S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 00, стр. 1–12 (2020) УДК 517956
MSC 35M10

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

У.И. БАЛТАЕВА

Abstract. In this paper unique solvability is proved for the solution of Djuraev problem of a loaded third order integro-differential equations with parabolic-hyperbolic operators.

Keywords: the loaded equation, equations of mixed type, integro - differential operator, integral equation.

1. Введение

Первые результаты по изучению уравнений смешанного типа, содержащих параболо-гиперболические операторы, посвященные построению решений, изучению их свойств и исследованию краевых задач, получены в работах И.М. Гельфанда. Далее они развиты в работах Г.М. Стручиной, Я.Ф. Уяфлянд и Л.А. Золиной. Изучение уравнений третьего и более высоких порядков для уравнений смешанного и смешанно-составного типа, содержащих в главной части параболо-гиперболические и эллиптико-параболические операторы, началось в начале семидесятых годов и интенсивно развивалось в работах А.В. Бицадзе, М.С. Салахитдинова, Т.Д. Жураева, Р.Б. Девиса и др. Затем интенсивно развивались в работах [1-5] где исследован ряд краевых задач для уравнений третьего порядка, содержащих в главной части смешанные операторы параболо-гиперболического и эллиптико-параболического типов.

При изучении уравнения смешанного типа исследователи главным образом ограничивались рассмотрением модельных уравнений того или иного типов.

, Краевые задачи для нагруженных уравнений.

Работа поддержана (грант —).

Поступила января 2020 г., опубликована августе 2020 г.

Это объясняется тем, что аналитический метод исследования этих уравнений и соответствующих краевых задач для модельных уравнений позволяет представить общее решение в виде суммы функций. Такое представление используется, когда уравнения составляются из произведений перестановочных дифференциальных операторов [2].

Отказ от использования представления общего решения уравнения позволяет решать краевые задачи для обобщенных уравнений, составляемых из произведений неперестановочных дифференциальных операторов. Это обстоятельство является основой исследования настоящей работы.

Краевые задачи для нагруженных уравнений [6] смешанного и смешанно-составного типов третьего порядка изучены сравнительно мало. Это связано, прежде всего, с отсутствием представления общего решения для таких уравнений; с другой стороны, такие задачи сводятся к малоизученным интегральным уравнениям со сдвигом. Отметим работы В.А. Водаховой [7], где изучены краевые задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка. В работе И.Н. Ланина [8] доказаны однозначная разрешимость задач для уравнения смешанного типа с нагруженным слагаемым в параболической области. В работах В.А. Елеева [9], и в работах В.А. Нахушевой [10] исследованы корректность краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, а также нагруженные уравнения смешанного типа с нагруженными слагаемыми. В работах В.А. Елеева и А.В. Дзарахохова [11] была рассмотрена задача типа Трикоми для уравнения смешанного типа третьего порядка, когда нагруженная часть содержит след и производную от искомой функции.

Интенсификациям фундаментальных и прикладных исследований в области дифференциальных уравнений дробного порядка посвящены работы Т.С. Алероева [12], А.М. Нахушева [10], В.А. Нахушевой [13], А.В. Псху [14], Л.И. Сербиной [15], Б. Исломова [16], O.P. Agrawal [17], A.S. Berdyshev, A. Cabada, E.T. Karimov [18], A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo [19], I. Podlubny [20] и др. Построение теории однозначной разрешимости в исследовании вопросов корректности постановок задач для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка параболо-гиперболических операторов с действительным параметром и с переменными коэффициентами дробного порядка требуется как для внутренней завершенности теории дробного интегро-дифференцирования, так и для многочисленных приложений.

В настоящей работе исследуются локальные краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка, содержащих параболо-гиперболический оператор с переменными коэффициентами в ограниченных смешанных областях, содержащих внутри себя характеристические линии изменения типа.

2. Аналог задачи Коши-Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа

Пусть Ω – конечная область плоскости независимых переменных x и y при $y > 0$, ограниченная отрезками AA_0, BB_0 и $A_0B_0(A(0,0),\ B(1,0),\ A_0(0,h),\ B_0(1,1))$ прямых $x = 0,\ x = 1$,и $y = 1$, соответственно, а при $y < 0$ характеристиками уравнения колебания струны:

$$AC : x + y = 0, \quad BC : x - y = 1,$$

выходящими из точки $C\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Введем следующие обозначения:

$$\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\}\,,\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}\ \ ,\ I=\{(x,y):0<x<1,\ \ y=0\}\,.$$

Рассмотрим линейное нагруженное интегро-дифференциальное уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)\tilde{L}u=0, \tag{1}$$

в области Ω, где

$$\tilde{L}u\equiv\begin{cases}\tilde{L}_1u\equiv u_{xx}+a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u-\sum\limits_{i=1}^{n}d_iD_{0x}^{\alpha_i}u\,(x,0)\,,\,\Omega_1,\\ \tilde{L}_2u\equiv u_{xx}-u_{yy}+a_2(x,y)u_x+b_2(x,y)u_y+c_2(x,y)u-\sum\limits_{i=1}^{n}e_iD_{0\xi}^{\beta_i}u\,(\xi,0)\,,\,\Omega_2,\end{cases}$$

a, b и $c-$ заданные постоянные числа $(a^2+b^2\neq 0)$, $a_i(x,y)$, $b_i(x,y)$, $c_i(x,y)$, $d_i(x,y)$, $e_i(x,y)-$ заданные достаточно гладкие функции в $\Omega_i\,(i=1,2)$, причем $b_1(x,y)<0$, $c_1(x,y)\leq 0$ в $\bar{\Omega}_1$, кроме того, в Ω_1 функции a_1,b_1,c_1,a_{1x}, a_{1y}, $b_{1x},b_{1y}-$ удовлетворяют условию Гельдера, $d_i\in C^1\left(\bar{\Omega}_1\right)\cap C^2\left(\Omega_1\right)$, а в области $\Omega_2:a_2,b_2\in C^2\left(\bar{\Omega}_2\right)$, c_2, $e_i\in C^1\left(\bar{\Omega}_2\right),e_i\in C^3\left(\Omega_2\right)$, $\xi=x+y$. $D_{0x}^{\alpha_i}-$ интегро-дифференциальный оператор, α_i, $\beta_i<1$, $i=1,..,n$.

Как показано в [2], в зависимости от коэффициентов a и b ставятся и исследуются различные краевые задачи для уравнения (1).

Уравнение (1) охватывает широкий класс ранее изученных уравнений. Например, если $d_i(x,y)$, $e_i(x,y)=0$, то $Lu-$параболо-гиперболический оператор, и тогда получаем уравнение, изученное в работе [2]-[3]; если $a=0$, $b=0$, то получаем уравнение, изученное в работе [21]; если $a\neq 0$ и $b=0$ или $b=0$ и $c=0$, $\alpha_i=0$, то получаем уравнения, изученные в [22]-[23], если $a\neq 0$ и $b=0$, то получаем уравнения, изученные в [24], с нагруженным оператором. Исходя из этого, мы рассмотрим задачи для уравнения (1) при $ab\neq 0$.

Определение 1. *Регулярным решением уравнения* (1) *называется функция $u(x,y)$, обладающая в областях Ω_1 и Ω_2 всеми непрерывными частными производными, входящими в уравнение* (1), *и удовлетворяющая уравнению в обычном смысле.*

Задача 1. (Задача Джураева) *Требуется найти функцию $u\,(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) *$u(x,y)$ непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega}$;*

2) *$u(x,y)$ является регулярным решением уравнения* (1) *в областях Ω_1 и Ω_2;*

3) *$u_x(u_y)$ непрерывна вплоть до $AA_0\cup AC\cup BC\cup AB$ $(AB\cup AC\cup BC)$,$u_{xx}\in C(AA_0)$, $u_{xx}\in C(BB_0)$ соответственно;*

4) *удовлетворяет следующим краевым условиям:*

(a) *если $0<b/a\leq 1$, то при $a\neq b$, а также при $a=b$, но $c\neq 0$, выполняются условия*

$$u\,(0,y)=\varphi_1\,(y)\,,\ \ u\,(1,y)=\varphi_2\,(y)\,,\qquad 0\leq y\leq 1, \tag{2}$$

$$u_{xx}\,(0,y)+a_1\,(0,y)\,u_x\,(0,y)=\varphi_3\,(y)\,,\qquad 0\leq y\leq 1, \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC}=\psi_1\,(x)\,,\quad 0\leq x\leq\frac{1}{2}, \tag{4}$$

(5) $$u(x,y)|_{BC} = \psi_2(x), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1,$$

(6) $$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_3(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

(b) *если* $1 < b/a < +\infty$, *то выполняются условия* (2) -(6), *и*

(7) $$\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_4(x), \qquad \frac{1}{2} \le x \le 1,$$

(c) *если* $-1 \le b/a < 0$, *то при* $a \ne -b$, *а также при* $a = -b$, *но* $c \ne 0$, *выполняются условия*(2), (4), (5), (7), *и*

(8) $$u_{xx}(1,y) + a_1(1,y)\,u_x(1,y) = \varphi_3(y), \qquad 0 \le y \le 1,$$

(d) *если* $-\infty < b/a < -1$ *то выполняется группа условий* (2), (4), (5), (6), (7), *и* (8); *а на линиях изменения типа выполняются условия склеивания*

(9) $$u_x(x,+0) = u_x(x,-0), \;\; u_y(x,+0) = u_y(x,-0), \;\; (x,0) \in C(I),$$

где $n-$ *внутренняя нормаль,* $\varphi_i(y), \ \psi_i(x)\,(i = \overline{1,4})-$ *заданные функции, причем* $\psi_m(m-1) = \varphi_m(0) = 0, \psi_1(1/2) = \psi_2(1/2), \psi_m'(m-1) = \sqrt{2}\psi_{m+2}(m-1) \mp 2\varphi_m'(0), \ \psi_3'(1/2) = -\psi_4'(1/2),$

(10) $$\varphi_m(y) \in C^1[0,1], \quad \varphi_3(y) \in C[0,1] \cap C^1(0,1),$$

(11) $$\psi_{2m-1}(x) \in C^{2-m}[0,1/2] \cap C^{4-m}(0,1/2),$$

(12) $$\psi_{2m}(x) \in C^{2-m}[1/2,1] \cap C^{4-m}(1/2,1), \quad (m = 1,2).$$

Замечание 1. *В задаче* 1, *можно ограничиться рассмотрением случаев a) и b), так как методика исследования случаев c), d) аналогична случаям a), b), т.е. при помощи замены* $\xi = 1 - x$ *независимой переменной из случаев d), c) получаем случаи, аналогичные случаям a) и b). Поэтому достаточно рассмотреть только случаи a) и b).*

3. Исследование задачи 1 в случае $0 < b/a \le 1$

Теорема 1. *Если* $b_1(x,y) < 0$, $c_1(x,y) \le 0$ *и* $a_i(x,y) \ge 0, \forall (x,y) \in \Omega_i$ *и выполнены условия* (10), (11) *и* (12) *при* $m = 1$, *то в области* Ω *существует единственное решение задачи* 1 *при* $0 < b/a \le 1$.

Введем обозначение

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), & (x,y) \in \Omega_1 \\ u_2(x,y), & (x,y) \in \Omega_2, \end{cases}$$

тогда уравнение (1) можно переписать в виде

(13) $$\begin{cases} \tilde{L}_1 u_1 = \omega_1(bx - ay)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right], & y \ge 0, \\ \tilde{L}_2 u_2 = \omega_2(bx - ay)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(bx + ay)\right], & y < 0. \end{cases}$$

где $\omega_1(x,y), \ \omega_2(x,y) -$ произвольные достаточно гладкие функции.

В характеристических переменных область Ω_2 отображается в треугольник Ω_2^0 плоскости переменных ξ и η, со сторонами $\xi = 0$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$,$0 \le \xi \le \eta$,$\eta = \xi$, вершины которого находятся в точках $A_1(0,0)$, $B_1(1,1)$ и $C_1(0,1)$.

В области Ω_2, переходя в характеристические координаты $\xi = x+y, \eta = x-y$, из уравнения (13) при $y \le 0$ имеем

$$u_{2\xi\eta} + a_3(\xi,\eta)u_{2\xi} + b_3(\xi,\eta)u_{2\eta} + c_3(\xi,\eta)u_2 = E_i(\xi,\eta)D_{0\xi}^{\beta_i}\tau(\xi)+$$

$$+\frac{1}{4}\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi + \frac{b-a}{2}\eta\right)\right), \tag{14}$$

а условия (4) - (6) принимают вид

$$u_2(\xi,\eta)|_{\xi=0} = \psi_1\left(\frac{\eta}{2}\right), \quad 0 \le \eta \le 1, \tag{15}$$

$$u_2(\xi,\eta)|_{\eta=1} = \psi_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right), \quad 0 \le \xi \le 1, \tag{16}$$

и

$$\left.\frac{\partial u_2(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3\left(\frac{\eta}{2}\right), \quad 0 < \eta < 1, \tag{17}$$

где

$$a_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left[a_2\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right) + b_2\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right],$$

$$b_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\left[a_2\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right) - b_2\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right)\right],$$

$$c_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}c_2\left(\frac{\xi+\eta}{2},\frac{\xi-\eta}{2}\right), E_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}e_i\left(\frac{\xi-\eta}{2},\frac{\xi+\eta}{2}\right),$$

$\tau(\xi) = u_2(\xi,\xi)$, по повторяющимся индексам $i = 1,2,...,n$ подразумевается суммирование.

Решение уравнения (14), удовлетворяющее условиям (15) и (16), задается формулой [25]

$$u_2(\xi,\eta) = f(\xi,\eta) + \frac{1}{4}\int_0^\xi D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)dt\int_1^\eta E_i(t,\tau)R(t,\tau;\xi,\eta)d\tau+$$

$$+\frac{1}{4}\int_0^\xi dt\int_1^\eta R(t,\tau;\xi,\eta)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t + \frac{b-a}{2}\tau\right)\right)d\tau, \tag{18}$$

где

$$f(\xi,\eta) = R(0,1;\xi,\eta)\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) + \int_1^\eta \left(a_3(0,\tau)\psi_2\left(\frac{\tau}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{\tau}{2}\right)\right)R(0,\tau;\xi,\eta)d\tau+$$

$$\int_0^\xi \left(b_3(t,1)\psi_2\left(\frac{t+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)R(t,1;\xi,\eta)dt,$$

а $R(t,\tau;\xi,\eta)-$ функция Римана уравнения (14), соответственно [25] и удовлетворяет условиям:

1^o. $R(t,\tau;\xi,\eta)$ как функция (ξ,η) является решением характеристического уравнения

$$R_{\xi\eta}(t,\tau;\xi,\eta) + a_3(\xi,\eta)R_\xi(t,\tau;\xi,\eta) + b_3(\xi,\eta)R_\eta(t,\tau;\xi,\eta) + c_3(\xi,\eta)R(t,\tau;\xi,\eta) = 0;$$

2^o. а) $R_\tau(t,\tau;\xi,\eta) - a_3(t,\tau)R(t,\tau;\xi,\eta) = 0$, при $t = \xi$,

б) $R_t(t,\tau;\xi,\eta) - b_3(t,\tau)R(t,\tau;\xi,\eta) = 0$, при $\tau = \eta$,

в) $R(t,\tau;\xi,\eta) = 1$ при $t = \xi$ и $\tau = \eta$;

3°. $R_\xi(t,\tau;\xi,\eta)+b_3(\xi,\eta)R(t,\tau;\xi,\eta)=0$, при $\eta=\tau$;
4°. $R_\eta(t,\tau;\xi,\eta)+a_3(\xi,\eta)R(t,\tau;\xi,\eta)=0$, при $\xi=t$;
по индексу i подразумевается суммирование от 1 до n.

Удовлетворяя (18) краевому условию (17), с учетом свойств функции Римана 1°, 3°, и 4°, получим следующее функциональное соотношение

$$\int_1^\eta R(0,\tau;0,\eta)\exp\left(-\frac{c\,(b-a)}{4ab}\tau\right)\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\tau\right)d\tau=$$

$$=2\sqrt{2}\psi_3\left(\frac{\eta}{2}\right)-4f_\xi(0,\eta)-\tau\,(0)\int_1^\eta E_i(0,\tau)R(0,\tau;0,\eta)d\tau,$$

где

$$f_\xi(0,\eta)=R_\xi(0,1;0,\eta)\psi_1\left(\frac{1}{2}\right)+\left[b_3(0,1)\psi_2\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right)\right]R(0,1;0,\eta)+$$

$$\int_1^\eta\left[a_3(0,1)\psi_2\left(\frac{\tau}{2}\right)+\frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]R_\xi(0,\tau;0,\eta)d\tau.$$

Далее, дифференцируя полученное соотношение по η и меняя $-x$ на y, с учетом

$$\tau(0)=\psi_1(0)=0,\quad u_2(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(0),\psi_2'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\psi_3\left(\frac{1}{2}\right),\tag{19}$$

и свойств функции Римана 2°, 3°, и 4°, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $w_2(y)$:

$$\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\eta\right)-\int_1^\eta K_1(\tau,\eta)\omega_2\left(\frac{a+b}{2}\tau\right)d\tau=g_1(\eta),\tag{20}$$

где

$$K_1(\tau,\eta)=a_3(0,\eta)R(0,\tau;0,\eta)\exp\left(-\frac{c\,(b-a)}{4ab}\,(\eta-\tau)\right),\tag{21}$$

$g_1(\eta)\in C\,[0,1]-$ известные функции.

Нетрудно заметить, что с учетом (11), (12) правая часть $g_1(\eta)$ уравнения (20), в $0\le\eta\le1$ и ядро $K_1(\tau,\eta)$ непрерывны в $[0,1]\times[0,1]$ при $\tau\ne\eta$. Таким образом, уравнение (20) имеет единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций. Решая его, находим $\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\eta\right)$.

Далее, в $0<b/a\le1$, без ограничения общности, можно положить $a>0$ и $b>0$, и тогда выполняются неравенства

$$0\le\frac{b+a}{2}\eta+\frac{b-a}{2}\xi\le\frac{b+a}{2}.\tag{22}$$

Вместо $\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\eta\right)$ мы можем взять $\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\eta+\frac{b-a}{2}\xi\right)$.

Подставляя значение функции $\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\eta+\frac{b-a}{2}\xi\right)$ в (18), находим решение $u_2\,(\xi,\eta)$ задачи (14) - (17) в области Ω_2^0 относительно $\tau(\xi)$. Удовлетворяя полученное решение краевым условиям

$$u(\xi,\eta)|_{\eta=\xi}=\tau(\xi),$$

получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение

$$\tau\,(\xi)-\int_0^\xi N_i\,(\xi,t)\,D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)dt=$$

$$= f(\xi)+\frac{1}{4}\int_0^{\xi} dt \int_1^{\xi} R(t,\tau;\xi,\xi)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right)d\tau,$$

где

$$f(\xi) = f(\xi,\xi), \quad N_i\left(\xi,t\right) = \frac{1}{4}\int_1^{\xi} E_i(t,\tau)R(t,\tau;\xi,\xi)d\tau,$$

индекс i подразумевает суммирование от 1 до n.

Заметим, что разрешимость интегро-дифференциального уравнения можно доказать, приведя его к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tau\left(\xi\right) - \int_0^{\xi} N_{1i}(\xi,t)\tau(t)dt = \tag{23}$$

$= f(\xi) + \frac{1}{4}\int_0^{\xi} dt \int_1^{\xi} R(t,\tau;\xi,\xi)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\tau\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\tau\right)\right)d\tau,$
где

$$N_{1i}\left(\xi,t\right) = \frac{1}{(-\beta_i)}\left(\xi-t\right)^{-\beta_i}\int_0^1 z^{-1-\beta_i}N_i\left(\xi,t+\left(\xi-t\right)z\right)dz,\ \beta_i<0,$$

$$N_{1i}\left(\xi,t\right) = \frac{1}{(1-\beta_i)}\left(\xi-t\right)^{1-\beta_i}\int_0^1 z^{-\beta_i}\ N'_{is}\left(\xi,s\right)\big|_{s=t+(\xi-t)z}\,dz, 0<\beta_i<1,$$

Следовательно, при выполнении условий (11), (12), при $E_i \in C^1\left(\bar{\Omega}_2^0\right)$, заключаем, что уравнение (23) однозначно и безусловно разрешимо в классе $\tau(\xi) \in C^1\left[0,1\right) \cap C^2\left(0,1\right)$. Подставляя найденную функцию $\tau(\xi)$ в (18) полностью определим решение $u_2\left(\xi,\eta\right)$ задачи (14) - (17) в области Ω_2^0. В силу условий задачи введем обозначения

$$u_{1y}\left(x,0\right) = u_{2y}\left(x,0\right) = \nu(x), u_{1x}\left(x,0\right) = u_{2x}\left(x,0\right) = \tau'(x), \tag{24}$$

где $\tau'(x)$ и $\nu(x) -$ пока не известные функции.

Далее, для восстановления решения задачи 1, в области Ω_1 нам необходимо найти функцию $\omega_1\left(z\right)$. С этой целю, с учетом [2], проинтегрируем уравнение (13) по x от 0 до x, при $y \geq 0$

$$\int_0^x \omega_1\left(bt-ay\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(bt+ay\right)\right)dt + u_{1x}(0,y) = u_{1x}(x,y)+$$

$$+\int_0^x\left[a_1(t,y)u_{1t}(t,y)+b_1(t,y)u_{1y}(t,y)+c_1(t,y)u_1(t,y)-\sum_{i=1}^n d_i D_{0t}^{\alpha_i}u_1\left(t,0\right)\right]dt.$$

Отсюда, с учетом свойств задачи 1 и введенных обозначений (24), переходя к пределу при $y \to +0$, дифференцируя по x, находим

$$\omega_1\left(bx\right) = [\tau''(x) + a_1(x,0)\tau'(x) + b_1(x,0)\nu(x)+$$

$$\left.+c_1(x,0)\tau(x) - \sum_{i=1}^n d_i(x,0)D_{0x}^{\alpha_i}\tau\left(x\right)\right]\exp\left(-\frac{cx}{2a}\right). \tag{25}$$

Следовательно, из уравнения (13) при $y \to +0$ и (25) следует, что $u_{1xx}(0,y) = u_{2xx}(0,y)$. Таким образом, равенство (25) можно переписать в виде

$$\omega_1\left(z\right) = \left[\tau''\left(\frac{z}{b}\right) + a_1\left(\frac{z}{b},0\right)\tau'\left(\frac{z}{b}\right) + b_1\left(\frac{z}{b},0\right)\nu\left(\frac{z}{b}\right)+\right.$$

$$+c_1\left(\frac{z}{b},0\right)\tau\left(\frac{z}{b}\right)-\sum_{i=1}^{n}d_i\left(\frac{z}{b},0\right)D^{\alpha_i}_{0{}^z\!/\!_b}\tau\left(\frac{z}{b}\right)\Bigg]\exp\left(-\frac{cz}{2ab}\right), \tag{26}$$

где $z=bx-ay,\ 0\le z\le b$.

Функция $\omega_1(bx-ay)$ определилась в промежутке $0\le bx-ay\le b$.

Чтобы найти функцию $\omega_1(bx-ay)$ при $-ah\le z\le b$, $(x,y)\in\overline{\Omega}_1$, в уравнении (13) при $y\ge 0$, в силу свойств задачи и условий (2) и (3), переходя к пределу, при $x\to+0$, имеем

$$\omega_1(-ay)=\left[\varphi_3(y)+b_1(0,y)\varphi_1'(y)+c_1(0,y)\varphi_1(y)-\sum_{i=1}^{n}d_i(0,y)\ D^{\alpha_i}_{0x}\tau|_{x\to+0}\right]\exp\left(\frac{cy}{2b}\right),$$

или

$$\omega_1(z)=[\varphi_3\left(-\frac{z}{a}\right)+b_1\left(0,-\frac{z}{a}\right)\varphi_1'\left(-\frac{z}{a}\right)+$$

$$+c_1\left(0,-\frac{z}{a}\right)\varphi_1\left(-\frac{z}{a}\right)-k^*]\exp\left(-\frac{cz}{2ab}\right), \tag{27}$$

где $z=bx-ay,\ \ -ah\le z\le 0$.

Следовательно, из (26) и (27) при $z=0$ следует

$$\begin{gathered}\tau''(0)-\nu(0)=\varphi_3(0)-\varphi_1'(0),\\ a\left(\tau''(0)-\nu(0)\right)+b\left(\varphi_3'(0)-\varphi_1''(0)\right)+c\left(\varphi_3(0)-\varphi_1'(0)\right)=0.\end{gathered} \tag{28}$$

При выполнении равенств (19), и с учетом [2], условии согласовании, функции $\omega_1(z)$ и $\omega_1'(z)$ будут непрерывными и вдоль прямой $bx-ay=0$, т.е. уравнение (1) при $y\ge 0$ выполняется в точках этой прямой.

Итак, функция $\omega_1(z)$ определена полностью в области Ω_1. Таким образом, для восстановления решения задачи $u_1(x,y)$ в области Ω_1 приходим к следующей **вспомогательной задаче 1.А**: *найти функцию $u_1(x,y)$ в области Ω_1, удовлетворяющую условиям:*

$$L_1^*u_1\ -\sum_{i=1}^{n}d_iD^{\alpha_i}_{0t}\tau\left(t\right)=\omega_1(bx-ay)\exp\left[-\frac{c}{2ab}(bx+ay)\right],$$

$$u_1\left(0,y\right)=\varphi_1\left(y\right),\quad u_1\left(1,y\right)=\varphi_2\left(y\right),\quad 0\le y\le h,$$

$$u_1(x,0)=\tau(x),\qquad 0\le x\le 1,$$

где $L_1^*u\equiv u_{xx}+a_1(x,y)u_x+b_1(x,y)u_y+c_1(x,y)u$.

Если $b_1(x,y)<0$, $c_1(x,y)\le 0$ и $a_1(x,y)\ge 0,\forall(x,y)\in\Omega_1$ и выполнены условия (10) то в области Ω_1 решение задачи 1.А существует и оно единственно [26]. Таким образом, аналогично, как в [24], заключаем, что задача 1 однозначно разрешима, при $0<b/a\le 1$.

4. Исследование задачи 1 в случае $1<b/a<+\infty$.

Теорема 2. *Если $b_1(x,y)<0$, $c_1(x,y)\le 0$ и $a_i(x,y)\ge 0,\forall(x,y)\in\Omega_i$ и выполнены условия* (10) - (12), *то в области Ω существует единственное решение задачи* 1 *при* $1<b/a<+\infty$.

В $1<b/a<+\infty$, без ограничения общности можно положить $a>0$ и $b>0$, и тогда выполняются неравенства $0<(b+a)/2<b$. Поэтому могут быть следуюшие случаи:

$$0\le bx-ay\le(b+a)/2,\ (x,y)\in\Omega_{21},$$

$$(b+a)/2 \le bx - ay \le b,\ (x,y) \in \Omega_{22},$$

или в характеристических координатах

$$0 \le \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta \le \frac{b+a}{2}, \tag{29}$$

$$\frac{b+a}{2} \le \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta \le b. \tag{30}$$

Здесь $\Omega_{21}-$ треугольник с вершинами $A(0,0)$, $C(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $E(\frac{b+a}{2b},0)$; $\Omega_{22}-$ треугольник с вершинами $B(1,0)$, $C(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$, $E(\frac{b+a}{2b},0)$ и $\Omega_{21}\cup CE\cup\Omega_{22}=\Omega_2$.

При выполнении неравенства (29) так же, как и в случае a настоящей задачи, из (18) с учетом (17) находим функцию $\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\eta\right)$, она является решением уравнения (20). В силу (28) мы можем брать $\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\eta\right)$.

С целью нахождения функции $\omega_2(z)$, когда выполняется неравенство (30), в условии (7), переходим к характеристическим координатам

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial \eta}\right|_{\eta=1} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_4\left(\frac{\xi+1}{2}\right), \qquad 0\le\xi\le 1. \tag{31}$$

Подставляя (18) в (31), получаем

$$\int_0^\xi R(t,1;\xi,1)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)\exp\left(-\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}t+\frac{b-a}{2}\right)\right)dt =$$

$$= -2\sqrt{2}\psi_4\left(\frac{\xi+1}{2}\right) - 4f_\eta(\xi,1) - \int_0^\xi D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)E_i(t,1)R(t,1;\xi,1)dt, \tag{32}$$

где

$$f_\eta(\xi,1) = R_\eta(0,1;\xi,1)\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) + \left(a_3(0,1)\psi_1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right)\right)R(0,1;\xi,1)+$$

$$+\int_0^\xi\left(b_3(t,1)\psi_2\left(\frac{t+1}{2}\right) + \frac{1}{2}\psi_2'\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)R_\eta(t,1;\xi,1)dt,$$

по повторяющемуся индексу $i=1,2,...,n$ подразумевается суммирование. Из соотношения (32) при $\xi=0$ следует $\psi_1'\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{2}\psi_4\left(\frac{1}{2}\right)$.

Дифференцируя (32) по ξ и учитывая свойства функции Римана 2^o, 3^o, и 4^o, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right)$:

$$\begin{array}{c} \omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi+\frac{b+a}{2}\right) - \int_0^\xi K_2(t,\xi)\omega_2\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}\right)dt = \\ = g_2(\xi) - \Phi_1(\xi)D_{0\xi}^{\beta_i}\tau(\xi) + \int_0^\xi \Phi_2(\xi,t)D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)dt, \end{array} \tag{33}$$

где

$$K_2(t,\xi) = b_3(\xi,1)R(t,1;\xi,1)\exp\left(\frac{c(b+a)}{4ab}(\xi-t)\right), \tag{34}$$

$$\begin{array}{c} \Phi_1(\xi) = E_i(\xi,1)\exp\left(\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi+\frac{b-a}{2}\right)\right), \\ \Phi_2(\xi,t) = b_3(\xi,1)E_i(t,0)R(t,1;\xi,1)\exp\left(\frac{c}{2ab}\left(\frac{b+a}{2}\xi+\frac{b-a}{2}\right)\right), \end{array} \tag{35}$$

$g_2(\xi)-$ известная функция.

Из уравнения (33) с учетом (11), (12), с учетом свойств интегро-дифференциальных уравнений и [3] следует, что функции $K_2(t,\xi)$ и $g_2(\xi)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \le t,\xi \le 1$ и при $\xi = 0$, уравнение (33) имеет единственное решение в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Считая правую часть известной, решение уравнения (33), с учетом [27], (10)-(12), находим $\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right)$ относительно $\tau(\xi)$:

$$\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\right) = g_2(\xi) + \int_0^\xi \tilde{R}(\xi,s) g_2(s)\,ds - \Phi_1(\xi) D_{0\xi}^{\beta_i}\tau(\xi) -$$

$$-\int_0^\xi D_{0t}^{\beta_i}\tau(t)\left\{\Phi_1(t)\tilde{R}(\xi,t) - \Phi_2(\xi,t) - \int_t^\xi \tilde{R}(\xi,s)\Phi_2(s,t)ds\right\}dt, \tag{36}$$

$\tilde{R}(\xi,s)-$ резольвента ядра $K_2(t,\xi)$, которая обладает теми же свойствами, что и ядро $K_2(t,\xi)$. В силу (30) и (36) мы можем определить функцию $\omega_2\left(\frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta\right)$.

Подставляя значение функции $\omega_2\left(\frac{b+a}{2}\eta + \frac{b-a}{2}\xi\right)$ в (18), находим решение задачи (14), (15) и (16) в области Ω_2^0 относительно $\tau(\xi)$. Отсюда, подставляя (18) в $u_2(\xi,\eta)|_{\eta=\xi} = \tau(\xi)$, с учетом (36), аналогично, как и при $0 < b/a \le 1$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau(x)$, которое безусловно разрешимо. Таким образом, находим решение $u_2(\xi,\eta)$ в области Ω_2^0.

Из (20) и (36) при выполнении равенства (9) также следует, что $g_1(1) = g_2(0)$, и, согласно уравнениям (20) и (36), $\omega_2(z)$, будет непрерывной и при $z = (b+a)/2$, кроме того, если выполняются и равенства (2.38), (2.39) из [2], то функция $\omega_2'(z)$ будет непрерывной при $z = (b+a)/2$. Таким образом, мы нашли

$$\omega_2(z) \in C\left(\bar{\Omega}_2^0\right) \cap C^1\left(\Omega_2^0\right), \left(z = bx - ay = \frac{b-a}{2}\xi + \frac{b+a}{2}\eta\right). \tag{37}$$

Дальше, рассуждая, аналогично в случае a, находим $u_2(x,y)$ в области Ω_2. Затем для определения $u_1(x,y)$ в области Ω_1, переходим к первой краевой задачи для линейного параболического уравнения (13) при $y \ge 0$, где $b_1(x,y) < 0$, $c_1(x,y) \le 0$ и $a_1(x,y) \ge 0$, $\forall(x,y) \in \Omega_1$, и с учетом (10), решение ее существует и оно единственно. Теорема 2 доказана.

Аналогично [28]*, можно доказать однозначную разрешимость задачи для уравнения* (1)*, в случае* $a = 0$, $b \ne 0$.

Замечание 2. *В задаче* 1 *вместо условий* (3) *и* (8) *можно рассмотреть следующие условия:*

$$u_x(0,y) = \varphi_3^*(y), \qquad 0 \le y \le 1,$$

и

$$u_x(1,y) = \varphi_4^*(y), \qquad 0 \le y \le 1,$$

соответственно.

Замечание 3. *Задачу* 1 (*соответственно* [28] *можно рассмотреть с общими разрывными условиями склеивания.*

This paper is dedicated to the memory of Tokhtamurod Djuraev. He was a true scholar, who thrived on learning and helping others learn.

Список литературы

[1] Бердышев А.С. *О базисности системы корневых функций одной нелокальной задачи для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором*, Дифференциальные уравнения. 1977. -Т.36. -№ 3, 372-376.

[2] Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Т.: ФАН. 1986. – 220 с.

[3] Мамажанов М., Халмуратов Д., *Краевые задачи для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с нехарактеристической линией изменения типа.* Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, - № 2, 271-275.

[4] Базаров Д. *Об аналоге задачи Бицадзе-Самарского для параболо - гиперболического уравнения третьего порядка*, Дифференциальные уравнения. -Т.25, -№ 1, 21-27 (1989).

[5] Бердышев А.С. *О базисности системы корневых функций одной нелокальной задачи для уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором*, Дифференциальные уравнения. 2000. -Т. 36, -№ 3, 372–376.

[6] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа. 1995. – 301 с.

[7] Водахова В.А. *Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева*, Дифференциальные уравнения. 1983. - Т.19. -№ 1, 163-166.

[8] Ланин И.Н., *Краевая задача для одного нагруженного гиперболо-параболического уравнения третьего порядка*, Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17. - № 1, 97-106.

[9] Елеев В.А.*О некоторых краевых задачах для смешанных нагруженных уравнений второго и третьего порядка*, Дифференциальные уравнения. 1994. - Т. 30.- № 2, 230-237.

[10] Нахушева В.А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. - 173 с.

[11] Елеев В.А., Дзарахохов А.В. *Об одной нелокальной краевой задаче для нагруженного уравнения третьего порядка*, Владикавказский математический журнал. 2004. -Т. 6, Выпуск 3, 36-46.

[12] Алероев Т.С. *Об одном классе операторов, соответствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка*, Сибирский математический журнал, 2005. -Т. 46, - № 6, 1201-1207.

[13] Нахушев А.М. Дробного исчисление и его применения - М.:Физматлит 2003. - 272 с.

[14] Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. - М.: Наука, 2005. - 199 с.

[15] Сербина Л.И. Нелокальные математические модели процессов переноса в системах с фрактальной структурой. - Нальчик. 2002. -144 с.

[16] Салахитдинов М.С., Исломов Б. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. - Ташкент: Мумтоз суз, 2009. - 264с.

[17] Agrawal O.P. *Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain* Nonlinear Dinamics. 2002. -vol 29, 145-155.

[18] Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T. *On a non-local boundary problem for ma parabolic-hyperbolic equation involving a Riemann-Liouville fractional differential operator*, Nonlinear Analysis. 2012. -vol. 75, 3268-3273.

[19] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland. Mathematics studies. 2006. -539 p.

[20] Podlubny I. Fractional differential equations. - Academic Press, New York, 1999.

[21] Хубиев К.У.*Аналог задачи Трикоми для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с переменными коэффициентами*, Уфимский математический журнал, 2017. -Т. 9. Выпуск 2, 94-103.

[22] Исломов Б., Балтаева У.И. *Краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений гиперболического и смешанного типов третьего порядка Уфимский мат. журн. УФА,* 2011, Т. 3, №3, 15–25.

[23] Исломов Б., Курьязов Д.М. *Краевые задачи для смешанного нагруженного уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа*, Узбекский математический журнал. 2000. - № 2, 29–35 .

[24] Islomov B., Baltaeva U.I. *Boundary value problems for a third-order loaded parabolic-hyperbolic equation with variable coefficients*, E. Journal of Differential Equations, Volume 2015, 1–10 (2015).

[25] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1976. - 296 с.

[26] Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, Ташкент: Фан, 1979. 239 с.
[27] Мирсабуров М., Мирсабурова Г.М. *On a problem with a shift and with the Frankl condition on a segment of the degeneration line for a class of equations of mixed type*, Дифференциальные уравнения. 2012, - Т. 48, - № 3, 362-371.
[28] Baltaeva U.I. *On the solvability of boundary-value problems with continuous and generalized gluing conditions for equation of mixed type with the loaded summand*, Ukrainian Mathematical Journal, 2018. - Vol. 69, - № 1, 1845-1854.

Балтаева Умида Исмоиловна
Хорезмская Академия Маъмуна, Ургенчский Государственный университет,
ул.Марказ, 14,
220195, Хорезм, Узбекистан
E-mail address: umida_baltayeva@mail.ru