) = x$, очевидно, что тогда

$$\Phi_P(x_1, x_2) = (x_1 = x_2).$$

(4) Если $f(s, t) = (s, t)$, то

$$\Phi_P(x_1, x_2, x_3) = \Phi_{\langle,\rangle}(x_1, x_2, x_3).$$

(5) Пусть $f(x) = \pi x$, тогда

$$\Phi_\pi(x,y) = (\Phi_U(x) \ \& \ y = 1)\vee$$

$$\vee(x = \emptyset \ \& \ y = 0) \vee \exists u \Phi_{\langle,\rangle}(y,u,x).$$

(6) Пусть $f(x) = \delta x$, тогда

$$\Phi_\delta(x,y) = (\Phi_U(x) \ \& \ y = 1)\vee$$

$$\vee(x = \emptyset \ \& \ y = 0) \vee \exists u \Phi_{\langle,\rangle}(u,y,x).$$

(7) Пусть $f(\bar{x}) = g(h(\bar{x}),\bar{x})$, а для функций g,h уже найдены соответствующие Σ-формулы $\Phi_g(x_1,\bar{x},y)$, $\Phi_h(\bar{x},y)$. Тогда P можно определить как

$$\Phi_P(\bar{x},y) = \exists z \Phi_h(\bar{x},z) \& \Phi_g(z,\bar{x},y).$$

(8) Если

$$\begin{array}{l} f(y,\bar{x}) = g(y,\bar{x}), \text{ если } y \in A^0, \\ f((s,t),\bar{x}) = h(f(s,\bar{x}), f(t,\bar{x}), s, t, \bar{x}) \end{array}$$

и функции g,h определяются соответственно формулами $\Phi_g(y,\bar{x},z)$ и $\Phi_h(x_1,x_2,x_3,x_4,\bar{x},y)$, то график f является наименьшей неподвижной точкой оператора, определяемого следующей Σ-формулой

$$\Phi_P(y,\bar{x},z) = (\Phi_U(y) \& \Phi_g(y,\bar{x},z)) \vee \exists u \exists v \exists s \exists t (\Phi_\pi(y,s)\&$$

$$\&\Phi_\delta(y,t) \& P(s,\bar{x},u) \& P(t,\bar{x},v) \& \Phi_h(u,v,s,t,\bar{x},z)),$$

а значит, по теореме Ганди, соответствующий P — Σ-предикат.

(9) Пусть

$$f(x_1,\ldots,x_k) = g(x_{j+1},x_1,\ldots,x_j,x_{j+2},\ldots,x_k)$$

и функция g определяется Σ-формулой $\Phi_g(\bar{x},y)$, тогда

$$\Phi_f(x_1,\ldots,x_k,y) = \Phi_g(x_{j+1},x_1,\ldots,x_j,x_{j+2},\ldots,x_k,y).$$

Таким образом, мы доказали теорему для примитивно вычислимых функций. Теперь воспользуемся теоремой 1 о нормальной форме функции, вычислимой по Московакису. Согласно ей для любой вычислимой функции $f : A^{*k} \to A^*$ существуют две примитивно вычислимые функции g,h такие, что

$$f(\bar{x}) = g(\bar{x}, \nu y\{h(\bar{x},y) \to 0\}).$$

Как было доказано выше, графики функций g и h определимы некоторыми Σ-формулами $\Phi_g(\bar{x},y,z)$ и $\Phi_h(\bar{x},y,z)$, поэтому график функции f определяется следующей Σ-формулой

$$\Phi_f(\bar{x},y) = \exists z \Phi_h(\bar{x},z,0) \& \Phi_g(\bar{x},z,y).$$

□

Определим отношение $\beta \subseteq HF(A) \times A^*$ следующим образом

$$\begin{array}{l} \beta(\emptyset, 0), \\ \beta(a, a), \text{ если } a \in A, \\ \beta(\{a_1, \dots, a_n\}, s_n(b_n, \dots, b_1)), \text{ если } \beta(a_1, b_1), \dots, \beta(a_n, b_n). \end{array}$$

Оно очень похоже на отображение α, определенное выше. То, что вместо отображения вводится отношение, связано с неоднозначностью кодировки множеств (одно и то же множество не изменится, если поменять местами его элементы, а его код при этом будет другим).

Назовем предикат $P \subseteq {A^*}^k$ *вычислимым по Московакису*, если вычислима по Московакису его характеристическая функция χ_P

$$\chi_P(\bar{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } P(\bar{x}), \\ 0, & \text{если } \neg P(\bar{x}). \end{cases}$$

Свяжем с предикатом $P \subseteq HF(A)^k$ предикат $P^* \subseteq {A^*}^k$ такой, что

$$\mathbf{HF}(A) \models P(a_1, \dots, a_k) \Leftrightarrow P^*(b_1, \dots, b_k) = 1, \beta(a_1, b_1), \dots, \beta(a_k, b_k).$$

Лемма 5. *Пусть $P \subseteq HF(A)^k$ — Σ-предикат, тогда предикат $P^* \subseteq {A^*}^k$ вычислим по Московакису.*

Доказательство. Пусть предикат P определяется Σ-формулой Φ. Во-первых заметим, что любую такую формулу можно привести к виду, удовлетворяющему свойствам:

(1) В любой атомарной подформуле $t_1 \in t_2$, термы t_1, t_2 — переменные;
(2) В любом ограниченном кванторе $\exists x \in t$ и $\forall x \in t$, терм t — переменная.

Действительно, для выполнения пункта 1 достаточно заменить все подформулы вида $t_1 \in t_2$ на $x_1 \in x_2$ и добавить к формуле $\&(x_1 = t_1)\&(x_2 = t_2)$. Выполнение пункта 2 получается применением эквивалентностей

$$\begin{array}{l} \forall x \in t\Phi \equiv_s \exists y \forall x \in y (y = t \ \rightarrow \ \Phi) \\ \exists x \in t\Phi \equiv_s \exists y \exists x \in y (y = t \ \& \ \Phi). \end{array}$$

Заметим еще, что все термы сигнатуры σ_1 вычислимы по Московакису, так как они получаются из констант, тождественной функции и функций, входящих в сигнатуру, при помощи суперпозиции. Применим теперь индукцию по построению такой Φ.

(1) Φ — атомарная формула
   (a) Пусть $\Phi(\bar{x}) = (t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x}))$, тогда соответствующий предикат P^* имеет вычислимую характеристическую функцию
   $$\chi_{P^*}(\bar{x}) = \chi_{=}(t_1(\bar{x}), t_2(\bar{x})).$$
   (b) Если $\Phi = Q(t_1, \dots, t_n)$, где Q — предикат из σ, то
   $$\chi_{P^*}(\bar{x}) = \chi_Q(t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x})).$$

(c) $\Phi(x_1, x_2) = (x_1 \in x_2)$. Определим функцию g по схеме примитивной рекурсии

$$g(x, y) = 0, \text{ если } x \in A^0,$$
$$g((s, t), y) = \chi_=(s, y) \vee g(t, y),$$

где $\vee$ — характеристическая функция дизъюнкции, которая будет определена ниже. Теперь

$$\chi_{P^*}(x_1, x_2) = g(x_2, x_1).$$

(2) Φ — Δ_0-формула.

(a) Если Φ — атомарная формула, см. пункт 1.

(b) Пусть $\Phi = \Phi_1 \& \Phi_2$ и для формул Φ_1, Φ_2 уже построены соответствующие предикаты P_1^*, P_2^*. Тогда достаточно вспомнить, как в A^* интерпретируются натуральные числа, и перебором вариантов можно убедиться, что

$$\chi_{P^*}(\bar{x}) = \chi_=(\chi_=((\chi_{P_1^*}(\bar{x}), 0), (0, \chi_{P_2^*}(\bar{x}))), 0).$$

(c) Если $\Phi = \neg\Psi$, а для Ψ – уже доказано, то

$$\chi_{P^*}(\bar{x}) = \chi_=(\chi_\Psi(\bar{x}), 0).$$

(d) $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, где $\circ$ — дизъюнкция или импликация. Этот случай сводится к двум предыдущим, так как дизъюнкцию и импликацию можно выразить через конъюнкцию и отрицание.

(e) Пусть $\Phi(\bar{x}, y) = \forall x \in y \Psi(x, \bar{x}, y)$. Тогда, если функция f определена примитивной рекурсией

$$f(x, \bar{x}, y) = 1, \text{ если } x \in A^0,$$
$$f((s, t), \bar{x}, y) = \chi_\Psi(s, \bar{x}, y) \& f(t, \bar{x}, y),$$

то

$$\chi_\Phi(\bar{x}, y) = f(y, \bar{x}, y).$$

(f) Пусть $\Phi(\bar{x}, y) = \exists x \in y \Psi(x, \bar{x}, y)$. Тогда, если функция f определена примитивной рекурсией

$$f(x, \bar{x}, y) = 0, \text{ если } x \in A^0,$$
$$f((s, t), \bar{x}, y) = \chi_\Psi(s, \bar{x}, y) \vee f(t, \bar{x}, y),$$

то

$$\chi_\Phi(\bar{x}, y) = f(y, \bar{x}, y).$$

(3) Если Φ — Σ-формула.

(a) Пусть Φ — Δ_0-формула, тогда см. пункт 2.

(b) Если $\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_2$, где $\circ$ – конъюнкция или дизъюнкция. Этот случай аналогичен подпунктам b, c, d пункта 2.

(c) Если $\Phi = Qx \in y\Psi$, где $Q \in \{\exists, \forall\}$, то этот случай аналогичен подпунктам e, f пункта 2.

(d) Пусть $\Phi(\bar{y}) = \exists x \Psi(x, \bar{y})$, тогда

$$\chi_\Phi(\bar{y}) = \nu x\{\chi_=(\chi_\Psi(x, \bar{y}), 0) \to 0\}.$$

□

Теорема 5. *Функция $f : A^k \to A$ вычислима по Московакису тогда и только тогда, когда она является Σ-функцией.*

Доказательство. Если $f : A^k \to A$ вычислима по Московакису, то, по лемме 4, ее график является Σ-множеством.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть график функции f $\Gamma_f \subseteq A^{k+1}$ есть Σ-множество. Тогда, по лемме 5, характеристическая функция $\chi_{\Gamma_f} : A^{k+1} \to \{0,1\}$ является вычислимой по Московакису. Теперь функцию f можно определить как

$$f(\bar{x}) = \nu y\{\chi_{=}(\chi_{\Gamma_f}(\bar{x}, y), 0) \to 0\}.$$

□

7 Основной результат

Из теорем 3 и 5 следует основной результат данной статьи.

Теорема 6. *Для функции $f : A^k \to A$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *f вычислима по Московакису,*
(2) *f вычислима над списочной надстройкой,*
(3) *f является Σ-функцией.*

References

[1] I.V. Ashaev, V.Ya. Belyaev, A.G. Myasnikov, *Toward a generalized computability theory*, Algebra and Logic, **32:4** (1993), 183–205.

[2] L. Blum, M. Shub, S. Smale, *On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines*, Bull. Amer. Math. Soc., **21** (1989), 1–46.

[3] Yu.L.Ershov, *Definability and Computability*, Springer New York, NY, 1996.

[4] A. Hemmerling, *Computability and Complexity over structures*, Math. Logic Quart., 44:1 (1998), 1–44.

[5] Y.N. Moschovakis, *Abstract first order computability*, Trans. Amer. Math. Soc., **138** (1969), 427–464.

Nikita Ruslanovich Karatsev
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova 13,
Omsk, 644099, Russia
Email address: nikita.karatsev@gmail.com

Alexander Nikolaevich Rybalov
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova 13,
Omsk, 644099, Russia
Email address: alexander.rybalov@gmail.com